EXAMEN DU COURS D'INTÉGRATION ET PROBABILITÉS

Dans la suite, l'abréviation « va » signifie « variable aléatoire » et l'abréviation « iid » signifie « indépendantes et identiquement distribuées».

Exercice 1 (Densité et fonctions caractéristiques). Soit $c > 0$.

(1) Calculer la densité de la différence de deux variables exponentielles indépendantes de même paramètre c (c'est-à-dire de densité $x \mapsto ce^{-cx}$ sur $\mathbb{R}_+$).
(2) Calculer la fonction caractéristique de la loi sur $\mathbb{R}$ à densité $x \mapsto \frac{c}{2}e^{-c|x|}$.
(3) Calculer la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy de densité $\frac{c}{\pi(c^2+x^2)}$
[Indication : *Utiliser le résultat de la question (2) et l'inversion de Fourier.*]

Exercice 2 (Lois infiniment divisibles). On dit qu'une loi de probabilités μ est *infiniment divisible* si pour toute va X de loi μ et pour tout entier $n \geq 1$, il existe des variables iid $Y_1, \dots, Y_n$ telles que X a même loi que $Y_1 + \ldots + Y_n$. On dit aussi que la va X est infiniment divisible.

(1) Montrer qu'une va est infiniment divisible si et seulement si pour tout $n \geq 1$ sa fonction caractéristique est la puissance n-ième d'une fonction caractéristique de variable aléatoire.
(2) Montrer que les lois suivantes sont infiniment divisibles : loi normale ($\mathcal{N}(0, \sigma^2)$), loi de Poisson ($\mathsf{Poi}(\lambda)$), loi de Cauchy ($\mathsf{Cauchy}(c)$), loi exponentielle ($\mathsf{Exp}(c)$).
[Indication : *Pour la loi exponentielle, on utilisera le fait que pour $a, c > 0$, la loi Gamma sur $\mathbb{R}_+$ de densité $x \mapsto \frac{c^a}{\Gamma(a)}e^{-cx}x^{a-1}$ a pour fonction caractéristique $t \mapsto (c/(c-it))^a$.*]
(3) Montrer que si $X_1, \dots, X_m$ sont des va indépendantes et infiniment divisibles, alors la somme $X_1 + \ldots + X_m$ est aussi infiniment divisible.
(4) Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de va iid et N une va de Poisson indépendante. Montrer que $Y = \sum_{k=1}^{N} X_k$ est infiniment divisible. (Par convention, si $N = 0$, la somme vaut 0.)
(5) Montrer que si une loi infiniment divisible est à support borné, alors c'est une masse de Dirac.

Exercice 3 (Caractérisation des lois infiniment divisibles de variance finie).
Si ν est une mesure finie sur $\mathbb{R}$, on définit

$$(*) \qquad \psi_\nu(t) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{itx} - 1 - itx)}{x^2}\, d\nu(x)\right).$$

(1) Justifier que l'intégrale dans la formule ($*$) est bien définie.
(2) Montrer que si une variable aléatoire admet pour fonction caractéristique ψ_ν, alors son espérance est nulle et sa variance vaut $\nu(\mathbb{R})$.
(3) Soit $\sigma > 0$. Montrer que si $\nu = \sigma^2\delta_0$ est un multiple d'une masse de Dirac en 0, alors ψ_ν est la fonction caractéristique d'une gaussienne de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
(4) Soit $\lambda > 0$. Montrer que si $\nu = \lambda x^2\delta_x$ est un multiple d'une masse de Dirac en $x \neq 0$, alors ψ_ν est la fonction caractéristique de la variable $x(X - \lambda)$ où X est une loi de Poisson de paramètre λ.

(5) Montrer que si ν est une combinaison linéaire finie de masses de Dirac, alors ψ_ν est encore la fonction caractéristique d'une va.

(6) Enfin, montrer que pour toute mesure finie ν, la fonction ψ_ν est la fonction caractéristique d'une loi infiniment divisible. Pour cela on introduira pour tout $n \geq 1$, la mesure discrète

$$\nu_n = \sum_{k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 2^{2n}\}} \nu\left(]k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]\right) \delta_{k2^{-n}}$$

où $\delta_{k2^{-n}}$ désigne la masse de Dirac au point $k2^{-n}$. On utilisera la suite $(\nu_n)_{n\geq 1}$ comme approximation de ν par une combinaison linéaire finie de masses de Dirac.
[Indication : *On pourra utiliser le fait que pour toute fonction f continue qui tend vers zéro à l'infini, $\int f d\nu_n$ tend vers $\int f d\nu$. On pourra aussi utiliser la notion de suite tendue de mesures de probabilités, et le théorème de sélection d'existence de sous-suites convergeantes.*]

Exercice 4 (Loi-limite pour sommes de tableaux triangulaires).

(1) Montrer que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes et si $X_1 + \ldots + X_n$ admet un moment d'ordre 2 fini, alors toutes les variables X_k admettent un moment d'ordre 2 fini.

(2) Montrer que toute loi infiniment divisible d'espérance nulle et de variance finie est la limite en loi d'une suite $S_n = \sum_{k=1}^n X_{n,k}$ construite à partir d'un tableau triangulaire $(X_{n,k})_{n\geq 1, 1\leq k\leq n}$ de va dans L^2 d'espérance nulle dont les va par ligne (c'est-à-dire à n fixé) sont indépendantes.

(3) Illustrer la question précédente pour la loi normale et la loi de Poisson (recentrée) en décrivant un tableau triangulaire $(X_{n,k})$ convenable.

(4) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va infiniment divisibles. On suppose que cette suite converge en loi vers une variable X. Montrer que X est infiniment divisible.
[Indication : *On pourra utiliser la notion de suite tendue et le théorème de sélection.*]

(5) Soit $(X_{n,k})_{n\geq 1, 1\leq k\leq n}$ un tableau triangulaire de va centrées de variance finie, iid par ligne (c'est-à-dire à n fixé). Pour tout $n \geq 1$, posons $S_n = \sum_{k=1}^n X_{n,k}$. Montrer que si la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ admet une limite en loi, cette limite est infiniment divisible.

Exercice 5 (Lois stables). Une loi de probabilités μ est dite *stable* si pour tout $n \geq 1$ il existe $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que pour toutes $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de loi μ, la somme $\sum_{k=1}^n X_k$ a même loi que $a_n X + b_n$, où X est une va de loi μ.

(1) Montrer qu'une loi stable est infiniment divisible (notion définie à l'exercice 2).

(2) Montrer que la loi normale et la loi de Cauchy sont stables.

(3) Montrer que la loi de Poisson et la loi exponentielle ne sont pas stables.

(4) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va iid. Montrer que s'il existe des suites $(a_n)_n \in \mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ de réels telles que la suite $Y_n = ((X_1 + \ldots + X_n) - b_n)/a_n$ tende en loi vers une variable X, alors X est une loi stable.
[Indication : *On pourra étudier pour tout $k \geq 1$ fixé, la suite $(Y_{nk})_{n\geq 1}$ et considérer pour tout $n \geq 1$ les sommes partielles $S_{n,j}^{(k)} = X_{(j-1)n+1} + \ldots + X_{jn}$ pour $1 \leq j \leq k$. On utilisera alors le fait que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de va iid qui converge en loi vers X et que $a_n X_n + b_n$ converge en loi vers Y, alors les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers des limites $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ respectivement, et Y a la même loi que $aX + b$.*]

Exercice 6 (**Question de cours à la carte**). Choisissez un théorème important du cours et présentez son énoncé (si vous avez le temps, vous pouvez, en plus de l'énoncé exact, donner de manière synthétique et informelle des éléments de démonstration ou des exemples d'application).

Fin du sujet