TD 10 : Représentations linéaires de groupes finis

Exercice 1 — (Représentations linéaires de $\mathfrak{S}_3$)

Soit (V, ρ) une représentation complexe de $\mathfrak{S}_3$. On considère la transposition $\tau = (1\ 2)$ et le 3-cycle $\sigma = (1\ 2\ 3)$ de $\mathfrak{S}_3$.

1. Notons respectivement V_1, V_j et V_{j^2} les espaces propres de $\rho(\sigma) \in \mathrm{GL}(V)$ pour les valeurs propres $1, j$ et j^2 (où $j = e^{2i\pi/3}$). Montrer que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V est égal à la somme directe $V_1 \oplus V_j \oplus V_{j^2}$.

2. Montrer que V_1 est stable sous l'action de τ, que $\tau \cdot V_j$ est inclus dans V_{j^2} et que $\tau \cdot V_{j^2}$ est inclus dans V_j.
Indication : on pourra calculer $(\sigma\tau)^2$.

3. Soient V et W des représentations de $\mathfrak{S}_3$. On suppose que V_j et W_j sont non nuls.

a. Montrer que si $x \in V_j \setminus \{0\}$, alors $V_x := \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}\tau.x$ est une sous-représentation de V de dimension 2.

b. Montrer que V_x est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_3$.

c. Montrer que si $y \in W_j \setminus \{0\}$, alors V_x est isomorphe (en tant que représentation) à $W_y = \mathbb{C}y \oplus \mathbb{C}\tau.y$.

4. Rappeler pourquoi on peut définir une représentation de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \mathbb{C}e_3$ par $f(e_i) = e_{f(i)}$, pour tous $f \in \mathfrak{S}_3$ et $i \in [\![1, 3]\!]$; et pourquoi $H_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ est une sous-représentation irréductible de $\mathbb{C}^3$.

5. Montrer que les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$ sont soit de dimension 1, soit isomorphe à H_3. Quelles sont les représentations de dimension 1 de $\mathfrak{S}_3$ (à isomorphisme près) ?

Exercice 2 — (Invariants d'une représentation de permutation)

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On rappelle que la représentation de permutation V_X associée est donnée par $V_X = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}e_x$ et $g \cdot e_x = e_{g \cdot x}$, pour tous $g \in G$, $x \in X$.

1. Soient $X_1, \ldots, X_k$ les orbites de X sous l'action de G. Montrer que si $i \in [\![1, k]\!]$, alors V_{X_i} est une sous-représentation de V_X.

2. Montrer que $V_X = \bigoplus_{i \in [\![1,k]\!]} V_{X_i}$.

3. Déterminer V_X^G.

Exercice 3 — (Caractères linéaires de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$)

Un caractère linéaire d'un groupe est une représentation de dimension 1.

1. Déterminer les représentations de dimension 1 de $\mathfrak{S}_n$.

2. À quelle condition sur n, le groupe $\mathfrak{A}_n$ admet-il une représentation de dimension 1 non triviale ?

Exercice 4 — Soit G un groupe, H un sous-groupe distingué de G. Notons π la projection canonique $G \to G/H$.

1. On se donne une représentation $\rho : G/H \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de G/H.

a. Montrer que $\rho \circ \pi$ est une représentation de G.

b. Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\rho \circ \pi$ est irréductible.

2. Inversement, on se donne une représentation $\widetilde{\rho} : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de G. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\widetilde{\rho}$ pour qu'il existe une unique représentation $\rho : G/H \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\widetilde{\rho} = \rho \circ \pi$.

Exercice 5 — Soit G un groupe fini et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G. Soit W une sous-représentation de V.

1. Notons $q : V \to V/W$ l'application linéaire quotient. Justifier que pour tout $g \in G$, il existe un unique $u \in \mathrm{End}(V/W)$ tel que $u \circ q = q \circ \rho(g)$.

2. Montrer que ρ induit une représentation de G sur V/W qui est uniquement déterminée.

Exercice 6 — Soit G un groupe fini. On rappelle que la représentation régulière de G est l'espace vectoriel $\bigoplus_{g \in G} \mathbb{C} e_g$, muni de l'action $g'.e_g = e_{g'g}$, pour tous $g, g' \in G$.

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de G. Supposons qu'il existe $v \in V$ tel que l'ensemble $\{\rho(g)(v) \mid g \in G\}$ forme une base de V. Montrer que V est isomorphe à la représentation régulière de G.

Exercice 7 — (Sur les représentations fidèles et irréductibles)

Soit G un groupe fini et V une représentation complexe irréductible. On suppose que V est fidèle, c'est à dire que $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est injectif, où ρ est le morphisme associé à V. Soit $\mathcal{Z}(G)$ le centre de G.

1. Montrer que si $g \in \mathcal{Z}(G)$, alors $\rho(g)$ est une homothétie. En déduire l'existence d'un morphisme injectif de $\mathcal{Z}(G)$ dans $\mathbb{C}^*$.

2. Montrer que $\mathcal{Z}(G)$ est cyclique.

Exercice 8 — Soit G un groupe fini. Soit V une représentation de G et $\psi : G \to \mathbb{C}^\times$ un morphisme de groupes. Montrer que V est irréductible si, et seulement si, $V(\psi)$ l'est.

Exercice 9 — (Unicité de la décomposition en irréductibles de la représentation de permutation)

Soit $n \geqslant 3$. On considère la représentation de permutation de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}^n$ (on rappelle qu'elle est définie par $\sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)},\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \forall i \in [\![1, n]\!]$). On note $D = \mathbb{C}(1, \ldots, 1)$ et H la représentation standard.

1. Soit W une sous-représentation irréductible de $\mathbb{C}^n$. On suppose que W est de dimension supérieure ou égale à 2. Montrer que $W = H$.

2. En déduire que les seules sous-représentations irréductibles de $\mathbb{C}^n$ sont D et H.

Exercice 10 — (Dimension d'une représentation irréductible)

Soient G un groupe fini et V une représentation irréductible de G (exceptionnellement, on ne suppose pas a priori que $\dim(V)$ est finie). Montrer que V est de dimension finie et majorer la dimension de V.