Mesure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathbf{GL_n}(\mathbb{R})$

Alexandre Bailleul

Un résultat classique d'algèbre linéaire dit que l'ensemble des matrices inversibles sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{C}$) est dense dans l'ensemble des matrices. Ce résultat se démontre de la manière suivante :

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est inversible, il n'y a rien à faire, sinon on sait que 0 est valeur propre de A. Alors la suite de matrices $(A - \frac{1}{k} I_n)_k$ ne contient que des matrices inversibles à partir d'un certain rang et converge vers A. En effet, le deuxième point est clair, et quant au premier, on sait que A n'a qu'un nombre fini de valeurs propres et les valeurs propres de $A - \frac{1}{k} I_n$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ sont de la forme $\lambda - \frac{1}{k}$, où λ est une valeur propre de A. Pour $k > \frac{1}{|\lambda_0|}$, où λ_0 est une valeur propre non nulle de A de module minimal, ces valeurs propres sont non nulles. La démonstration est similaire sur $\mathbb{C}$.

Ainsi, $\mathbf{GL_n}(\mathbb{R})$ est « gros » au sens topologique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme c'est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (c'est l'image réciproque de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par l'application continue det) il est également « gros » au sens de la cardinalité. On peut maintenant se poser la question de savoir à quel point $\mathbf{GL_n}(\mathbb{R})$ est « gros » au sens de la mesure de Lebesgue.

Il faut tout d'abord spécifier ce que cela signifie. À partir de maintenant et par abus de notations, on notera λ la mesure de Lebesgue, sans faire la distinction entre les mesures de Lebesgue sur les différents $\mathbb{R}^k$. On peut déjà se demander ce que vaut $\lambda(\mathbf{GL_n}(\mathbb{R}))$ (c'est bien une partie mesurable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisque c'est un ouvert). Remarquons que les faits précédents ne prouvent rien : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ mais est de mesure nulle, et l'ensemble triadique de Cantor est non dénombrable et également de mesure nulle. On peut également construire des ouverts denses dans $\mathbb{R}$ de mesure arbitrairement petite (considérer, à ϵ fixé, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]q_n - r_n, q_n + r_n[$ où $(q_n)_n$ est une énumération des rationnels et $(r_n)_n$ est une suite dont la somme de la série vaut ϵ).

On a bien $\lambda(\mathbf{GL_n}(\mathbb{R})) = +\infty$. En effet, un résultat classique sur les espaces de Banach nous dit que si $M \in \mathbf{GL_n}(\mathbb{R})$, alors $B\left(M, \frac{1}{||M^{-1}||}\right) \subset \mathbf{GL_n}(\mathbb{R})$. En considérant la suite $(kI_n)_k$ d'éléments de $\mathbf{GL_n}(\mathbb{R})$, deux telles boules consécutives sont disjointes car $||(k+1)I_n - kI_n|| = 1 > \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}$ pour $k > 1$, et leur réunion est alors de mesure infinie (série harmonique) et est contenue dans $\mathbf{GL_n}(\mathbb{R})$.

En fait, seulement affirmer que $\lambda(\mathbf{GL_n}(\mathbb{R})) = +\infty$ n'est pas très satisfaisant. En effet, sur $\mathbb{R}$, on a $\lambda(\mathbb{R}^+) = +\infty$, mais la mesure de Lebesgue du complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^+$ est également infinie, $\mathbb{R}^+$ n'est donc pas vraiment « gros » dans $\mathbb{R}$ au sens de la mesure de Lebesgue. On va donc montrer que $\lambda(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathbf{GL_n}(\mathbb{R})) = \mathbf{0}$, ce qui est plus satisfaisant du point de vue de la théorie de la mesure.

Le point fondamental est le suivant : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathbf{GL_n}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des racines d'un polynôme non nul à n^2 variables (c'est une variété algébrique affine de $\mathbb{A}^{n^2}(\mathbb{R})$), le déterminant. Il suffit donc de montrer que l'ensemble des racines d'un polynôme non nul est toujours de mesure nulle. On notera $Z(P)$ l'ensemble des racines d'un polynôme P. On aura besoin du lemme suivant :

Lemme : *Soit P dans $\mathbb{R}[X_1, ..., X_{n+1}] \setminus \{0\}$. Alors l'ensemble des $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $P(X_1, ..., X_n, x_{n+1}) = 0$ (i.e. est le polynôme nul de $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$) est fini, en particulier de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Écrivons P comme un élément de l'anneau $\mathbb{R}[X_{n+1}][X_1, ..., X_n]$:

$$P = \sum_{i=0}^{d} \sum_{i_1+...+i_n=i} Q_{i_1,...,i_n}(X_{n+1}) X_1^{i_1} ... X_n^{i_n},$$

où d est le degré total de P. Par indépendance linéaires monômes, on a, pour $x_{n+1} \in \mathbb{R}$, $P(X_1, ..., X_n, x_{n+1}) = 0$ si et seulement si tous les $Q_{i_1,...i_n}(x_{n+1})$ (qui sont en nombres finis) sont nuls. Or les $Q_{i_1,...i_n}$ sont des polynômes en une variable, ils n'ont donc chacun qu'un nombre fini de racines, ce qui donne le résultat. □

Montrons maintenant par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout polynôme P non nul de $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$, $\lambda(Z(P)) = 0$.

- Initialisation : Un polynôme non nul en une variable n'a qu'un nombre fini de racines, celles-ci forment donc un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

- Hérédité : Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vérifiée pour n. Soit P dans $\mathbb{R}[X_1, ..., X_n, X_{n+1}] \setminus \{0\}$.

  Comme la fonction $\mathbf{1}_{Z(P)}$ est positive, on a par le théorème de Tonelli :

$$
\begin{aligned}
\lambda(Z(P)) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathbf{1}_{Z(P)}\, dx_1 ... \, dx_{n+1} \\
&= \int_{(x_1,\, ...,\, x_{n+1}) \in Z(P)} dx_1 ... \, dx_{n+1} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{(x_1,\, ...,\, x_n) \in Z(P(X_1,\, ...,X_n,\, x_{n+1}))} dx_1 ... \, dx_n \right) dx_{n+1} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda(Z(P(X_1,\ ...,\ X_n,\ x_{n+1})))\, dx_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Or, pour $x_{n+1} \in \mathbb{R}$, le polynôme $P(X_1,\ ...,\ X_n,\ x_{n+1})$ est à n variables. De plus, il est non nul pour presque tout les $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ d'après le lemme précédent. On déduit de l'hypothèse de récurrence que la dernière intégrale est nulle, ce qui termine la démonstration.

On a donc démontré le

Théorème : *Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors*

$$\lambda(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathbf{GL_n}(\mathbb{R})) = \mathbf{0}.$$

Remarque : Une méthode plus directe (mais qui a le défaut de ne pas montrer qu'une variété algébrique affine non pleine est de mesure nulle) est la suivante :

On considère l'ensemble $A = \{(M, t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}, M - tI_n \notin \mathbf{GL_n}(\mathbb{R})\}$. C'est bien sûr un mesurable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ muni de la tribu de Lebesgue, et par le théorème de Tonelli on a

$$\lambda(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M - tI_n \notin \mathbf{GL_n}(\mathbb{R})\})\, \mathbf{dt} = \int_{\mathbb{R}} \lambda(\mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathbb{R}) \setminus \mathbf{GL_n}(\mathbb{R}))\, \mathbf{dt}$$

et

$$\lambda(A) = \int_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \lambda(\{t \in \mathbb{R}, M - tI_n \notin \mathbf{GL_n}(\mathbb{R})\})\, \mathbf{dM} = \mathbf{0}$$

car un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'a qu'un nombre fini de valeurs propres. On en déduit que l'intégrale du haut est nulle et donc que la fonction intégrée, qui est constante, est nulle presque partout et donc est nulle.