PARTIEL DU COURS D'INTÉGRATION ET PROBABILITÉS – CORRIGÉ

Dans la suite, l'abréviation «iid» signifie «indépendantes et identiquement distribuées».

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi exponentielle de paramètre 1. Soit N une variable géométrique indépendante de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\sum_{n=1}^{N} X_n$.

Exercice 2. Pour tout $s > 1$, on définit la mesure de probabilité $\mathbb{P}_s$ sur $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$ par $\mathbb{P}[\{n\}] = n^{-s}/\zeta(s)$, pour tout $n \geq 1$, où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.
1. Soit $s > 1$ et X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_s$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}_s[X \in n\mathbb{N}^*]$. Montrer que les événements $\{X \in n\mathbb{N}^*\}$ et $\{X \in m\mathbb{N}^*\}$ sont indépendants si et seulement si n et m sont premiers entre eux.
2. Soit $s_1, s_2 > 1$ et soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathbb{P}_{s_1}$ et $\mathbb{P}_{s_2}$. Calculer la probabilité que X_1 et X_2 soient premiers entre eux.
3. Soit p un nombre premier et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\alpha_p(n)$ la multiplicité de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. Soit $s > 1$ et X une variable aléatoire distribuée selon $\mathbb{P}_s$. Calculer l'espérance de $\alpha_p(X)$.

Exercice 3. Soit $N \geq 1$ un entier. On considère N points uniformément et indépendamment choisis sur le cercle unité $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$. Soit X la longueur de l'arc de cercle maximal contenant le point $(1, 0)$ et aucun des N points aléatoires. Calculer l'espérance de X.

Problème 4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles iid d'espérance nulle et de variance 1. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Le but du problème est de démontrer la «loi du logarithme itéré»:

$$\mathbb{P}\Big[\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1\Big] = 1\,. \tag{1}$$

1. On commence par une question plus simple, en supposant que $X_1 \in L^4$. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que

$$\mathbb{P}\Big[\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{3/4}(\log n)^{(1+\varepsilon)/4}} \geq 1\Big] = 0\,.$$

Dans les questions suivantes, on pourra s'appuyer sur le résultat suivant :

Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite telle que $a_n \to \infty$ et $a_n = o(\sqrt{n})$ lorsque n tend vers l'infini, alors il existe une suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait

$$\mathbb{P}[S_n \geq a_n\sqrt{n}] = e^{-a_n^2(1+\xi_n)/2}\,. \tag{2}$$

2. En utilisant (2), montrer que $\mathbb{P}\big[\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{3n\log n}} \geq 1\big] = 0$.

Dans la suite, pour tout $n \geq 1$, on pose $M_n = \max\{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$. Soit $\alpha > \sqrt{2}$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on considère les événements $A_k = \{M_{k-1} < \alpha\sqrt{n} \leq M_k\}$.

3.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}\Big[M_n \geq \alpha\sqrt{n}\Big] \leq \mathbb{P}\Big[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq \alpha - \sqrt{2}\Big] + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\Big[A_k \cap \Big\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \alpha - \sqrt{2}\Big\}\Big].$$

(b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \{1, \ldots n-1\}$, on a

$$\mathbb{P}\Big[A_k \cap \Big\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \alpha - \sqrt{2}\Big\}\Big] \leq \mathbb{P}\Big[A_k \cap \Big\{\frac{|S_n - S_k|}{\sqrt{n}} > \sqrt{2}\Big\}\Big]$$

et en déduire que

$$\mathbb{P}\Big[A_k \cap \Big\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \alpha - \sqrt{2}\Big\}\Big] \leq \frac{1}{2}\,\mathbb{P}[A_k].$$

(c) Déduire de 3(a) et 3(b) que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}\Big[M_n \geq \alpha\sqrt{n}\Big] \leq 2\,\mathbb{P}\Big[\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq \alpha - \sqrt{2}\Big]. \tag{3}$$

4. Soit $\varepsilon > 0$ et $\theta > 1$ tel que $\theta^2 < 1 + \varepsilon$. Soit $n_k = \lfloor \theta^k \rfloor$, la partie entière de θ^k, et $x_k = \theta\sqrt{2 \log\log n_k}$.

(a) En utilisant les équations (2) et (3), montrer qu'il existe une suite $(\xi_k)_{k\geq 1}$ qui tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini, telle que pour tout $k \geq 1$, on ait

$$\mathbb{P}\left[\frac{M_{n_k}}{\sqrt{n_k}} \geq x_k\right] \leq 2\,\exp\left[-\frac{1}{2}(x_k - \sqrt{2})^2(1 + \xi_k)\right].$$

(b) En déduire que presque sûrement, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers $k \geq 1$ tels que $M_{n_k} \geq \theta\sqrt{2n_k \log\log n_k}$.

(c) Montrer que si n est tel que $n_{k-1} < n \leq n_k$ et k est suffisamment grand, alors $S_n > (1+\varepsilon)\sqrt{2n\log\log n}$ implique $M_{n_k} \geq \theta\sqrt{2n_k \log\log n_k}$.

(d) En déduire que presque sûrement, $\limsup_{n\to\infty} S_n/\sqrt{2n\log\log n} \leq 1$.

5. Soit $\varepsilon > 0$ et θ un entier tel que $3\theta^{-1/2} < \varepsilon$. Pour tout $k \geq 1$, posons $n_k = \theta^k$ et $x_k = (1 - \theta^{-1})\sqrt{2n_k \log\log n_k}$.

(a) Utiliser (2) avec des paramètres bien choisis pour montrer qu'il existe une suite $(\xi_k)_{k\geq 1}$ qui tend vers zéro lorsque k tend vers l'infini, telle que pour tout $k \geq 1$, on ait

$$\mathbb{P}\Big[S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geq x_k\Big] = \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{x_k^2}{n_k - n_{k-1}}(1 + \xi_k)\right].$$

(b) En déduire que presque sûrement, il existe une infinité d'entiers $k \geq 1$, tels que $S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geq x_k$.

(c) Utiliser la question 4(d) pour $(-X_n)_{n\geq 1}$ pour montrer que presque sûrement on a $-S_{n_{k-1}} \leq 2\sqrt{2n_{k-1}\log\log n_{k-1}} \leq 2\theta^{-1/2}\sqrt{2n_k \log\log n_k}$ pour tous sauf un nombre fini d'entiers $k \geq 1$.

(d) En déduire que presque sûrement, $\limsup_{k\to\infty} S_{n_k}/\sqrt{2n_k\log\log n_k} > 1 - \varepsilon$.

6. Conclure que la loi du logarithme itéré (1) est vérifiée.

7. Déterminer, presque sûrement, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite aléatoire $(S_n/\sqrt{2n\log\log n})_{n\geq 1}$ en supposant les variables (X_n) bornées.