Dénombrements

Exercice 1 (Préliminaire) Soit Ω un ensemble et $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties de Ω, *i.e.* $F_n \subset \Omega$ pour tout $n \geq 1$. Construire des parties $G_n \subset \Omega$ telles que

a) $\bigcup_{n\geq 0} F_n = \bigcup_{n\geq 0} G_n$

b) Pour tout entiers $n \neq k$, on a $G_n \cap G_k = \emptyset$.

Exercice 2 (Réunions dénombrables) Soit Ω un ensemble et soit $(F_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties finies de Ω.

a) Montrer que $\bigcup_{n\geq 0} F_n$ est dénombrable (on pourra se servir de l'exercice précédent).

b) Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathbb{Q}_n := \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : -n \leq p \leq n,\ 0 < q \leq n\}$. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

c) Soit $k \geq 1$. Montrer que $\mathbb{N}^k$ est dénombrable. On pourra par exemple considérer $F_m = \{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k : \sum_{1\leq i\leq k} n_i \leq m\}$.

d) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ensembles dénombrables, et pour tout entier $n \geq 1$, F_n l'ensemble formé par les n premiers éléments de $A_1, \ldots, A_n$. Montrer que

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} F_n \quad \text{est dénombrable.}$$

Exercice 3 Soient E et F des ensembles.

a) Montrer que si E est dénombrable, et si $f : E \to F$ est une injection, alors F n'est pas dénombrable.

b) Montrer que si E est dénombrable, et si $f : E \to F$ est une surjection, alors F est dénombrable.

Exercice 4 Soit $f : (n, m) \mapsto 2^n(2m + 1) - 1$. Montrer que $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est bijective. En déduire une autre démonstration du fait qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 5 (Théorème de Cantor) On veut montrer que $[0, 1]$ n'est pas dénombrable. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $[0, 1]$. On va montrer qu'il existe au moins un élément $x \in [0, 1]$ tel que pour tout entier $n \geq 1$, $a_n \neq x$.

a) Justifier que parmi les intervalles $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, et $[2/3, 1]$ au moins un intervalle ne contient pas a_1. Appelons le I_1.

b) On découpe I_1 à nouveau en trois intervalles de longueur $1/9$. Justifier qu'au moins un de ces intervalles ne contient pas a_2. Appelons-le I_2.

c) Construire par récurrence une suite de segments $(I_n)_{n\geq 1}$ telle que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} \subset I_n$, $|I_n| = \frac{1}{3^n}$ et $a_n \notin I_n$. Faire un dessin.

d) Montrer que $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ est un singleton. Conclure.

Exercice 6 (Argument diagonal de Cantor) Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $[0,1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on écrit $a_n = 0, c_{n,1}c_{n,2}\dots$ le développement décimal de a_n, avec la convention que $c_{n,k} = 9$ à partir d'un certain rang si a_n a un développement décimal fini. Pour tout $n \geq 1$, on pose $d_n = c_{n,n} + 1$ si $c_{n,n} \neq 9$ et $b_n = 8$ si $c_{n,n} = 9$. Que dire du réel $x = 0, b_1 b_2 \dots$? Conclure.

Exercice 7 (Un autre théorème de Cantor) Pour un ensemble E quelconque on définit $\mathcal{P}(E) := \{A : A \subset E\}$.

a) Montrer que si $|E| = n$, alors $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.

b) Montrer, pour un ensemble E quelconque, que $\mathcal{P}(E)$ est "strictement plus grand" que E dans le sens qu'il n'y a pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$ (Indication : supposer par l'absurde l'existence d'une telle bijection ϕ et considérer $F = \{x \in E : x \notin \phi(x)\}$).

c) Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ des parties *finies* de $\mathbb{N}$ est un ensemble dénombrable. En déduire une autre démonstration du fait que $[0,1]$ n'est pas dénombrable (Indication : déterminer une bijection entre $[0,1]$ et l'ensemble des parties *infinies* de $\mathbb{N}$).

Tribus

Exercice 8 Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer toutes les tribus sur Ω.

Exercice 9 Soit Ω un ensemble. Si A et B sont deux parties de Ω, on définit leur *différence symétrique* par $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

a) Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par différence symétrique.

b) Montrer que $\mathcal{P}(\Omega)$, muni de l'opération Δ, forme un groupe.

c) Montrer qu'une tribu sur Ω est un sous-groupe de $\mathcal{P}(\Omega)$. En déduire que, sur un ensemble fini, une tribu a toujours pour cardinal une puissance de 2.

Exercice 10 Soit Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. On pose

$$\mathcal{T}_x = \{T \in \mathcal{T} : x \in T\} \quad \text{et} \quad P(x) = \bigcap_{T \in \mathcal{T}_x} T$$

a) Montrer que $x \in P(y)$ implique $P(x) \subset P(y)$.

b) Soit $x \in P(y)$. Montrer par l'absurde que $y \in P(x)$. Déduire $P(x) = P(y)$.

c) Soit $\mathcal{P} = \{P(x) : \ x \in \Omega\}$. Montrer que $\mathcal{P}$ est une partition de Ω.

Exercice 11 Montrer que les ensembles suivants sont des éléments de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$.

$$A = [0,1[, \quad B = \{1,2\}, \quad C = \mathbb{Q}, \quad D = [0,1],$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} : \ x \text{ est (négatif et rationnel) ou (positif et irrationnel)}\}.$$

Exercice 12 Soit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de $\mathcal{A} = \{B \cap \mathbb{Q} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$?

Exercice 13 On considère $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties $A \subset \mathbb{R}^d$ qui sont dénombrables ou dont le complémentaire $\mathbb{R}^d \setminus A$ est dénombrable.

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.

b) Montrer que $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu qui contient tous les singletons $\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}^d$.

Mesures

Exercice 14 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Montrer que si $A, B \in \mathcal{A}$ et $\mu(B) = 0$ alors $\mu(A \cup B) = \mu(A)$.

b) L'application définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ par $\nu(\{1\}) = 1$ et $\forall E \subset \mathbb{N}, \ \nu(E) = 0$ si $E \neq \{1\}$ est-elle une mesure ?

Exercice 15 (La mesure de Dirac) Sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$, on définit δ_a par :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \ \delta_a(A) = 1 \text{ si } a \in A \text{ et } \delta_a(A) = 0 \text{ si } a \notin A.$$

Montrer que δ_a est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 16 (La mesure de comptage) Soit Ω un ensemble muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. Si $E \subset \Omega$ on pose $\mu(E) = +\infty$ si E est infini et $\mu(E) = \text{card}(E)$ si E est fini. Montrer que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Exercice 17 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

a) Que peut-on dire d'une mesure constante sur $\mathcal{A}$?

b) Montrer que si μ et ν sont des mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et si $a \in \mathbb{R}^+$, $\mu + \nu$ et $a\mu$ sont des mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

c) Si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$, montrer qu'on peut définir une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$ par $\mu = \sum_{n\geq 0} \mu_n$.

Exercice 18 Soit μ une fonction sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, définie par $\mu(A) = \infty$ si A est infini et $\mu(A) = \sum_{k \in A} k^{-2}$ si A est fini. Montrer que μ est (finiment) additive, mais n'est pas une mesure. Même question avec μ définie par $\mu(A) = \infty$ si A est infini et $\mu(A) = \sum_{k \in A} k^{-1}$ si A est fini.

Exercice 19 Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu borélienne qui est invariante par translation (i.e. $\mu(x + A) = \mu(A)$, pour tout x) et telle que le cube standard $I = [0, 1[^n$ a pour volume $\mu(I) = 1$. Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_1 < b_1, \ldots, a_n < b_n$ et soit

$$Q := [a_1, b_1[\times \ldots \times [a_n, b_n[\subset \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad V := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

a) Supposons que pour $1 \leq i \leq n, a_i, b_i \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\mu(Q) = V$.

b) Supposons que pour $1 \leq i \leq n, a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Écrire $a_i = \frac{p_i}{q_i}$ et $b_i = \frac{r_i}{q_i}$, puis choisir $q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $q_i | q$ pour tout q. Montrer que $\mu(Q) = V$.

c) En déduire par un argument d'approximation rationnelle que $\mu(Q) = V$ quels que soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.

d) Supposons que $a_i = b_i$ pour au moins un i (et on conviendra que le facteur $[a_i, b_i[$ est $\{a_i\}$ dans la définition de Q). Utiliser la monotonie par rapport à l'inclusion pour montrer que $\mu(Q) = 0$.

e) En déduire que $\mu(Q) = V$ si le pavé Q est un produit d'intervalles ouverts, semi-ouverts ou fermés.

f) Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mu(\Omega) > 0$.

g) Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie mesurable, contenue dans un hyperplan affine H de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mu(A) = 0$. Indications :

   i) Commencer avec le cas que $H = \{a\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et que A est bornée : Montrer que pour $\varepsilon > 0$ il existe un pavé P contenant A de volume $\mu(P) \leq \varepsilon$.

   ii) Enlever l'hypothèse de bornitude de A.

   iii) Généraliser à un hyperplan H quelconque.

h) On considère le cas n=2 : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et

$$\text{graphe}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que $\mu(\text{graphe}(f)) = 0$.