TD7 : Groupes - Le début

Exercice 1 — Décrire (à isomorphisme près) tous les groupes d'ordre $2, 3, 4, 5$.

Exercice 2 — Soit G un groupe. On suppose que G est **monogène**, c'est-à-dire qu'il existe $x \in G$ tel que $G = \langle x \rangle = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que G est soit isomorphe à $\mathbb{Z}$, soit isomorphe à un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 — Soit G un groupe.

1. Soit S une partie non vide de G. Décrire explicitement les éléments de $\langle S \rangle$, le sous-groupe engendré par S dans G.

2. Soit H un sous-groupe strict de G. Montrer que $\langle G \setminus H \rangle = G$.

Exercice 4 — Soient G et G' des groupes et $\phi : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1. Soient H (resp. H') un sous-groupe de G (resp. G'). Montrer que $\phi(H)$ (resp. $\phi^{-1}(H')$) est un sous-groupe de G' (resp. G).

2. Montrer que si H' est un sous-groupe distingué de G', alors $\phi^{-1}(H')$ est un sous-groupe distingué de G.

3. Si H est un sous-groupe distingué de G, est-ce que $\phi(H)$ est distingué dans G' ? Si non donner une condition suffisante sur ϕ pour que la réponse soit oui.

4. Soit H un sous-groupe distingué de G et K un sous-groupe distingué de H. Est-ce que K est distingué dans G ?

5. Un sous-groupe K de H est dit caractéristique lorsque pour tout automorphisme ϕ de H on a $\phi(K) = K$. Montrer que si dans la question précédente, K est caractéristique dans H, alors K est distingué dans G.

Exercice 5 — Soit G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et K un sous-groupe de G. Notons $\pi : G \to G/H$ la projection naturelle. À quelle condition la restriction de π à K est-elle injective ? surjective ?

Exercice 6 — Soit G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice 2. Montrer que H est distingué dans G. Montrer que le résultat n'est pas vrai si on remplace 2 par 3.

Exercice 7 — Soient G un groupe et $D(G)$ son groupe dérivé ($D(G)$ est le sous-groupe engendré par les commutateurs $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x, y \in G$).

1. Montrer que $D(G)$ est distingué dans G.

2. Soit H un sous-groupe distingué de G. Montrer que G/H est abélien si et seulement si $H \supset D(G)$.

3. Montrer que $G/D(G)$ est le plus grand quotient abélien de G, au sens où si K est un quotient abélien de G, alors K est un quotient de $G/D(G)$.

Exercice 8 — Soient G un groupe, H et K des sous-groupes de G. On suppose que H est distingué dans G.

1. Montrer que le sous-groupe $\langle H, K\rangle$ engendré par H et K est $HK = \{hk \mid (h,k) \in H \times K\}$.

2. Montrer que l'application $H \times K \to HK$ induite par la multiplication $(h,k) \mapsto hk$ est une bijection si, et seulement si, $H \cap K = \{1\}$.

On suppose donc que $H \cap K = \{1\}$, ce qui permet d'identifier les ensembles HK et $H \times K$ munissant ainsi $H \times K$ d'une structure de groupe.

3. Montrer que la loi de groupe de $H \times K$ est donnée par $(h,k)\cdot(h',k') = (hh', h'^{-1}kh'k')$, pour tout $(h,k),(h',k') \in H \times K$. À quelle condition sur H et K cette structure coïncide-t-elle avec la structure usuelle de groupe sur $H \times K$?

Exercice 9 — Soit G un groupe abélien simple non trivial. Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour un certain nombre premier p.

Exercice 10 —[Groupes diédraux] Soit $n \geq 3$. On note D_n le groupe des isométries du plan qui préservent le n-gone régulier du plan complexe dont les sommets sont les racines n-ièmes de l'unité. On note r la rotation d'angle $2\pi/n$, et s la symétrie par rapport à la droite réelle.

1. Montrer qu'un élément de D_n est soit une rotation, qui est alors de la forme r^k pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, soit une symétrie axiale, qui est alors de la forme sr^k pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. En déduire que D_n est d'ordre $2n$. Montrer qu'on a $sr^k s = r^{-k}$.

2. Montrer que D_n s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que D_3 est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

3. Décrire les classes de conjugaison de D_n.

Remarque : On trouve parfois la notation D_{2n} pour le groupe appelé ici D_n.

Exercice 11 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$, k un corps commutatif tel que $|k| \geqslant 3$ et $G = \mathrm{GL}_n(k)$. Soit $D \subset G$ le sous-groupe des matrices diagonales. Déterminer le normalisateur $N_G(D) = \{x \in G \mid \forall d \in D, xdx^{-1} \in D\}$ de D dans G.
Indication : pour $g = (g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in N_G(D)$, en considérant différents $d \in D$, on pourra montrer que l'ensemble $\{j \in [\![1,n]\!],\ g_{i,j} \neq 0\}$ est réduit à un élément $\sigma_g(i)$ et que l'application $i \mapsto \sigma_g(i)$ est une permutation de $[\![1,n]\!]$.