

Ces ensembles qui n'existent pas

Alexandre Bailleul

Il est bien connu que considérer l'ensemble de tous les ensembles conduit à un paradoxe. C'est le fameux paradoxe de Russell, qui au début du siècle dernier fit trembler les mathématiciens, notamment Frege, dont le livre sur la théorie des ensembles, sur lequel il avait travaillé pendant près de vingt ans, sorti quelques jours seulement après la révélation de ce paradoxe.¹

Rappelons d'où provient ce paradoxe : notons E l'ensemble de tous les ensembles. On peut alors certainement considérer l'ensemble $A := \{x \in E \mid x \notin x\}$ (schéma d'axiomes de séparation si l'on veut être précis). Alors $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$, absurde.

Bien qu'à première vue négatif pour le développement des fondements des mathématiques, ce paradoxe eut un effet bénéfique sur la théorie des ensembles et mena à l'élaboration du système globalement reconnu et utilisé pour les mathématiques aujourd'hui, le système de Zermelo-Fraenkel (ZF).

La conclusion généralement retenue de ce paradoxe, au moins dans ZF, est que la collection des ensembles est une *classe propre*, c'est-à-dire peut être définie dans le langage formel de ZF, par exemple par $\phi(x) : x = x$, qui n'est pas un ensemble. Ce n'est finalement pas très grave, on pourra quand même travailler avec des classes propres dans ZF, du moment qu'on leur interdit d'appartenir à un ensemble. En quelque sorte, le symbole \in est réservé aux ensembles.

Maintenant, on peut se demander si d'autres collections du type « ensemble de tous les X », où X est un type d'ensemble particulier, sont bel et bien des ensembles. Nous allons en étudier quelques-unes.

Le premier résultat est du à Burali-Forti, qui avait en fait une mauvaise notion de bon ordre. Ce n'est donc pas exactement ce résultat qu'on lui doit, mais on le lui attribue tout de même. Il était certainement connu de Cantor lui-même avant sa publication.

1. Frege, grand seigneur, ne put que reconnaître que son travail était vain et fit ajouter un avant-propos à son livre.

Théorème (Burali-Forti). *Il n'existe pas d'ensemble de tous les ordinaux.*

Démonstration. Par l'absurde, soit O l'ensemble de tous les ordinaux. Comme pour deux ordinaux $X \neq Y$ on a ou bien $X \subsetneq Y$, ou bien $Y \subsetneq X$, O est totalement ordonné pour \subset . De plus O est transitif car si $x \in O$, on a pour tout $y \in x, y \in O$ car les éléments de x sont des ordinaux, et comme tous ses éléments sont bien ordonnés pour \in , O l'est aussi. Ainsi O est un ordinal, et est donc élément de O . On a donc $O < O$, ce qui est absurde. \square

Théorème (Cantor). *Il n'existe pas d'ensemble de tous les cardinaux.*

Démonstration. On va montrer qu'il y a une bijection (au sens des classes propres) entre la classe de ordinaux et celle des cardinaux.

Les cardinaux peuvent être construit de la manière suivante :

- $\aleph_0 = \emptyset$
- Pour tout ordinal α , $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$.
- Pour tout ordinal limite β , $\aleph_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} \aleph_\alpha$.

Cela donne la bijection voulue. \square

Remarque. Alternativement, on pouvait montrer que l'ensemble C des cardinaux avait un cardinal supérieur à tous les cardinaux, ce qui est absurde en considérant l'ensemble de ses parties. Pour cela, il suffit de remarquer que pour tout cardinal κ , C contient l'ensemble $\{\aleph_\lambda \mid \lambda < \kappa\}$, d'où $|C| \geq \kappa$.

Passons maintenant aux structures algébriques. Nous allons voir que la plupart des structures algébriques classiques ne forment pas un ensemble, du fait que l'on pourrait alors en déduire l'ensemble de tous les ensembles.

Théorème. *Il n'existe pas d'ensemble de tous les groupes.*

Démonstration. En effet, soit G l'ensemble de tous les groupes (par l'absurde). À tout ensemble x , on associe $g(x) = (\{x\}, \{(x, x)\})$. Alors $g(x)$ est un groupe pour tout ensemble x , il est isomorphe au groupe trivial, i.e. $g(x) \in G$. En se rappelant que pour des ensembles a et b , on a $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$ par définition, on obtient pour tout ensemble x ,

$$g(x) = \{\{x\}, \{\{x\}, \{(x, x)\}\}\} = \{\{x\}, \{\{x\}, \{\{x, \{x, x\}\}\}\}\}.$$

En particulier, pour tout x , $x \in \bigcup g(x)$ d'où $x \in \bigcup \bigcup G$ et $\bigcup \bigcup G$ contiendrait tous les ensembles, ce qui est absurde. \square

Théorème. *Il n'existe pas d'ensemble de tous les anneaux, de tous les anneaux commutatifs.*

Démonstration. De la même manière, à tout ensemble x on associe l'ensemble $a(x) = (\{x\}, (x, x), (x, x))$, qui est un anneau isomorphe à l'anneau trivial. \square

Théorème. *Il n'existe pas d'ensemble de tous les corps.*

Démonstration. Avec la même méthode que précédemment, on peut chercher à construire un corps isomorphe à \mathbb{F}_2 . Par exemple, pour un ensemble x , on peut considérer $f(x) = (\{\emptyset, x\}, \cup, \cap)$, où \cup est une notation pour l'application

$$\begin{aligned}(\emptyset, \emptyset) &\mapsto \emptyset \\(x, \emptyset) &\mapsto x \\(\emptyset, x) &\mapsto \emptyset \\(x, x) &\mapsto x,\end{aligned}$$

et \cap est défini similairement. \square

Remarque. On obtient ainsi la non existence de l'ensemble des anneaux, des anneaux commutatifs, des anneaux euclidiens, des anneaux principaux, etc.

Théorème. *Il n'existe pas d'ensemble de tous les espaces vectoriels, espaces vectoriels de dimension finie, modules.*

Démonstration. On remarque que pour tout ensemble x , on peut mettre une structure de A -module nul sur $\{x\}$, et ceci pour tout anneau A . Il suffit de considérer $E_A(x) = (\{x\}, \{(x, x)\}, f)$, où f est l'application constante qui à $(a, x) \in A \times \{x\}$ associe x . \square

On voit bien que cette méthode fonctionnera pour la plupart des structures algébriques classiques. Cela est dû à leur définition, de la forme : « Un X est la donnée d'un ensemble E , de lois internes ou externes et d'applications vérifiant certaines propriétés ».

Enfin, donnons deux exemples non algébriques.

Théorème. *Il n'existe pas d'ensemble des espaces topologiques, des espaces mesurables.*

Démonstration. Il suffit de considérer, pour un ensemble x , l'ensemble $(x, \{\emptyset, x\})$. \square

Remarque. Encore une fois, on pourrait généraliser en montrant la non existence des ensembles des espaces topologiques connexes, compacts, métrisables, des espaces mesurés, des espaces de probabilité, etc.

En conclusion, ZF interdit en quelque sorte à de "trop gros" ensembles d'exister. Ce problème se pose en théorie des catégories. Peut-on vraiment considérer la catégorie des groupes abéliens, quand la collection des groupes abéliens ne forme pas un ensemble? On parle alors de petites et de grosses catégories. On peut contourner le problème de plusieurs manières différentes. Soit considérer l'axiome des univers de Grothendieck, qui grossièrement énonce que tout ensemble est contenu dans un ensemble assez gros, dit univers². Soit U un tel univers. Dans ce cas, on pourra travailler avec la catégorie des groupes contenus dans U par exemple. On pourra également travailler avec la catégorie des ensembles contenus dans U , cependant celle-ci ne sera pas contenue dans U , mais dans un autre univers plus gros! Une alternative est d'admettre l'existence d'un cardinal inaccessible (qui est non prouvable dans ZFC si ZFC est non contradictoire), qui sera encore une fois un ensemble très gros, et considérer les groupes contenus dans ce cardinal. Enfin, l'usage des classes propres peut être accepté, au prix de l'ajout de précautions à prendre pour la moindre manipulation.

2. Un univers est un ensemble transitif contenant \emptyset , stable par passage au singleton, par la prise de parties d'un ensemble, par union et par produit cartésien.

Références

- [1] K. Devlin, *The Joy of Sets - Fundamentals of Contemporary Set Theory*, Springer, 1993
- [2] A. Douady, R. Douady, *Algèbre et théories galoisiennes*, Cassini, 2005
- [3] T. Jech, *Set Theory - 3rd Millenium Edition*, Springer, 2011