EXAMEN DU COURS D'INTÉGRATION ET PROBABILITÉS

Aucun document n'est autorisé. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1 (Une loi forte des grands nombres). Le but de l'exercice est de démontrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires complexes telles que $|X_n| \leq 1$, $\forall n \geq 1$ et

(*)
$$\sum_{N\geq 1} \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n\right|^2\right] < \infty\,,$$

alors $(X_n)_{n\geq 1}$ satisfait une loi forte des grands nombres, au sens où si l'on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, alors presque sûrement S_n/n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Pour cela on va utiliser le lemme de condensation de Cauchy (voir Exercice 7) qui pourra être démontré en bonus.

(1) Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. complexes telle que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[|Y_n|^2] < \infty$. Montrer que presque sûrement Y_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

(2) Utiliser la question précédente et le lemme de condensation de Cauchy pour démontrer l'énoncé.

(3) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. complexes telle que $|X_n| \leq 1$, $\forall n \geq 1$ et telle que pour tout $n, m \geq 1$, on ait $\Re\,\mathbb{E}[X_n\overline{X_m}] \leq \Phi(|n-m|)$ où $\Phi \geq 0$ vérifie $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n)/n < \infty$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ vérifie l'hypothèse (*) ci-dessus et donc satisfait une loi forte des grands nombres.

(4) Montrer que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. réelles centrées uniformément bornées qui sont corrélées négativement deux à deux, alors elles satisfont une loi forte des grands nombres.

Exercice 2 (Premier temps d'atteinte).
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. à valeurs entières telle que p.s. $Y_n \geq -1$ pour tout n. On considère la marche aléatoire partant de $k \geq 1$ définie par $S_0 = k$ puis $S_n = S_{n-1} + Y_n$ pour tout $n \geq 1$. Soit T_0 le premier temps $n \geq 1$ pour lequel $S_n = 0$.

(1$\star$) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}[T_0 = n] = \frac{k}{n}\,\mathbb{P}[S_n = 0]$$

en faisant un raisonnement par récurrence sur n et en décomposant sur les valeurs possibles de Y_1.

(2) Exprimer en quelques mots ce que signifie cette égalité.

(3) On considère un processus de Galton–Watson $(Z_n)_{n\geq 0}$ de loi de reproduction μ et on note $T = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ sa taille totale. Rappeler brièvement le lien entre arbre et marche aléatoire et utiliser le résultat précédent pour en déduire que

$$\mathbb{P}[T = n] = \frac{1}{n}\mathbb{P}[X_1 + \cdots X_n = n-1]\,,$$

où $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d. de loi μ.

(4) Evaluer cette probabilité $\mathbb{P}[T = n]$ dans le cas où μ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(m,p)$.

Exercice 3 (Un calcul limite à l'aide du théorème-limite central). Utiliser le théorème-limite central pour calculer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de $e^{-n}\sum_{k=1}^n n^k/k!$.

Exercice 4 (**Permutation aléatoire**)**.** Soit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations sur n éléments.

(1) Rappeler la construction dite du "restaurant chinois" de la mesure uniforme sur $\mathfrak{S}_n$.

(2) En déduire l'identité polynomiale, valable pour tout θ:

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \theta^{N(\sigma)} = \theta(\theta+1)\cdots(\theta+n-1)\,,$$

où $N(\sigma)$ désigne le nombre de cycles de σ.

(3) Soit $\theta > 0$. Proposer une variante de l'algorithme précédent pour échantillonner la mesure de probabilité sur $\mathfrak{S}_n$ donnant à toute permutation σ un poids proportionnel à $\theta^{N(\sigma)}$.

(4) Retrouver la formule de la question (2) grâce à cela.

Exercice 5 (**Sous-suite aléatoire**)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles i.i.d. supposées positives. On considère l'événement

$A = \{\omega \,|\, \exists \text{ suite strict. croissante d'entiers naturels } (n_k(\omega))_{k\geq 1}, \text{telle que } X_{n_k}(\omega) > n_k(\omega), \forall k \geq 1\}\,.$

(1) Montrer que $\mathbb{P}[A] = 0$ ou 1.

(2) Montrer que $\mathbb{P}[A] = 0$ si et seulement si $\mathbb{E}[X_1] < \infty$.

Exercice 6 (**Processus de Poisson**)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \geq 1$, posons $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Enfin, pour tout $t \geq 0$, on pose $N_t = \#\{n \geq 1, Y_n \leq t\}$.

(1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, la densité de Y_n vaut $e^{-t}t^{n-1}/(n-1)!$

(2) En déduire que pour tout $t \geq 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre t.

(3) On fixe $s > 0$ et on pose $X_1^{(s)} = Y_{N_s+1} - s$ et pour tout $k \geq 2$, $X_k^{(s)} = X_{N_s+k}$ (Faire un dessin!). Montrer que pour tout $i \geq 0$, $k \geq 1$, et $r_1 > 0, \ldots, r_k > 0$, on a

$$\mathbb{P}[N_s = i, X_1^{(s)} > r_1, \ldots, X_k^{(s)} > r_k] = e^{-s}\frac{s^i}{i!}e^{-r_1}\cdots e^{-r_k}\,.$$

(4) En déduire pour tout $0 \leq s < t$, les variables $N_t - N_s$ et N_s sont indépendantes et que $N_t - N_s$ a même loi que N_{t-s}.

L'exercice suivant complète l'exercice 1. C'est un résultat sur les séries qui ne nécessite aucune théorie des probabilités. Il est facultatif et donnera lieu à des points bonus.

Exercice 7 (**Lemme de condensation de Cauchy**)**.** Le but de l'exercice est de montrer l'énoncé suivant : Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs ou nuls telle que $\sum_{n=1}^\infty a_n/n < \infty$, alors il existe une sous-suite croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que $n_{k+1}/n_k \to 1$ pour laquelle $\sum_{k=1}^\infty a_{n_k} < \infty$. On supposera sans perte de généralité que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ ne stationne pas à 0.

(1) Pour tout $n \geq 1$, soit $r_n = \sum_{r=n}^\infty a_r/r$ et $\ell_n = (r_n)^{-1/2}$. Montrer que $(\ell_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante qui tend vers l'infini, et telle que $\sum_n \ell_n a_n/n < \infty$. Pour cela, on montrera d'abord que

$$\frac{r_n - r_{n+1}}{r_n}\, r_n^{1/2} \leq \frac{1}{2}(r_n^{1/2} - r_{n+1}^{1/2})\,.$$

(2) On définit par récurrence une suite par : $m(1) = 1$ et $m(i+1) = m(i) + 1 + \lfloor \frac{m(i)}{\ell_{m(i)}} \rfloor$ (le symbole $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière). Justifier que $0 < m(i+1) - m(i) = o(m(i))$.

(3) Pour tout i, on choisit n_i tel que $m(i) \leq n_i < m(i+1)$ et $a_{n_i} = \min_{m(i)\leq r<m(i+1)} a_r$. Montrer que $n_{i+1}/n_i \to 1$ lorsque i tend vers l'infini.

(4) Montrer que $\sum_{r=m(i)}^{m(i+1)-1} \ell_r a_r/r \geq (m(i)/m(i+1))a_{n_i}$.

(5) Conclure.