PARTIEL DU COURS D'INTÉGRATION ET PROBABILITÉS

Aucun document n'est autorisé. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1 (Graphe aléatoire asymptotiquement presque sûrement connexe). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le graphe complet K_n sur n sommets, c'est-à-dire le graphe avec n sommets tous reliés entre eux deux à deux par une arête. Il y a donc $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ arêtes, dont nous notons E_n l'ensemble.*

Soit $p \in [0,1]$. On rappelle que la loi de Bernoulli de paramètre p est la mesure de probabilité sur $\{0,1\}$ qui attribue la probabilité p à $\{1\}$ et $1-p$ à $\{0\}$.

On considère une collection $(X_e)_{e \in E_n}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p, indépendantes dans leur ensemble.

Soit $G(n,p)$ le sous-graphe aléatoire de K_n obtenu en gardant tous les n sommets et en ne gardant parmi les arêtes $e \in E_n$ de K_n que celles pour lesquelles $X_e = 1$.

(1) *Considérons une partition de l'ensemble des n sommets en deux sous-parties disjointes. Quelle est la probabilité qu'aucune arête ne relie ces deux sous-parties dans $G(n,p)$?*
(2) *On appelle coupure d'un graphe une partition de l'ensemble de ses sommets en deux parties disjointes de telle sorte qu'aucune arête ne les relie. Quelle est l'espérance du nombre de coupures de $G(n,p)$?*
(3) *Soit $\beta > 2$. On pose $p_n = \min(\beta \log(n)/n, 1)$. Montrer que l'espérance du nombre de coupures de $G(n,p_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser que $1-p \le e^{-p}$.*
(4) *En conclure que la probabilité que $G(n,p_n)$ soit connexe tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.*

Exercice 2 (Une variante du théorème limite central). *Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et de même loi, que l'on suppose dans L^2. Soit $(N_k)_{k\ge1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que:*

(1) *La suite $(N_k)_{k\ge1}$ est indépendante de la suite $(X_n)_{n\ge1}$.*
(2) *Presque sûrement, N_k tend vers l'infini lorsque k tend vers l'infini.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On s'intéresse à la suite de variables aléatoires $(S_{N_k})_{k\ge1}$.

Montrer que l'on a la convergence en loi lorsque k tend vers l'infini:

$$\frac{S_{N_k} - \mathbb{E}[S_{N_k}]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_{N_k}]}} \xrightarrow{(loi)} \mathcal{N}(0,1)\,,$$

où $\mathcal{N}(0,1)$ désigne la loi normale (i.e. la loi gaussienne d'espérance nulle et de variance 1).

Exercice 3 (Une égalité en loi). *Montrer que si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, et que Y est une variable aléatoire de loi exponentielle* $\mathrm{Exp}(1)$ *de paramètre 1, alors on a l'égalité en loi*

$$\frac{X_1^2 + X_2^2}{2} \overset{(loi)}{=} Y\,,$$

c'est-à-dire que les deux membres de cette équation sont des variables aléatoires de même loi.

Exercice 4 (Une variante de la loi forte des grands nombres). *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose que ces variables sont décorrélées (i.e.* $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ *pour tout $i \neq j$) et qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, on ait* $\mathrm{Var}(X_n) \leq M$.

Pour tout $n \geq 1$, posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On veut montrer que presque sûrement $(S_n - \mathbb{E}[S_n])/n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

(1) *Justifier que l'on peut supposer sans perte de généralité que pour tout $n \geq 1$, on ait $\mathbb{E}[X_n] = 0$ et $\mathbb{E}[(X_n)^2] \leq 1$. On fera cette hypothèse dans la suite.*

(2) *Montrer que $\mathbb{E}[(S_n/n)^2] \leq 1/n$. En déduire que presque sûrement S_{n^2}/n^2 tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini.*

(3) *Pour tout n, posons $m(n) = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ et définissons $Z_n = S_n/(m(n))^2 - S_{(m(n))^2}/(m(n))^2$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}[(Z_n)^2] \leq 2/(m(n))^3$.*

(4) *En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[(Z_n)^2] < \infty$ et conclure.*

Exercice 5 (Petites questions indépendantes les unes des autres).

(1) *Donner un exemple de suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 1}$ qui converge en loi vers une limite X mais telle que $(\mathbb{E}[X_n])_{n\geq 1}$ ne tende pas vers $\mathbb{E}[X]$.*

(2) *Si X, Y et Z sont des variables aléatoires réelles telles que X et Y ont la même loi, est-ce que $X + Z$ a la même loi que $Y + Z$? Justifier la réponse.*

(3) *Si σ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, on lui associe la matrice $P = (P_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de coefficients $P_{i,j} = \mathbb{1}_{\{\sigma(i)=j\}} \in \{0, 1\}$. En choisissant σ aléatoire selon la loi uniforme sur l'ensemble de toutes les permutations de $\{1, \ldots, n\}$, on obtient ainsi une matrice aléatoire, que l'on note encore P. Sous cette loi, calculer l'espérance de la trace de P puis l'espérance de la trace de P^2.*

(4) *Soit K une matrice réelle symétrique de taille $n \times n$ dont on suppose le spectre inclus dans $[0, 1]$. Montrer que la fonction polynomiale $z \mapsto \det(I + (z - 1)K)$ est la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$ dont on décrira la loi le plus simplement possible à l'aide des valeurs propres de K.*

(5) *Enoncer le théorème de Glivenko–Cantelli.*

Exercice 6 (Une utilisation du lemme de Borel–Cantelli). *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[|a_n|] \leq C$ et $\mathbb{E}[\max(-\log |a_n|, 0)] \leq C$. Montrer que presque sûrement $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1$.*