TD 9 : p-groupes ; groupe symétrique

Exercice 1 — Soit G un groupe, et H un sous-groupe de G contenu dans $Z(G)$.

1. Montrer que H est distingué dans G.

2. On suppose G/H monogène. Montrer que G est abélien.

3. Soit p un nombre premier, et G un groupe d'ordre p^2. Montrer que G est abélien.

Exercice 2 — Soit p premier, et G un groupe d'ordre p^n. Montrer que pour tout $d \leq n$, G admet un sous-groupe distingué d'ordre p^d.

Exercice 3 — Soit $n \geq 5$ un entier. Soit H un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que H est égal à $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$, ou au sous-groupe trivial (on pourra considérer $H \cap \mathfrak{A}_n$).

Exercice 4 —

1. Déterminer tous les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_3$, de $\mathfrak{S}_4$, et de $\mathfrak{A}_4$. On observera en particulier que $\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

2. Soit $u : \mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ un morphisme de groupes surjectif. Déterminer son noyau.

Exercice 5 — Calculer $D(\mathfrak{S}_n)$ et $D(\mathfrak{A}_n)$.

Exercice 6 —

1. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par l'ensemble $\{(12), (12 \dots n)\}$.

2. Soit T une famille de transpositions qui engendre $\mathfrak{S}_n$. Montrer que T est de cardinal au moins $n - 1$.

Exercice 7 — (Théorème de Sylow par la méthode de Wielandt) — Soit G un groupe fini d'ordre n, et p premier. On écrit $n = p^a m$ avec m premier à p. Soit X l'ensemble des parties de G à p^a éléments. G agit sur X par translation à gauche.

1. Montrer que pour tout $E \in X$, $\mathrm{Stab}_G(E)$ est d'ordre $\leq p^a$.

2. Montrer que p ne divise pas le cardinal de X. En déduire qu'il existe $E \in X$ tel que p^a divise l'ordre de $\mathrm{Stab}_G(E)$.

3. En déduire qu'il existe un sous-groupe de G d'ordre p^a (un tel groupe s'appelle un p-sous-groupe de Sylow, ou simplement un p-Sylow).

Exercice 8 — (Conjugaison des sous-groupes de Sylow) — On reprend les notations de l'exerice précédent, et on fixe S un p-sous-groupe de Sylow de G. Soit $H \subset G$ un sous-groupe qui est un p-groupe.

1. On fait agir H par translation à gauche sur G/S. Montrer que le stabilisateur de aS est $H \cap aSa^{-1}$.

2. En déduire qu'il existe a tel que $H \cap aSa^{-1} = H$, et donc $H \subset aSa^{-1}$.

3. Montrer que tous les p-Sylow de G sont conjugués entre eux. En déduire que le nombre de p-Sylow de G divise l'ordre de G.

Exercice 9 — Déterminer tous les 2-Sylow et 3-Sylow de $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 10 — Soit $n \geq 1$. Un sous-groupe T de $\mathfrak{S}_n$ est dit *transitif* si son action sur $\{1, 2, ..., n\}$ est transitive.

1. Montrer que n divise l'ordre de tout sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_n$.

2. Que dire des sous-groupes transitifs de $\mathfrak{S}_p$ pour p premier ?

3. On note H le sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ engendré par $(1\ 2\ 3\ 4)$ et $(1\ 3)$. Montrer que $H \cong D_4$.

4. Déterminer les sous-groupes de H qui sont transitifs.

5. Soit T un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_4$ dont l'ordre divise 8. Montrer qu'il est conjugué à l'un de ceux déterminés à la question 4.

6. Déterminer, à conjugaison près, tous les sous-groupes transitifs de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 11 — (Classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$) —

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, je note $C_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ sa classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$, et je note $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = \{\tau \in \mathfrak{S}_n, \sigma\tau = \tau\sigma\}$. Si $\sigma \in \mathfrak{A}_n$, je note $C_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$ sa classe de conjugaison dans $\mathfrak{A}_n$.

1. Montrer que si $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ alors $C_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) \subset \mathfrak{A}_n$.

2. Soit $\sigma \in \mathfrak{A}_n$.

a. Montrer que si $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{A}_n$, on a $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = \mathcal{C}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$.

b. Montrer que si $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ est contenu dans $\mathfrak{A}_n$, $\mathcal{C}_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ est l'union disjointe de $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}_n}(\sigma)$ et de $\mathcal{C}_{\mathfrak{A}_n}((12)\sigma(12))$.

3. Donner la décomposition de $\mathfrak{A}_4$ en classes de conjugaison.