EXAMEN DU COURS D'INTÉGRATION ET PROBABILITÉS

Aucun document n'est autorisé. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1 (Deux petits calculs).

(1) *Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Soit $Y = \lfloor X \rfloor$ la partie entière de X, et $Z = \{X\}$ la partie décimale de X. Montrer que Y et Z sont indépendantes et déterminer leurs lois.*

(2) *Soit $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi commune telle que $\mathbb{P}[\varepsilon_1 = 1] = \mathbb{P}[\varepsilon_1 = -1] = 1/2$. Soit N une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ indépendante de la suite $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$. Calculer explicitement $\mathbb{E}[(\sum_{k=1}^{N+1} \varepsilon_k)^2]$ en fonction de λ.*

Exercice 2 (Convergence en loi de valeurs extrêmes).

(1) *Soit U une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0,1]$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant chacune la même loi que U. Soit d'autre part Y une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Z_n = n \min\{U_1, \ldots, U_n\}$. Montrer que Z_n converge en loi vers Y.*

(2) *Soit maintenant X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant chacune la même loi que X. Montrer que*

(a) *Si $\mathbb{P}[X > x] = o(1/x)$ lorsque $x \to \infty$, alors*

$$Z_n = \frac{1}{n} \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

converge en loi vers 0 lorsque $n \to \infty$.

(b) *Si $\mathbb{P}[X > x] \sim \alpha/x^\lambda$ lorsque $x \to \infty$, avec $\alpha, \lambda > 0$, alors*

$$Z_n = \frac{1}{n^{1/\lambda}} \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

converge en loi, lorsque $n \to \infty$, vers une variable aléatoire dite de Fréchet, dont la fonction de répartition est donnée par $\mathbb{P}[Y \leq t] = \exp(-\alpha t^{-\lambda}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

Exercice 3 (Variables aléatoires dans L^p).

(1) *Soit X une variable aléatoire réelle positive. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^1 positive et croissante. Montrer que*

$$\mathbb{E}[f(X)] = f(0) + \int_0^\infty f'(t)\, \mathbb{P}[X > t]\, dt\,.$$

(2) *Soit $p \in [1,\infty[$ et X et Y indépendantes telles que $Z = X + Y$ soit dans L^p. On veut montrer qu'alors X et Y sont chacune dans L^p.*
   (a) *Soit $A > 0$ tel que $\mathbb{P}[|Y| \le A] \ge 1/2$. Montrer que*
   $$\mathbb{P}[|Z| > t - A] \ge \frac{\mathbb{P}[|X| > t]}{2}$$
   pour tout $t \ge 0$.
   (b) *Montrer que X et Y sont chacune dans L^p en utilisant les questions précédentes.*

Exercice 4 (Une utilisation du lemme de Borel–Cantelli). *Soit $(X_n)_{n\ge 1}$ une suite de variables aléatoires réelles positives indépendantes et identiquement distribuées. Montrer que presque sûrement $\lim_{n\to\infty} X_n/n = 0$ si $\mathbb{E}[X_1] < \infty$ et que $\limsup_{n\to\infty} X_n/n = \infty$ si $\mathbb{E}[X_1] = \infty$.*

On pourra utiliser le fait, que l'on démontrera, que pour tout $A > 0$, on a $\mathbb{E}[X] = A\int_0^\infty \mathbb{P}[X \ge xA]dx$.

Exercice 5 (Diagonalisation de la transformée de Fourier L^2). *Notons $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $L^2 = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, définie comme le prolongement continu à L^2 de l'application définie sur $L^1 \cap L^2$ par*
$$f \mapsto \widehat{f} : \xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(x)dx\,.$$
(On a utilisé une convention de signe différente qu'en cours, mais ça n'a pas d'importance.) C'est une isométrie pour la norme L^2. On veut déterminer les vecteurs propres de $\mathcal{F}$.

(1) *Soit $\varphi(x) = \exp(-x^2)$. Justifier que la dérivée n-ième de φ satisfait $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\varphi(x)$ où H_n est un polynôme de degré n (appelé le n-ième polynôme de Hermite). Notons que par convention, $\varphi^{(0)} = \varphi$ et donc on a $H_0 = 1$.*
(2) *En développant φ en série entière, montrer que pour tous $x, t \in \mathbb{C}$, on a*
$$e^{-(x-t)^2} = e^{-x^2} \sum_{n\ge 0} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{-x^2} G(x,t)\,,$$
où $G(x,t) = \exp(2tx - t^2)$.
(3) *Pour tous $\xi, t \in \mathbb{R}$, on note*
$$J(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{2tx - \frac{x^2}{2}}\, dx\,.$$
En pensant à la transformée de Fourier d'une densité gaussienne, montrer que pour tous $\xi, t \in \mathbb{R}$, on a
$$J(\xi,t) = G(\xi, it)e^{-\xi^2/2} = \sum_{n\ge 0} \frac{(it)^n}{n!} \psi_n(\xi)\,,$$
où $\psi_n(\xi) = \exp(-\xi^2/2)H_n(\xi)$.

(4) *En remarquant que* $\exp(2tx + t^2) = G(ix, -it)$*, justifier que les coefficients du polynôme* $(-i)^n H_n(ix)$ *sont réels et positifs, égaux aux valeurs absolues des coefficients de* H_n*. En déduire que*

$$|\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(x)| \leq \exp(2t|x| + t^2)\,.$$

(5) *Montrer que pour tous* $t, \xi \in \mathbb{R}$*, on a*

$$J(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} G(x,t) e^{-x^2/2} dx = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} \widehat{\psi}_n(\xi)\,.$$

On prendra soin de justifier l'interversion entre somme et intégrale.

(6) *En conclure que* $\mathcal{F}\psi_n = i^n \psi_n$*.*

(7) ***(Question bonus.)*** *Montrer que les fonctions* $(\psi_n)_{n\geq 0}$ *forment une famille orthogonale de* L^2*, et que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans* L^2*. En déduire que* $\mathcal{F}$ *a exactement quatre sous-espaces propres de* L^2 *associés aux valeurs propres* $1, i, -1, -i$ *et décrire ces sous-espaces.*

L'exercice suivant est facultatif. Il est attendu que vous le traitiez seulement s'il vous reste du temps après avoir essayé de faire le maximum de choses dans les exercices précédents.

Exercice 6 (**Facultatif: question de cours à la carte**). *Choisissez un théorème important du cours et présentez son énoncé (si vous avez le temps, vous pouvez en plus de l'énoncé exact, expliquer de manière informelle des choses autour de sa démonstration et/ou de ses applications, et/ou de son "interprétation").*