TD3 : Produit tensoriel

Dans toute cette feuille on fixe un corps k. Tous les espaces vectoriels considérés sont sur k et de dimension finie.

Exercice 1 — Soit $A \in \mathrm{M}_{n,r}(k)$ et $B \in \mathrm{M}_{m,s}(k)$ deux matrices, on note $(a_{i,j})$ les coefficients de A. On appelle produit de Kronecker de A et B, et on note $A \otimes B$, la matrice par blocs dont les blocs sont les $a_{i,j}B$ (de sorte que $A \otimes B \in \mathrm{M}_{nm,rs}(k)$).

1. Soit $u : E \to E'$ et $v : F \to F'$ des applications linéaires. On note $\mathbf{e} = (e_i)_i$ (respectivement $\mathbf{e}'$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}'$) une base de E (respectivement de E', F, F'). On suppose que $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{f}'}(v)$. Donner des bases de $E \otimes F$ et $E' \otimes F'$ telles que la matrice de $u \otimes v$ dans ces bases soit $A \otimes B$. Donner des bases dans lesquelles la matrice de $u \otimes v$ est $B \otimes A$.

2. Montrer que l'application linéaire $\mathrm{Hom}(E, E') \otimes \mathrm{Hom}(F, F') \to \mathrm{Hom}(E \otimes F, E' \otimes F')$ donnée par $u \otimes v \mapsto u \otimes v$ est bijective.

On suppose maintenant $E = E'$ et $F = F'$.

3. Retrouver que $\mathrm{tr}(u)\,\mathrm{tr}(v) = \mathrm{tr}(u \otimes v)$.

4. Montrer que $\det(u)^m \det(v)^n = \det(u \otimes v)$.

Exercice 2 —

1. Soit E et F deux espaces vectoriels. Soit E' un sous-espace vectoriel de E et F' un sous-espace vectoriel de F. On note i l'inclusion de E' dans E et j l'inclusion de F' dans F. Montrer que $i \otimes j$ est injective, en déduire que $E' \otimes F'$ s'identifie canoniquement à un sous-espace vectoriel de $E \otimes F$ que l'on décrira.

2. Soit $u \in L(E_1, E_2)$ et $v \in L(F_1, F_2)$. Montrer que $\mathrm{im}(u \otimes v) = \mathrm{im}(u) \otimes \mathrm{im}(v)$. En déduire que $\mathrm{rg}(u \otimes v) = \mathrm{rg}(u)\,\mathrm{rg}(v)$.

3. Donner une formule pour $\ker(u \otimes v)$.

Exercice 3 — Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension ≥ 2.

1. Donner un élément de $E \otimes F$ qui n'est pas un tenseur simple.

2. Donner un exemple d'application h de $E \otimes F$ dans un espace vectoriel G tel que $h(x \otimes y) \neq 0$ pour tout x de $E \setminus \{0\}$ et y de $F \setminus \{0\}$ mais qui n'est pas injective.

Exercice 4 — Soit E et F des k-espaces vectoriels.

1. Soit n dans $\mathbb{N}$ et soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans E^n et $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans F^n. En utilisant la propriété universelle du produit tensoriel, montrer que $\sum_{i=1}^n x_i \otimes$

$y_i = 0$ si et seulement si pour toute forme bilinéaire $f : E \times F \to k$, on a $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) = 0$.

2. En déduire que si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre de E et y est un vecteur de F, alors $\sum_i x_i \otimes y = 0$ si et seulement si $y = 0$.

Exercice 5 — Soit E et F deux k-espaces vectoriels. On rappelle qu'il existe une unique application linéaire $\varphi : E^* \otimes F \to \mathrm{Hom}(E, F)$ qui vérifie : $\varphi(\mu \otimes x)$ est l'application linéaire $z \mapsto \mu(z)x$, et que de plus φ est un isomorphisme.

1. Expliciter une forme bilinéaire canonique $\psi : E^* \times E \to k$. On note $\overline{\psi} : E^* \otimes E \to k$ le morphisme induit par ψ.

2. Pour cette question on suppose que $E = F$. Montrer que $\overline{\psi} \circ \varphi^{-1} = \mathrm{tr}$, où tr désigne la trace sur $L(E)$.

3. Pour t de $E^* \otimes F$ on note $\ell(t)$ le plus petit entier r tel que t s'écrive comme une somme de r tenseurs simples. Montrer que $\mathrm{rg}(\varphi(t)) = \ell(t)$.

4. Si on suppose $\dim E$ et $\dim F \geq 2$, déduire de la question précédente un exemple d'élément de $E^* \otimes F$ qui n'est pas un tenseur simple.

5. Relire l'exercice 8 de la feuille de TD2 à la lumière de cet exercice.

Exercice 6 — Soit E et F deux espaces vectoriels.

1. Montrer que l'application $E \times F \to F \otimes E$ donnée par $(x, y) \mapsto y \otimes x$ est bilinéaire. En déduire l'existence et l'unicité d'une application linéaire $f : E \otimes F \to F \otimes E$ vérifiant $f(x \otimes y) = y \otimes x$ pour tout $x \in E$ et $y \in F$.

2. On construit de même une application linéaire $g : F \otimes E \to E \otimes F$ telle que $g(y \otimes x) = x \otimes y$. Montrer que $f \circ g$ est l'identité de $F \otimes E$ et $g \circ f$ est l'identité de $E \otimes F$.

3. Montrer les autres isomorphismes canoniques vus en cours.

4. Donner un isomorphisme canonique entre $E^* \otimes F^*$ et $(E \otimes F)^*$.

Exercice 7 — Soit E et F deux espaces vectoriels. Soit T_1 et T_2 deux espaces vectoriels, chacun muni d'une forme bilinéaire $b_i : E \times F \to T_i$, vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout espace vectoriel V, l'application $\lambda_{i,V} : \mathrm{Hom}(T_i, V) \to \mathrm{Bil}(E, F; V)$ donnée par $f \mapsto f \circ b_i$ et bijective.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f : T_1 \to T_2$ telle que $f \circ b_1 = b_2$, et une unique application linéaire $g : T_2 \to T_1$ telle que $g \circ b_1 = b_2$.

2. Montrer que $f \circ g = \mathrm{Id}_{T_2}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{T_1}$.

Exercice 8 — Soit E un espace vectoriel et $n > 0$ un entier. Pour tout espace vectoriel F, on note $n\text{–}\mathrm{Lin}(E; F)$ l'espace des applications n-linéaires de $E \times \cdots \times E$ dans F. Donner un isomorphisme entre $n\text{–}\mathrm{Lin}(E; F)$ et $L(\bigotimes_n E, F)$ (où $\bigotimes_n E$ est le produit tensoriel de E avec lui-même n fois).