Exercice 1 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Soit $\mu = \delta_a$ la masse de Dirac au point $a \in X$ et soit $f \geqslant 0$ une fonction mesurable. Montrer que
$$\int_X f d\mu = f(a).$$
2. Soit $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et μ la mesure de dénombrement.
   (a) Quelles sont les fonction mesurables $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$?
   (b) Soit $f \geqslant 0$. Exprimer $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$ en fonction de $f(0), f(1), \ldots$

Exercice 2 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\phi : \Omega \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. On définit pour tout $A \in \mathcal{T}$,
$$\nu(A) = \int_A \phi \, d\mu.$$
1) Montrer que ν est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
2) Sous quelle condition sur ϕ, ν est-elle une mesure de probabilité ?
3) Vérifier que tout ensemble μ-négligeable est ν-négligeable.
4) Soit $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Exprimer $\int_\Omega f \, d\nu$ en fonction d'une intégrale relativement à μ (indication : commencer par les fonctions en escalier).

Exercice 3 Soit (E, τ, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge presque partout vers une fonction f. On suppose que
$$\int_E f_0 d\mu < +\infty.$$
Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu < +\infty \tag{1}$$

1. Avec le théorème de convergence monotone,
2. Avec le théorème de convergence dominée.

Finalement, montrer que l'hypothèse $\int_E f_0 d\mu < +\infty$ est nécessaire pour avoir (1).

Exercice 4 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\mu(X) < \infty$ et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$\begin{aligned} A_n &= \{x \in X : |f(x)| \geqslant n\}, \\ B_n &= \{x \in X : n < |f(x)| \leqslant n+1\}, \\ C_n &= \{x \in X : n \leq |f(x)| < n+1\}. \end{aligned}$$
Montrer que
$$\int |f| d\mu < \infty \iff \sum_{n \geqslant 0} n\mu(B_n) < \infty \iff \sum_{n \geqslant 0} n\mu(C_n) < \infty \iff \sum_{n \geqslant 0} \mu(A_n) < \infty.$$
Soit $p > 0$. Montrer que
$$\begin{aligned} \int |f|^p d\mu < \infty &\iff \sum_{n \geqslant 0} (1+n)^p \mu(B_n) < \infty \iff \sum_{n \geqslant 0} (1+n)^p \mu(C_n) < \infty \\ &\iff \sum_{n \geqslant 0} (1+n)^{p-1} \mu(A_n) < \infty. \end{aligned}$$

Exercice 5 Pour tout entier naturel n et tout nombre réel x, on définit
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}(1-x).$$

1. Déterminer l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante de nombres réels. Déterminer la limite de cette suite.
2. Démontrer que
$$\sum_{k\geqslant 0} \int_0^1 x^{2k}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$
3. En déduire que
$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2).$$
4. De la même façon, considérer $g_k(x) = (-1)^k x^{2k}(1-x)$ pour déterminer la valeur de la somme
$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+2)}.$$

Exercice 6 Soit $f_n : (X, \mathcal{T}) \to ([0,+\infty], \mathcal{B})$ une suite de fonctions mesurables ($n \geqslant 1$). On pose :
$$f(x) = \sum_{n\geqslant 1} f_n(x) \qquad (x \in X).$$
Montrer que $\int_X f d\mu = \sum_{n\geqslant 1} \int_X f_n d\mu$. En déduire que, si $a_{ij} \geq 0$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}^*$ alors
$$\sum_{i\geqslant 1}\sum_{j\geqslant 1} a_{ij} = \sum_{j\geqslant 1}\sum_{i\geqslant 1} a_{ij}.$$

Exercice 7 Soit $f(t) = \frac{\ln(t)}{t-1}$ pour $t \in]0,1[$, montrer que $f(t) = \sum_{n\geqslant 0} -t^n \ln(t)$. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} n^{-2}$ converge puis en déduire que f est intégrable sur $]0,1[$ et
$$\int_{]0,1[} f(t)\, dt = \sum_{n\geqslant 1} \tfrac{1}{n^2}.$$
Il n'est pas demandé d'évaluer cette série.

Exercice 8 Soit $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ intégrable. Déterminer $\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} f(t)\, dt$. En déduire que si f est intégrable, positive et décroissante, alors $\lim_{x\to\infty} x f(x) = 0$.

Exercice 9 Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction : $g_n(x) = \mathbb{1}_{[0,n[}(x^2)(1-\frac{x^2}{n})^n$.

1. Déterminer l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ existe.
2. Déterminer la limite $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$ pour tout $x \in D$.
3. Trouver un majorant intégrable $g(x) \geqslant g_n(x)$ pour tout x, déduire
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n(x)dx.$$
(on pourra utiliser $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$ sans le démontrer).

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

1. Vérifier que pour tout entier n, $u \mapsto \dfrac{f(u/n)}{1+u^2}$ est intégrable et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \dfrac{f(u/n)}{1+u^2}\, du$.
2. Si $f(0) \neq 0$ donner un équivalent de $I_n = \int_{\mathbb{R}} \dfrac{f(x)}{1+n^2x^2}\, dx$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice* 11 Soit $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. Existe-t-il une majoration intégrable pour les fonctions suivantes ? Si oui trouver la limite des intégrales $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$.

$$f_n = \sqrt{n}\,\mathbb{1}_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}, \quad g_n = \frac{n}{\log n}\,\mathbb{1}_{[\frac{1}{(n+1)},\frac{1}{n}]}, \quad h_n(x) = \frac{n^2 x\, e^{-nx^2}}{1+x^2}\mathbb{1}_{[0,1]}(x), \qquad n \geqslant 2$$

$$k_n(x) = \frac{nx\sin x}{1+|nx|^\alpha}, \quad l_n = k_n\mathbb{1}_{[0,1]}, \qquad \alpha \geqslant 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Exercice 12 Donner un exemple de fonction continue positive f sur $[0, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ est finie et $f(x)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers l'infini. Que dire si on suppose que f est uniformément continue ?

Exercice 13 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit f une fonction positive intégrable. Pour $\alpha > 0$ et $n \geqslant 1$, on pose

$$f_n(x) = n\log\Big(1 + (f(t)/n)^\alpha\Big), \qquad x \in X.$$

Déterminer suivant les valeurs de α (trois cas à distinguer $\alpha = 1$, $\alpha > 1$ et $0 < \alpha < 1$)

$$\lim_n \int_X f_n d\mu.$$

Ind : pour $\alpha \geqslant 1$ et $t \geqslant 0$, $1 + t^\alpha \leqslant (1+t)^\alpha$.

Exercice 14 On suppose que la série trigonométrique $a_0/2 + \sum_{n\geqslant 1}[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)]$ $(a_n, b_n \in \mathbb{R})$ converge simplement sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$. On veut montrer que cela implique que a_n et b_n tendent vers 0. Autrement dit, écrivant $a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = r_n\cos(nx + \varphi_n)$ avec $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, on veut montrer que r_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

1. Que pouvez-vous dire de la suite $(r_n\cos(nx + \varphi_n))$?
2. Montrer que si $[a, b] = [-\pi, \pi]$ et que la convergence est uniforme, alors les coefficients a_n et b_n tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
3. On revient au cas général et on suppose que (r_n) ne tend pas vers 0. Justifier qu'il existe alors un $\eta > 0$ et une sous-suite (r_{n_k}) telle que pour k, $r_{n_k} > \eta$.
4. En utilisant le théorème de convergence dominée, prouver que $\lim\limits_{k\to\infty}\int_a^b \cos^2(n_k x + \varphi_{n_k})\,dx = 0$.
5. Expliciter cette dernière intégrale et conclure.

Exercice 15 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables sur $(X, \mathcal{T}, \mu)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui converge simplement vers f. On suppose de plus que la suite $\left(\int_X |f_n|\,d\mu\right)_n$ est majorée. f est-elle intégrable ? Si oui, a t-on $\int_X |f|\,d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_X |f_n|\,d\mu$?

Exercice 16

1. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Montrer que si une suite de fonctions intégrables $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X, alors, il existe une fonction intégrable g qui domine la suite (et donc f est intégrable et $\int_X f\,d\mu = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu$). Quel résultat connu retrouvez-vous ?
2. Soit f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \frac{1}{n^2}xe^{-x^2/n^2}$, en considérant la suite (f_n) que pouvez-vous dire du résultat précédent lorsque $\mu(X) = +\infty$?

Exercice 17

1. Montrer que l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\, dx$ converge.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on pourra utiliser, en l'ayant justifiée, l'inégalité $|\sin x| \geq \frac{1-\cos(2x)}{2}$).