ÉNS de Lyon | Algèbre 1
2020-2021 | L3

TD8 : Groupes quotients, Groupes résolubles
Actions de groupes

Exercice 1 — Soit G un groupe. On rappelle qu'on peut définir une action de G sur l'ensemble des sous-groupes de G par $g \cdot H = gHg^{-1}$.

1. Quel est le stabilisateur d'un sous-groupe de G pour cette action ?

2. Montrer que si H et K sont deux-sous groupes de G conjugués dans G, alors $\mathcal{N}_G(H)$ et $\mathcal{N}_G(K)$ aussi.

3. On suppose que G est fini. Montrer que le nombre de sous-groupes de G conjugués à H est l'indice de $\mathcal{N}_G(H)$ dans G.

Exercice 2 — Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini E.

1. On suppose que G agit sans point fixe, et que $\text{Card}(G) = 15$ et $\text{Card}(E) = 17$. Déterminer le nombre d'orbites et la longueur de chacune.

2. Montrer que si $\text{Card}(G) = 33$ et $\text{Card}(E) = 19$, alors G fixe un point.

Exercice 3 —[Groupes résolubles] Soit G un groupe fini.

1. On note $\mathcal{D}_0(G) = G$ et $\mathcal{D}_{n+1}(G) = \mathcal{D}(\mathcal{D}_n(G))$. Montrer que G est résoluble si, et seulement si, il existe n tel que $\mathcal{D}_n(G)$ est trivial.

2. Soient G' un groupe et $\pi : G \to G'$ un morphisme de groupe surjectif. Montrer que $\pi(\mathcal{D}(G)) = \mathcal{D}(G')$.

3. Soit H un sous-groupe distingué de G. Montrer que G est résoluble si, et seulement si, H et G/H le sont.

Exercice 4 —[Formule de Burnside et applications] Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Pour tout $g \in G$, on note $f(g)$ le nombre de points fixes de g dans X, et N le nombre d'orbites de l'action.

1. Soit $Y = \{(g, x) \in G \times X,\ g \cdot x = x\}$. Interpréter $\text{Card}(Y)$ comme somme sur les éléments, d'une part de X et, d'autre part de G.

2. En décomposant X en union d'orbites, montrer la formule de Burnside :

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g).$$

3. On suppose que G agit transitivement sur X et que X contient au moins 2 éléments. Montrer qu'il existe un $g \in G$ agissant sans point fixe.

4. En déduire qu'un groupe fini n'est jamais l'union des conjugués d'un sous-groupe strict.

Exercice 5 — Soit G un groupe fini d'ordre n et p le plus petit facteur premier de n. On suppose que G admet un sous-groupe K d'indice p.

1. Montrer qu'on définit bien une action de G sur $X = G/K$ en posant $g \cdot hK = (gh)K$.

2. Soit N le noyau de cette action. Montrer que c'est un sous-groupe dont l'indice divise $p!$ d'une part, et divise $|G|$ d'autre part.

3. Montrer que N est en fait égal à K et en déduire que K est distingué dans G.

4. Soit G un groupe d'ordre pq avec $p < q$ deux nombres premiers. On admet [1] que G admet un élément d'ordre q. Montrer que G est résoluble.

Exercice 6 —[Existence du birapport] Soit K un corps. On fait agir $\mathrm{PGL}_2(K)$ sur $\mathbb{P}^1(K)$ l'ensemble des droites vectorielles de K^2.

1. Montrer que cette action est exactement 3-transitive, c'est-à-dire que pour tous triplets (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) d'éléments deux à deux distincts de $\mathbb{P}^1(K)$, il existe un unique $g \in \mathrm{PGL}_2(K)$ tel que pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on a $g \cdot x_i = y_i$.

2. Soit (e_1, e_2) la base canonique de K^2. On identifie K à un sous-ensemble de $\mathbb{P}^1(K)$ via $\lambda \mapsto K(e_1 + \lambda e_2)$. Montrer que $\mathbb{P}^1(K) \setminus K$ est le singleton Ke_2 qu'on note ∞.

3. Soient y_1, y_2, y_3, y_4 quatre éléments de $\mathbb{P}^1(K)$ deux à deux distincts. Justifier qu'il existe un unique élément g de $\mathrm{PGL}_2(K)$ tel que $g \cdot y_1 = 0$, $g \cdot y_2 = 1$, et $g \cdot y_3 = \infty$ et que $g \cdot y_4 \in K$. On l'appelle le birapport de (y_1, y_2, y_3, y_4). Vérifier que si y_1, y_2, y_3, y_4 sont dans K, alors $g \cdot y_4 = \frac{\frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_3}}{\frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_3}}$.

Exercice 7 — Soit $\mathbb{F}_q$ un corps de cardinal fini à q éléments et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{F}_q^n$.

1. Déterminer le cardinal des groupes finis $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$. *Indication : compter les bases de $\mathbb{F}_q^n$ et trouver des quotients pertinents.*

2. On prend désormais $n = 2$. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes injectif $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q) \to \mathfrak{S}_{q+1}$.

3. En déduire que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$.

4. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ et que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$.

Indication : on pourra utiliser le fait que si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{A}_n$ est le seul sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$.

1. C'est le théorème de Cauchy que vous verrez la semaine prochaine.