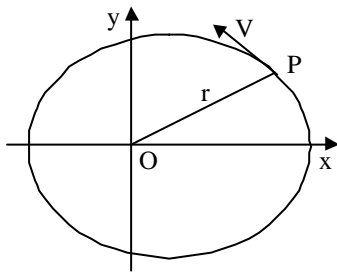


Masse soumise à une force centrale

On considère un repère cartésien centré sur une masse M et une masse ponctuelle m qui est soumise à une force centrale $\vec{F} = -G \frac{Mm\vec{OP}}{OP^3}$. La trajectoire est donc plane et son plan contient le vecteur vitesse initial \vec{V} de composantes V_{x0} et V_{y0} . A l'instant t_0 initial, les coordonnées de P sont $x_0 = a = 10$ (unité arbitraire) et $y_0 = 0$. L'énergie mécanique totale du système constitué par les masses M et m est :

$$E = 1/2mv^2 - GMm / r$$

Si l'énergie cinétique de m est inférieure à l'énergie potentielle, la trajectoire est une ellipse dont l'un des foyers est la masse M . La solution analytique est connue mais ici on détermine la trajectoire par une méthode numérique.



Les équations vectorielles du mouvement sont :

$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Par projection sur les axes Ox et Oy , on tire en posant $k = GM$:

$$k \cdot x/r^3 = m \cdot dV_x/dt ; k \cdot y/OP^3 = m \cdot dV_y/dt.$$

$$V_x = dx/dt \text{ et } V_y = dy/dt.$$

La résolution numérique de ces 4 équations permet de déterminer la trajectoire.

Le programme permet :

- La sélection des valeurs des composantes de la vitesse initiale avec un contrôle de la valeur de sa norme afin d'obtenir une trajectoire fermée ($V_{x0}^2 + V_{y0}^2 + 2k/a < 0$)
- Le tracé de la trajectoire du mobile pendant une révolution.
- L'affichage de la durée d'une révolution.
- Le tracé de l'hodographe du mouvement. C'est la courbe décrite par l'extrémité d'un vecteur équipollent au vecteur vitesse mais dont l'origine est ramenée à un point fixe.
- Tous les 20 pas, le tracé du rayon vecteur (OP) et du vecteur vitesse correspondant. Ceci permet d'apprécier visuellement l'évolution de la vitesse et la loi des aires.

On pourra à partir des courbes obtenues vérifier grossièrement la troisième loi de Kepler.

$$\frac{A^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi} (M + m) = \text{Constante} \quad (A \text{ est le demi grand axe de la trajectoire et } T \text{ la période})$$