TD 1 : Relations d'équivalence et espaces vectoriels quotients

Relations d'équivalence et quotients

Exercice 1. Montrer qu'il existe une bijection $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$, où S^1 est la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est le quotient de $\mathbb{R}$ par la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que la relation binaire sur E définie par $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence sur E.
2. On pose $X = E/\sim$. Soit $\pi : E \to X$ l'application canonique. Montrer qu'il existe une unique application $\overline{f} : X \to F$ telle que $f = \overline{f} \circ \pi$.
3. Montrer que $\overline{f}$ est injective.
4. Soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. On suppose que $f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)$. Montrer qu'il existe une application $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$.

Exercice 3. On considère $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ muni de la relation $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $x = \lambda y$. Montrer que c'est une relation d'équivalence. On notera $P^1(\mathbb{R})$ l'espace quotient.

Si $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, A définit un isomorphisme $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. En déduire une application $\tilde{A} : P^1(\mathbb{R}) \to P^1(\mathbb{R})$ et montrer qu'elle est bien définie.

On peut maintenant définir une application $A \mapsto \tilde{A}$, qui induit une relation d'équivalence sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Quelles sont ses classes d'équivalence ?

Exercice 4. (Construction de $\mathbb{Q}$)

Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. On définit $\sim$ sur E par $(a, b) \sim (a', b')$ si $ab' = a'b$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.
   Si $(a, b) \in E$, on note $\frac{a}{b}$ son image dans $E/\sim$.
2. Munir $E/\sim$ d'une structure de corps telle que $\mathbb{Z}$ s'injecte dans $E/\sim$.
3. Similairement, construire $k(X)$ à partir de $k[X]$ et plus généralement, construire le corps des fractions d'un anneau intègre.
4. Construire $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$.

Quotients d'espaces vectoriels

Dans toute la suite, l'adjectif « naturel » ou l'adverbe « naturellement » signifie « qui ne dépend pas du choix de bases ».

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E. Notons $\pi : E \to E/F$ la projection canonique. Soit S un sous-espace vectoriel de E. Montrer que S est un supplémentaire de F dans E si, et seulement si, $\pi_{|S}$ est un isomorphisme de S sur E/F.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. On suppose que $G \subseteq F$. Montrer que F/G est un sous-espace vectoriel de E/G et qu'il existe un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels $(E/G)/(F/G) \simeq E/F$.
2. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel $(F+G)/G \simeq F/(F \cap G)$.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathrm{End}(E)$, et $F \subset E$ un sous-espace stable par u. On note $u' \in \mathrm{End}(F)$ la restriction de u à F.

1. Justifier que u induit naturellement un endomorphisme $u'' \in \mathrm{End}(E/F)$ sur E/F.
2. Soit $\mathbf{e}$ une base de E qui est la réunion d'une base $\mathbf{e}_F$ de F et d'une famille $\mathbf{e}_{E/F}$ telle que $\pi(\mathbf{e}_{E/F})$ est une base de E/F. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(u)$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ où $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}_F}(u')$ et $C = \mathrm{Mat}_{\pi(\mathbf{e}_{E/F})}(u'')$.
3. En déduire que $\mathrm{tr}\, u = \mathrm{tr}\, u' + \mathrm{tr}\, u''$, que $\det u = (\det u')(\det u'')$, et que $\chi_u = \chi_{u'}\chi_{u''}$.
4. Montrer que si u est diagonalisable, alors u' et u'' le sont aussi.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel qui n'est pas nécessairement de dimension finie et F, G des sous-espaces vectoriels de E avec $G \subseteq F$. On suppose que les espaces vectoriels quotients E/F et E/G sont de dimension finie et que $\dim(E/F) = \dim(E/G)$. Montrer que $F = G$.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

1. On suppose que $\dim(F) = m$ et $\dim(E/F) = n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de $\dim(E)$?
2. Soit G un espace vectoriel et $u : E \to G$. On suppose que E est de dimension finie. Trouver une relation entre $\dim(E/\ker u)$ et $\mathrm{rg}(u)$.
3. Donner un exemple où :
   (a) $\dim(F)$ est finie et $\dim(E/F)$ est infinie ;
   (b) $\dim(F)$ est infinie et $\dim(E/F)$ est finie ;
   (c) $\dim(F)$ est infinie et $\dim(E/F)$ est infinie.

Exercice 10. Soit $E = \mathbb{C}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'ensemble $(P) := \{QP,\ Q \in \mathbb{C}[X]\}$ est un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
2. Déterminer un isomorphisme naturel entre $\mathbb{C}[X]/(P)$ et le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_{d-1}[X]$ des polynômes de degré inférieur à $d-1$ de $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que la multiplication dans $\mathbb{C}[X]$ induit une structure de $\mathbb{C}$-algèbre sur $\mathbb{C}[X]/(P)$.