Courses de nombres premiers et biais de Chebyshev

Alexandre Bailleul

Une infinité de nombres premiers

On sait depuis au moins l'époque d'Euclide qu'il existe une infinité de nombres premiers. Son argument très simple peut être adapté pour montrer plus généralement qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n+3$, ou encore avec un peu plus de travail une infinité de nombres premiers de la forme $4n+1$.

Cependant, sa méthode ne semble pas permettre de conclure à l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $10n+7$ par exemple, c'est-à-dire se terminant par un 7, ou en général, pour les nombres premiers de la forme $a+qn$, avec a et q premiers entre eux.

Le théorème de Dirichlet

Près de deux mille ans après Euclide, en 1837, Dirichlet apporte enfin une réponse affirmative à ce problème. Pour ce faire, il introduit des fonctions appelées caractères

$$\chi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*,$$

telles que $\chi(n)$ ne dépende que de n modulo q, $\chi(n)=0$ si n et q ne sont pas premiers entre eux, et $\chi(mn)=\chi(m)\chi(n)$ pour tous $m,n\in\mathbb{N}^*$. Avec ces caractères, il fabrique les fonctions L de Dirichlet

$$s \mapsto L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

et démontre son théorème grâce à des considérations analytiques sur ces fonctions.

Zéros de fonctions L et nombres premiers

Le théorème de Dirichlet, qui confirme l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $a+qn$ (a et q premiers entre eux), est une conséquence du fait que $L(1,\chi)\neq 0$ pour tous les caractères χ (non triviaux) modulo q.

Suite aux travaux fondateurs de Riemann en 1859 sur la **fonction zêta** qui porte son nom (qui est un cas particulier de fonction L), et au développement de la théorie des fonctions holomorphes, le théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques, qui affirme que

$$\pi(x,q,a) := \#\{p\le x \mid p = a \bmod q\} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\varphi(q)}\,\mathrm{Li}(x),$$

où $\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$, est démontré en 1899 par De la Vallée-Poussin. La démonstration de celui-ci repose notamment sur le fait que $L(1+it,\chi)\neq 0$ pour tous les caractères χ modulo q et tout réel $t\neq 0$.

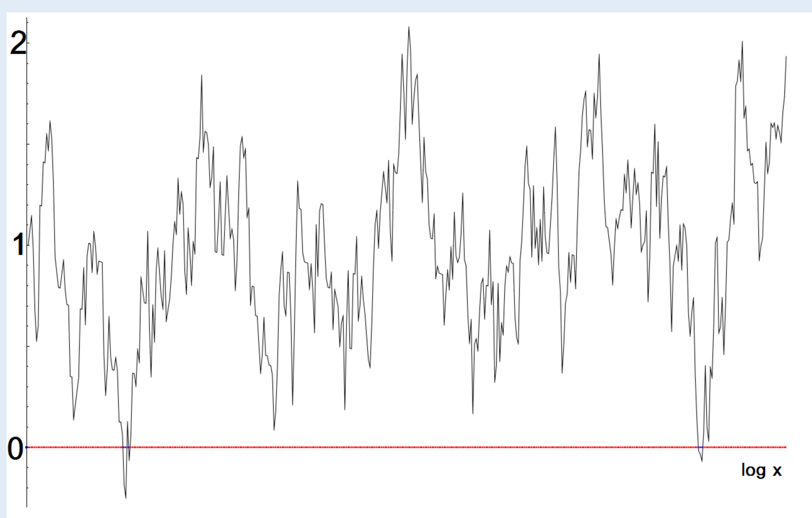
La fameuse **hypothèse de Riemann** prédit une répartition, en un sens optimale, des zéros complexes des fonctions L : les zéros non triviaux (c'est-à-dire de partie réelle dans $]0,1[$) se trouvent tous sur la droite verticale des nombres complexes de partie réelle $1/2$. Elle est en fait équivalente à la présence d'un reste le plus petit possible dans le théorème des nombres premiers : $\pi(x,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)}\,\mathrm{Li}(x) + O(\sqrt{x}\log x)$. (NB : $\mathrm{Li}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\log x}$)

Biais de Chebyshev

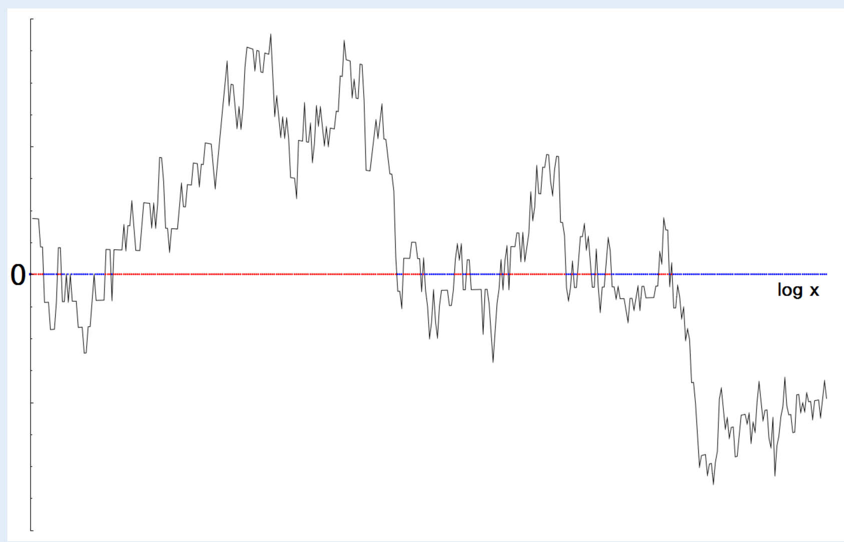
En 1853, Chebyshev écrit qu'il semble y avoir toujours plus de nombres premiers de la forme $4n+3$ que de la forme $4n+1$. En réalité, celui-ci se trompe, par exemple $\pi(26861,4,1) > \pi(26861,4,3)$. Pire, Littlewood a montré en 1914 que $\pi(x,4,3)-\pi(x,4,1)$ change de signe une infinité de fois.

Cependant, il semble y avoir une part de vrai dans l'affirmation de Chebyshev : *la plupart du temps*, il y a plus de nombres premiers de la forme $4n+3$ que $4n+1$. Cette observation, appelée **biais de Chebyshev**, a été quantifiée en 1994 par Rubinstein et Sarnak dans un article [1] démarrant l'étude des **courses de nombres premiers**.

Courses de nombres premiers



$\frac{\pi(x,4,3)-\pi(x,4,1)}{\sqrt{x}/\log x}$ en échelle logarithmique pour $10^4 \le x \le 10^8$, Daniel Fiorilli



$\frac{\pi(x,101,3)-\pi(x,101,1)}{\sqrt{x}/\log x}$ en échelle logarithmique pour $10^4 \le x \le 10^8$, Daniel Fiorilli

Entre autres calculs numériques, Rubinstein et Sarnak montrent que l'inégalité $\pi(x,4,3) > \pi(x,4,1)$ se produit $99,59\%$ du temps en échelle logarithmique, justifiant ainsi un biais très fort en faveur de l'équipe $4n+3$ dans sa course contre l'équipe $4n+1$. Ceux-ci montrent également une atténuation du biais de Chebyshev dans la course $a+qn$ contre $b+qn$ lorsque a et b sont fixés et q tend vers l'infini : sous ces conditions, la proportion du temps où l'une des équipes est devant l'autre converge vers $1/2$.

Travaux actuels

Ces courses de nombres premiers ont été grandement généralisées dans le contexte des corps de nombres, où des phénomènes nouveaux liés à l'existence possible d'un zéro en $1/2$ pour certaines fonctions L apparaissent. En exploitant des travaux récents de Daniel Fiorilli et Florent Jouve [2] sur le biais de Chebyshev dans les corps de nombres, j'ai obtenu des résultats mettant en évidence ces phénomènes, et leur influence sur ce biais dans certaines familles d'extensions de $\mathbb{Q}$, de groupes de Galois des groupes de quaternions généralisés $\mathbb{H}_{2^n}$.

References

[1] M. Rubinstein, P. Sarnak, *Chebyshev's bias*.

[2] D. Fiorilli, F. Jouve, *Chebyshev's bias in families of Galois extensions*.