PARTIEL DU COURS D'INTÉGRATION ET PROBABILITÉS

Aucun document n'est autorisé. La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1 (Permutations).
Démontrer de manière élémentaire que l'espérance du nombre X de cycles d'une permutation uniforme sur $\{1,\dots,n\}$ croît logarithmiquement avec n. Pour cela, on pourra écrire $X=\sum_{k=1}^n (L_k)^{-1}$, où L_k est la longueur du cycle contenant k et on justifiera cette égalité au préalable.

Exercice 2 (Un exemple de démonstration par couplage).
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $i\geq 1$ $X_i\sim \mathsf{B}(p_i)$ suit une loi de Bernoulli sur $\{0,1\}$ de paramètre $p_i=\mathbb{P}[X_i=1]$. Pour tout $n\geq 1$, posons $S_n=X_1+\cdots+X_n$ et $\lambda=p_1+\cdots+p_n$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $n\geq 1$ et $A\subset\mathbb{N}$, on a

$$|\mathbb{P}[S_n\in A]-\mathsf{Poi}_\lambda[A]|\leq \sum_{i=1}^n p_i^2\,, \tag{1}$$

où Poi_λ désigne la loi de Poisson de paramètre λ sur $\mathbb{N}$.

Soit $\Omega=\{-1,0,1,2,\dots,\}$. Soit $p\in[0,1]$ et posons $\mathbb{P}_p[\{-1\}]=1-p$, $\mathbb{P}_p[\{0\}]=e^{-p}-1+p$ et $\mathbb{P}_p[\{k\}]=e^{-p}p^k/k!$ pour tout $k\geq 1$.

(a) Justifier que $\mathbb{P}_p$ est une mesure de probabilité sur Ω.

Pour $\omega\in\Omega$, posons $X(\omega)=1-\mathbb{1}_{\{\omega=-1\}}$ et $Y(\omega)=\omega\left(1-\mathbb{1}_{\{\omega=-1\}}\right)$.

(b) Calculer la loi de X et la loi de Y sous $\mathbb{P}_p$.

(c) Montrer que $\mathbb{P}_p[X\neq Y]\leq p^2$.

On en déduit que si $p\ll 1$, alors $X=Y$ avec grande probabilité.

(d) Soit $n\geq 1$. Décrire explicitement mais brièvement comment considérer (sur quel espace avec quelle mesure?) une suite finie $((\tilde{X}_i,Y_i))_{1\leq i\leq n}$ de couples indépendants tels que pour tout i, la loi de $(\tilde{X}_i,Y_i)$ soit la même que celle de (X,Y) sous $\mathbb{P}_{p_i}$.

Pour tout $n\geq 1$, posons $\tilde{S}_n=\tilde{X}_1+\cdots+\tilde{X}_n$ et $T_n=Y_1+\cdots+Y_n$.

(e) Montrer que $\mathbb{P}[\tilde{S}_n\neq T_n]\leq\sum_{i=1}^n p_i^2$.

(f) Montrer que si U et V sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors pour tout $A\subset\mathbb{N}$, on a

$$|\mathbb{P}[U\in A]-\mathbb{P}[V\in A]|\leq\mathbb{P}[U\neq V]\,.$$

(g) En conclure (1).

On a donc démontré (1).

(h) Soit $n\geq 1$ et supposons que $p_i=p/n$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$. Que déduire de (1) lorsque n est grand?

Exercice 3 (**Utilisations du lemme de Borel–Cantelli**).
Les questions suivantes sont indépendantes.

(1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que presque sûrement $\limsup_{n\to\infty}(X_n/\log n) = 1$.
(2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. non constantes. Montrer que presque sûrement, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas.
(3) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[|a_n|] \leq C$ et $\mathbb{E}[\max(-\log|a_n|, 0)] \leq C$. Montrer que presque sûrement $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 1$.

Exercice 4 (**Utilisation de la loi du 0–1 de Kolmogorov**).
Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de Bernoulli $1/2$ sur $\{\pm 1\}$. On considère la série aléatoire $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x^n$. On veut montrer qu'elle s'annule une infinité de fois sur $[0, 1[$.

(1) Quel est le rayon de convergence de f?
(2) Soit $L = \limsup_{\{x\to 1, x<1\}} f(x)$. Justifier brièvement que L est une variable aléatoire à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$ et montrer que L a la même loi que $\varepsilon_1 + L'$ où L' est indépendante de ε_1 et L' a la même loi que L.
(3) En déduire une relation simple satisfaite par $\mathbb{E}\left[e^{itL}\mathbb{1}_{\{|L|<\infty\}}\right]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(4) En déduire que L est presque sûrement infinie (prenant donc uniquement les valeurs $-\infty$ ou $+\infty$).
(5) Montrer que $\mathbb{P}[L = \infty] \geq \mathbb{P}[L = -\infty]$. En déduire que $\mathbb{P}[L = \infty] \geq 1/2$ puis que $\mathbb{P}[L = \infty] = 1$.
(6) Conclure.

Exercice 5 (**Théorème d'approximation de fonction continue**).
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la suite de fonctions

$$\left(x \mapsto e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{(nx)^k}{k!}\right)_{n\geq 1}$$

converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6 (**Petites questions**).

(1) Donner un exemple de variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}[X \geq 1] = e^{-10}$ et $\mathbb{E}[X] = e^{10}$.
(2) Donner un exemple de deux variables aléatoires décorrélées mais pas indépendantes.
(3) On étudie un jeu de hasard. Deux joueurs se font face et chacun a une suite infinie de chapeaux sur la tête qui sont noirs ou blancs selon des suites i.i.d. de Bernoulli 1/2. Chaque joueur voit la pile de l'autre mais pas la sienne. Les joueurs doivent simultanément choisir un chapeau dans leur pile. On dit qu'ils gagnent uniquement si les deux choisissent un chapeau noir. Proposer une stratégie pour que les joueurs, qui se concertent avant, puissent gagner avec probabilité strictement plus grande que 1/4. Que se passe-t-il si on dit qu'ils gagnent lorsqu'il choisissent un chapeau de la même couleur, qu'il soit noir ou blanc? Peut-on proposer une stratégie pour qu'ils gagnent avec probabilité strictement plus grande que 1/2?
