ÉNS de Lyon — Algèbre 1
2020-2021 — L3

TD4 : Formes bilinéaires

On fixe un corps k. Tous les espaces vectoriels considérés sont sur k, et de dimension finie. On rappelle que si $\phi : E \times F \to k$ est une forme bilinéaire, on peut lui associer deux applications linéaires :
— $L_\phi : E \to F^*, x \mapsto (y \mapsto \phi(x,y))$;
— $R_\phi : F \to E^*, y \mapsto (x \mapsto \phi(x,y))$.

Exercice 1 — Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(k) \times \mathcal{M}_2(k) \to k$ définie par
$$\varphi(A,B) = \det(A+B) - \det(A-B)$$
est bilinéaire et calculer sa matrice dans la base canonique.

Exercice 2 — Soit $E = k^2$ et soit φ la forme bilinéaire sur E définie par $\varphi(x,y) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$.

1. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B} = ((1,0),(1,1))$.

2. Déterminer la matrice A' de φ dans la base $\mathcal{B}' = ((2,1),(1,-1))$.

3. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et vérifier que $A' = {}^tPAP$.

Exercice 3 — Soit $\phi \in \mathrm{Bil}(E,F)$. On note $E' = E/\ker L_\phi$ et $F' = F/\ker R_\phi$, et π_E et π_F les projections canoniques.

1. Démontrer qu'il existe un unique $\phi' \in \mathrm{Bil}(E',F')$ tel que pour tous $(x,y) \in E \times F$, on a $\phi(x,y) = \phi'(\pi_E(x), \pi_F(y))$.

2. Montrer ϕ' est non dégénérée et que $\dim E' = \dim F'$.

Exercice 4 — Soit E un k-espace vectoriel et $\phi : E \times E \to k$ une forme bilinéaire symétrique.

1. Si F_1, F_2 sont des sous-espaces de E, montrer $(F_1+F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$.

2. Si de plus ϕ est non-dégénérée, montrer $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$.

Exercice 5 — Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de taille $n \times n$. Considérons l'application $\mathcal{L} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\mathcal{L}(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAMB)$.

1. Vérifier que $\mathcal{L}$ est une application bilinéaire.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice M pour que $\mathcal{L}$ soit symétrique.

Exercice 6 — Soient E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ l'application

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\to \mathbb{C} \\ (A, B) &\mapsto n \operatorname{Tr}(AB) - \operatorname{Tr}(A) \operatorname{Tr}(B). \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire sur E.

2. Soit $U \subset E$ le sous-espace des matrices de trace nulle. Montrer que φ est dégénérée, mais que $\varphi_{|U}$ est non-dégénérée.

3. Soit $V \subset E$ le sous-espace des matrices A telles que $\operatorname{Tr}(A) = 0$ et ${}^t\overline{A} = -A$. Montrer que $\varphi_{|V}$ est définie négative, i.e. pour tout $A \in V \setminus \{0\}$, $\varphi(A, A) < 0$.

4. Calculer $E^{\perp}$ et déterminer sa dimension.

Exercice 7 —

1. Soient E et F des k-espaces vectoriels. Soient $u, v \in \operatorname{Hom}(E, F)$. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in k$ tel que $u(x) = \lambda_x v(x)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in k$ tel que $u = \lambda v$.

2. Soit $\varphi : E^2 \to k$ une forme bilinéaire. On suppose que pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = 0$ implique $\varphi(y, x) = 0$.

a. Pour $x \in E$, on définit $f_x : E \to k$ et $g_x : E \to k$ par $f_x(y) = \varphi(x, y)$ et $g_x(y) = \varphi(y, x)$, pour $y \in E$. Soient $f : E \to E^*$ et $g : E \to E^*$ définies par $f(x) = f_x$ et $g(x) = g_x$ pour $x \in E$. Montrer qu'il existe $\lambda \in k$ tel que $f = \lambda g$.

b. Que peut-on dire de φ ?

3. Soit $\varphi : E^2 \to F$ une application bilinéaire telle que $\varphi(x, y)$ est colinéaire à $\varphi(y, x)$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que φ est symétrique ou antisymétrique.