## Tribus et Mesures (suite)

**Exercice 1**
Est-ce que la tribu de Borel est engendrée par les singletons ; les intervalles de la forme $]a, +\infty[$ ; les intervalles fermés ?

**Rappel :** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble $\Omega$. On pose

$$\limsup A_n = \bigcap_n \left( \bigcup_{k\geq n} A_k \right) \quad \text{et} \quad \liminf A_n = \bigcup_n \left( \bigcap_{k\geq n} A_k \right).$$

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels, comment sont définies $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$ ?

**Exercice 2**

1. Montrer que $x \in \limsup A_k$ si et seulement si $x \in A_k$ pour une infinité d'indices $k$ ; que $x \in \liminf A_k$ si et seulement si $x$ appartient à tous les $A_k$ sauf peut-être un nombre fini.
2. Soit $\Omega$ un ensemble et $(A_n)$ une suite de parties de $\Omega$. Déterminer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ dans les cas
   — $(A_n)$ est monotone (par rapport à l'ordre partiel d'inclusion)
   — $A_{2n} = B$ et $A_{2n+1} = C$ où $B,\ C$ sont deux parties de $\Omega$.
   — les $A_n$ sont deux à deux disjoints.
3. Dans la suite de l'exercice on suppose que l'on a un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ et que pour tout entier $n$, $A_n \in \mathcal{T}$. Justifier que $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ sont dans $\mathcal{T}$.
4. Montrer que $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n)$ ("propriété de Fatou").
5. On suppose de plus qu'il existe $B$ dans $\mathcal{T}$ tel que $\mu(B) < +\infty$ et pour tout entier $n$, $A_n \subset B$ (donner un exemple de mesure pour laquelle cette condition est toujours vérifiée). Montrer que $\limsup\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.
6. Montrer que si l'on suppose à la fois qu'il existe $B$ dans $\mathcal{T}$ tel que $\mu(B) < +\infty$ et pour tout entier $n$, $A_n \subset B$ et que la suite $(A_n)$ converge (c'est-à-dire $\liminf A_n = \limsup A_n := \lim A_n$) alors la suite $(\mu(A_n))_n$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim A_n)$.

**Exercice 3**
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\sum_{n\geq 0} \mu(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mu(\limsup A_n) = 0$. Qu'en déduit-on pour presque tout $x$ de $X$ ?

**Exercice 4** *Structure borélienne des points de continuité d'une fonction*
Soit $(X, d)$ un espace métrique et $f\ :\ X \to \mathbb{R}$ une application *quelconque*. On note $B(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$ et on définit l'*oscillation de $f$ en $x$*, notée $\omega(x)$, par

$$\omega(x) = \inf\{\omega(x, \delta)\ ;\ \delta > 0\} \quad \text{avec} \quad \omega(x, \delta) = \sup\{|f(t) - f(s)|\ ;\ s, t \in B(x, \delta)\}.$$

1. Montrer que $f$ est continue en $x$ si et seulement si $\omega(x) = 0$.
2. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $A_\epsilon = \{x \in X\ ;\ \omega(x) < \epsilon\}$ est un ouvert.
3. En déduire que l'ensemble des points de continuité de $f$ est un $G_\delta$ (c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts). En particulier c'est un borélien.

## Mesure de Lebesgue

**Exercice 5**
Soit $N$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle, montrer que $\mathbb{R} \setminus N$ est dense dans $\mathbb{R}$ (ind. que peut-on dire de $]a, b[\cap(\mathbb{R} \setminus N)$ ?). Que pensez-vous de la réciproque ?

**Exercice 6**
Soit $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de boréliens de $\mathbb{R}$. D'après le cours, si $\lambda(A_0)$ est fini, alors $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$. Peut-on se passer de cette hypothèse de finitude ?

**Exercice 7** *Un ensemble non dénombrable de mesure de Lebesgue nulle*

1. Soit $A$ un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$, que vaut sa mesure de Lebesgue ? En déduire une nouvelle preuve de la non dénombrabilité de $[0, 1]$.
2. On considère $C_0 = [0, 1]$ puis on construit par récurrence $C_{n+1}$ en enlevant de chaque composante connexe de $C_n$ l'intérieur de son tiers central. Ainsi $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, représenter $C_2$ et $C_3$.
3. Montrer que l'ensemble de Cantor $C = \cap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est un borélien de mesure de Lebesgue nulle.
4. L'écriture en base 3 ($x = 0, x_1x_2x_3 \ldots$) met en bijection l'intervalle $[0, 1[$ et l'ensemble des suites $(x_n) \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ ne convergeant pas vers 2. Montrer que $C$ contient l'ensemble des points de $[0, 1[$ dont l'écriture en base 3 ne comporte pas le chiffre 1.
5. Trouver une surjection de $C$ vers $[0, 1]$ (penser à l'écriture en base 2). En déduire que $C$ n'est pas dénombrable.
6. On admet que la tribu de Borel de $\mathbb{R}$ peut être mise en bijection avec $[0, 1]$ (on dit qu'elle a la *puissance du continu*), en utilisant un résultat de la feuille précédente déduire de ce qui précède qu'il existe des sous-ensembles de $C$ qui ne sont pas boréliens.

**Exercice 8**
Construire un fermé $A$ de $[0, 1]$, de mesure de Lebesgue strictement positive et ne rencontrant pas $\mathbb{Q}$. Peut-on faire la même chose si l'on demande à $A$ d'être ouvert ?

**Exercice 9** *Construction d'un ensemble non Lebesgue-mesurable*
On partitionne $[0, 1]$ par ses classes d'équivalence modulo $\mathbb{Q}$. L'axiome du choix assure l'existence d'un ensemble $A \subset [0, 1]$ qui contient exactement un représentant de chaque classe. On va montrer, par l'absurde, que $A$ n'est pas mesurable au sens de Lebesgue (exemple de Vitali, 1905). Supposons donc $A$ mesurable, on note $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $r \in \mathbb{Q}\cap[-1, 1]$, justifier que $r+A = \{r+a,\ a \in A\}$ est mesurable et $\lambda(r+A) = \lambda(A)$.
2. Montrer que
$$[0, 1] \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (r + A) \subset [-1, 2]$$
3. Si $\lambda(A) = 0$ prouver que $\lambda\left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (r + A)\right) = 0$. En déduire une contradiction.
4. Montrer que si $r$ et $s$ sont deux rationnels distincts alors $(r+A)\cap(s+A) = \emptyset$. En déduire à nouveau une contradiction si l'on suppose $\lambda(A) > 0$.

## Fonctions mesurables

**Exercice 10**

1. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur un ensemble $X$, montrer que $A$ est un élément de $\mathcal{T}$ si et seulement si l'application $\mathbb{1}_A$ est mesurable de $(X, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
2. Toute fonction continue de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable (en rappeler la preuve). Donner un exemple de fonction mesurable qui n'est pas continue.

**Exercice 11**

D'après le cours, si $f$ est une application mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors $|f|$ est mesurable. Qu'en est-il de la réciproque ?

**Exercice 12**

Soit $f$ une fonction définie sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, à valeurs réelles. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens, montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $f$ est mesurable.
2. Pour tout intervalle fermé $[a, b]$, l'ensemble $f^{-1}([a, b])$ est mesurable.
3. Pour tout intervalle ouvert $]a, b[$, l'ensemble $f^{-1}(]a, b[)$ est mesurable.
4. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(]a, +\infty[)$ est mesurable.
5. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}([a, +\infty[)$ est mesurable.
6. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(]-\infty, a[)$ est mesurable.
7. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(]-\infty, a])$ est mesurable.

**Exercice 13**

Soit $f \ (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \text{si} \quad f(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x) = 0 \end{cases}$$

Montrer que $g$ est mesurable. Indication : étudier d'abord le cas $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 14**

Soit $X$ un ensemble. Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur $Y$ et $f$ une application de $X$ dans $Y$.

1. Quelle est la plus petite tribu $\mathcal{A}$ sur $X$ qui rende l'application $f$ mesurable de $(X, \mathcal{A})$ sur $(Y, \mathcal{T})$ ?
2. On suppose que l'image de $f$ et les singletons de $Y$ sont des éléments de $\mathcal{T}$. Montrer que toute application $g\colon (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{T})$ mesurable s'écrit $g = h \circ f$, où

   $$h\colon (Y, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T})$$

   est une application mesurable.
3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
   (a) Montrer que la plus petite tribu $\mathcal{A}$ qui rende $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable est

   $$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) / A = -A\}.$$

   (b) Déterminer alors l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

**Exercice 15**

1. Montrer que toute fonction monotone de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable (indication : que pensez-vous de l'image réciproque d'un intervalle ?).
2. Montrer que si $f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point alors $f'$ est mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (indication : $f'$ est-elle la limite d'une suite de fonctions mesurables ?)

**Exercice 16**
Soit $\mathcal{A}$ une tribu engendrée par une partition $(A_n)_{n\geq 0}$ dénombrable d'un ensemble quelconque non vide $X$. Montrer qu'une application de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si elle est constante sur chaque $A_n$. (indication : on pourra commencer par montrer que

$$\mathcal{A} = \{\bigcup_{j\in J} A_j,\ J \subset \mathbb{N}\}).$$

**Exercice 17**

1. Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue $\lambda$-presque partout (c'est-à-dire continue sauf sur un ensemble de mesure nulle pour $\lambda$). L'espace $\mathbb{R}$ *de départ* est muni de la tribu de Lebesgue, l'espace $\mathbb{R}$ *d'arrivée* est muni de la tribu de Borel.
   — On considère $O$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et on note $A = f^{-1}(O)$, montrer que les points de $A \setminus \mathring{A}$ sont des points de discontinuité de $f$.
   — En déduire que $f$ est mesurable.
2. Une fonction continue presque partout est-elle la même chose qu'une fonction égale presque partout à une fonction continue ?
3. Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ montrer que si elles sont égales $\lambda$-presque partout alors elles sont égales.

**Exercice 18**
Soit $f\ : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+}))$ une application mesurable. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_k^n := f^{-1}\left(\left[\tfrac{k-1}{2^n}, \tfrac{k}{2^n}\right[\right) \quad k = 1, \ldots,\ n2^n \quad \text{et} \quad F_n := f^{-1}([n, +\infty]),$$

puis

$$f_n := n\,\mathbb{1}_{F_n} + \sum_{k=1}^{n2^n} \tfrac{k-1}{2^n}\,\mathbb{1}_{E_k^n}.$$

1. Pour $f(x) = |x|$, expliciter $f_1$ et $f_2$.
2. Montrer dans le cas général que $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq f_3 \leq \ldots \leq f$.
3. Montrer que $\lim_n f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.
4. Montrer que la convergence est même uniforme si $f$ est supposée bornée.

**Exercice 19**
Soit $X = \mathbb{Z}$ et $A_1 = \{2n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ ; $A_2 = 2\mathbb{Z} + 1 = \{2n + 1, m \in \mathbb{Z}\}$ ; $\mathcal{F} = \{A_1, A_2\}$.

1. Trouver $\sigma(\mathcal{F})$ la tribu sur $X$ engendrée par $\mathcal{F}$.

2. Les fonctions suivantes sont-elles mesurables de $(X, \sigma(\mathcal{F}))$ dans $(X, \sigma(\mathcal{F}))$ ? de $(X, \sigma(\mathcal{F}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ?
   (a)$f_1(x) = x^2$; (b) $f_2(x) = x + 1$; (c) $f_3(x) = 4$; (d) $f_4(x) = 2x$; (e) $f_5(x) = |x|$.

3. Décrire les fonctions en escalier mesurables de $(X, \sigma(\mathcal{F}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ puis les fonctions mesurables de $(X, \sigma(\mathcal{F}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.