Introduction aux modèles booléens

Alexandre Miquel

Un modèle (au sens ordinaire du terme) est un ensemble $\mathscr{M}$ muni des structures permettant d'interpréter n'importe quel terme d'un langage donné par un élément de $\mathscr{M}$ et n'importe quelle formule de ce langage par un élément de l'algèbre de Boole $2 = \{0; 1\}$. Les modèles booléens sont une généralisation naturelle de la notion traditionnelle de modèle dans laquelle la fonction d'interprétation des formules prend ses valeurs dans une algèbre de Boole $\mathbb{B}$ arbitraire qui n'est pas nécessairement réduite à deux points. L'introduction de valeurs de vérité « ni vraies ni fausses » donne en pratique un degré de liberté supplémentaire appréciable dans la construction des modèles, d'autant que dans la plupart des cas, il est possible *in fine* de se ramener à un modèle traditionnel en effectuant le quotient de l'algèbre $\mathbb{B}$ par un ultrafiltre.

1 Algèbres de Boole

1.1 Définitions

On rappelle qu'un *treillis* est un ensemble ordonné $(E, \leq)$ dans lequel toute paire d'éléments $x, y \in E$ admet une borne inférieure (notée $x \wedge y$) et une borne supérieure (notée $x \vee y$). Étant donné un treillis E on dit que :

- ▶ E est *distributif* si pour tous $x, y, z \in E$ on a les deux égalités :

$$\begin{array}{rcl} x \wedge (y \vee z) & = & (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \vee (y \wedge z) & = & (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{array}$$

  (Il suffit en pratique que l'une de ces deux égalités soit vérifiée pour tous $x, y, z \in E$ pour que l'autre le soit également.)

- ▶ E est *borné* s'il admet un plus petit élément (noté 0) et un plus grand élément (noté 1).
- ▶ E est *complémenté* si E est borné et si tout $x \in E$ admet un *complémentaire*, c'est-à-dire un élément $y \in E$ tel que $x \wedge y = 0$ et $x \vee y = 1$.

En règle générale un élément d'un treillis borné peut avoir plusieurs complémentaires comme il peut en avoir aucun. Cependant dans le cas où E est borné et distributif, on vérifie aisément que le complémentaire d'un élément $x \in E$, lorsqu'il existe, est unique ; on le note alors $\neg x$.

Ce qui justifie la définition suivante :

Définition 1 (Algèbre de Boole) — On appelle une *algèbre de Boole* tout treillis distributif complémenté.

Dans une algèbre de Boole $\mathbb{B}$ on a $0 = 1$ (dans $\mathbb{B}$) si et seulement si $\mathbb{B}$ est réduite à un seul point ; on dit alors que $\mathbb{B}$ est *dégénérée*.

Caractérisation algébrique D'un point de vue strictement algébrique, on peut voir une algèbre de Boole comme un ensemble muni de deux éléments 0 et 1, d'une opération unaire $x \mapsto \neg x$ et de deux opérations binaires $x, y \mapsto x \wedge y$ et $x, y \mapsto x \vee y$ qui satisfont les axiomes suivants :

$$\begin{array}{ll}
(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) & (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \\
x \wedge y = y \wedge x & x \vee y = y \vee x \\
x \wedge (x \vee y) = x & x \vee (x \wedge y) = x \\
x \wedge (y \vee z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) & x \vee (y \wedge z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \\
x \wedge \neg x = 0 & x \vee \neg x = 1
\end{array}$$

(C'est-à-dire, de haut en bas : les axiomes d'associativité, de commutativité, d'absorbsion, de distributivité et de complémentation.) Ces axiomes caractérisent à leur tour la notion d'algèbre de Boole, en ce sens que toute structure $(\mathbb{B}, 0, 1, \neg, \wedge, \vee)$ qui satisfait les axiomes ci-dessus est induite par un treillis distributif complémenté dont la relation d'ordre est donnée par

$$x \leq y \qquad \text{ssi} \qquad x \wedge y = x \qquad \text{ssi} \qquad x \vee y = y\,.$$

Structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-algèbre Toute algèbre de Boole a naturellement une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-algèbre commutative dans laquelle l'addition est définie par le « ou » exclusif (noté $\oplus$) et la multiplication par la conjonction :

$$x + y = x \oplus y = (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x) \qquad \text{et} \qquad xy = x \wedge y\,.$$

Réciproquement, toute $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-algèbre commutative unitaire définit une algèbre de Boole dont les opérations sont données par

$$x \wedge y = xy, \qquad x \vee y = xy + x + y \qquad \text{et} \qquad \neg x = x + 1\,.$$

Exemples :

1. L'ensemble des parties d'un ensemble X, noté $\mathfrak{P}(X)$, est une algèbre de Boole pour l'ordre de l'inclusion.
2. Un sous-ensemble $B \subseteq \mathfrak{P}(X)$ est une *algèbre d'ensembles* si X contient la partie vide et la partie pleine, et si X est clos par union, intersection (finies) et par complémentation. Une algèbre d'ensembles est une algèbre de Boole, et d'après le théorème de représentation de Stone (Théorème 1 p. 7) toute algèbre de Boole est isomorphe à une algèbre d'ensembles.
3. L'ensemble des sous-ensembles boréliens de $\mathbb{R}$ (ou d'un espace topologique quelconque) constitue une algèbre d'ensembles, et donc une algèbre de Boole. De même pour l'ensemble des ensembles mesurables de $\mathbb{R}$.

1.2 Structure catégorique

La classe des algèbres de Boole est munie d'une structure de catégorie dont les flèches sont les suivantes :

Définition 2 (Morphisme d'algèbres de Boole) — Soient $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ deux algèbres de Boole. On appelle un *morphisme d'algèbres de Boole* de $\mathbb{B}_1$ dans $\mathbb{B}_2$ toute fonction $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{B}_1$ on a :

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \qquad f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(\neg x) = \neg f(x)\,.$$

(Ces égalités impliquent également que $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ et $f(1) = 1$.)

La catégorie des algèbres de Boole admet :

– Tous les produits cartésiens, finis et infinis. En effet, si $(\mathbb{B}_i)_{i\in I}$ est une famille d'algèbres de Boole, alors le produit cartésien $\mathbb{B} = \prod_{i\in I} \mathbb{B}_i$ muni de l'ordre produit défini par

$$(b_i)_{i\in I} \leq (b'_i)_{i\in I} \qquad \text{ssi} \qquad \forall i \in I \quad b_i \leq b'_i$$

a une structure d'algèbre de Boole, avec

$$\begin{array}{lll} (b_i)_{i\in I} \vee (b'_i)_{i\in I} = (b_i \vee b'_i)_{i\in I} & 0_{\mathbb{B}} = (0_{\mathbb{B}_i})_{i\in I} & \neg(b_i)_{i\in I} = (\neg b_i)_{i\in I} \\ (b_i)_{i\in I} \wedge (b'_i)_{i\in I} = (b_i \wedge b'_i)_{i\in I} & 1_{\mathbb{B}} = (1_{\mathbb{B}_i})_{i\in I} & \end{array}$$

– Un objet terminal qui est l'algèbre de Boole dégénérée $1 = \{0\}$ (correspondant au produit de la famille vide).
– Un objet initial qui est l'algèbre de Boole à deux points $2 = \{0; 1\}$.

Sous-algèbres de Boole Étant donnée une algèbre de Boole $\mathbb{B}$, on dit qu'un sous-ensemble $C \subseteq \mathbb{B}$ est une *sous-algèbre de Boole* de $\mathbb{B}$ si C contient 0, 1 et est clos par les opérations $\neg$, $\vee$ et $\wedge$. De manière équivalente, une algèbre de Boole C est une sous-algèbre de Boole de $\mathbb{B}$ si $C \subseteq \mathbb{B}$ et si la fonction d'inclusion $i_C : C \to \mathbb{B}$ est un morphisme d'algèbres de Boole.

Un sous-ensemble $C \subseteq \mathbb{B}$ muni de l'ordre induit peut être une algèbre de Boole sans pour autant être une sous-algèbre de Boole de $\mathbb{B}$: les unités peuvent être différentes dans $\mathbb{B}$ et dans C, de même que les opérations $\neg$, $\vee$ et $\wedge$.

1.3 Algèbres de Boole complètes

Dans certaines situations, la condition de clôture par les sups et infs finis peut être insuffisante. On est alors amené à considérer des algèbres de Boole dans laquelle l'existence de bornes supérieures et inférieures est assurée pour n'importe quelle famille d'éléments :

Définition 3 (Algèbre de Boole complète) — On dit qu'une algèbre de Boole $\mathbb{B}$ est *complète* si toute famille d'éléments de $\mathbb{B}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure. (Autrement dit, une algèbre de Boole complète est un treillis distributif complet complémenté.)

La notion d'algèbre de Boole complète peut être affinée en ne considérant que les familles indicées par un ensemble dont le cardinal est inférieur à un cardinal donné. Ainsi si α est un cardinal, on dit qu'une algèbre de Boole $\mathbb{B}$ est *α-complète* si toute famille d'éléments de $\mathbb{B}$ indicée par un ensemble de cardinal $< \alpha$ admet une borne supérieure et une borne inférieure. On notera qu'une algèbre de Boole α-complète est également β-complète pour tout cardinal $\beta \leq \alpha$.

En pratique, on utilise le plus souvent cette notion dans le cas où $\alpha = \aleph_1$, c'est-à-dire dans le cas où toutes les familles finies et dénombrables admettent une borne inférieure et une borne supérieure ; on parle alors d'algèbre de Boole *σ-complète* (plutôt que $\aleph_1$-complète).

Si $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ sont deux algèbres de Boole complètes (resp. α-complètes), on dit qu'une fonction $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ est un *morphisme d'algèbres de Boole complètes* (resp. un *morphisme d'algèbres de Boole α-complètes*) si f commute avec la complémentation et avec les sups et infs de familles indicées par un ensemble quelconque (resp. de cardinal $< \alpha$).

Un morphisme d'algèbres de Boole entre deux algèbres de Boole complètes (resp. α-complètes) n'est pas nécessairement un morphisme d'algèbres de Boole complètes (resp. α-complètes).

1.4 Filtres et idéaux

Définition 4 (Filtre, idéal) — Dans un ensemble ordonné $(E, \leq)$, on dit qu'un sous-ensemble $F \subseteq E$ est un *filtre* si

1. F est non vide ;
2. F est clos supérieurement : $x \in F$ et $x \leq y$ entraînent $y \in F$;
3. Pour tous $x, y \in F$ il existe $z \in F$ tel que $z \leq x$ et $z \leq y$.

De manière duale on dit qu'un sous-ensemble $I \subseteq E$ est un *idéal* si

1. I est non vide ;
2. I est clos inférieurement : $x \in I$ et $x \geq y$ entraînent $y \in I$;
3. Pour tous $x, y \in I$ il existe $z \in I$ tel que $x \leq z$ et $y \leq z$.

On appelle *filtre propre* (resp. *idéal propre*) tout filtre différent de E (resp. tout idéal différent de E).

Dans une algèbre de Boole $\mathbb{B}$, ces définitions se simplifient de la manière suivante : un sous-ensemble $F \subseteq \mathbb{B}$ est un filtre si et seulement si

1. $1 \in F$;
2. F est clos supérieurement ;
3. F est clos par « $\wedge$ » : $x \in F$ et $y \in F$ entraînent $x \wedge y \in F$;

tandis qu'un sous-ensemble $I \subseteq \mathbb{B}$ est un idéal si et seulement si

1. $0 \in I$;
2. I est clos inférieurement ;
3. I est clos par « $\vee$ » : $x \in I$ et $y \in I$ entraînent $x \vee y \in I$.

Enfin, un filtre $F \subseteq \mathbb{B}$ (resp. un idéal $I \subseteq \mathbb{B}$) est propre ssi $0 \notin F$ (resp. $1 \notin I$).

Dans une algèbre de Boole $\mathbb{B}$, les filtres sont en bijection avec les idéaux à travers la correspondance $X \mapsto \neg X = \{\neg x \ : \ x \in X\}$ qui à chaque sous ensemble de $\mathbb{B}$ associe l'ensemble des complémentaires des éléments de X :

Proposition 1 — *Un sous-ensemble $X \subseteq \mathbb{B}$ est un filtre (resp. un idéal) si et seulement si l'ensemble $\neg X$ est un idéal (resp. un filtre).*

Si F désigne un filtre et si $\neg F$ désigne l'idéal associé, on remarque que :

- Les ensembles F et $\neg F$ sont disjoints, sauf si $F = \neg F = \mathbb{B}$;
- Le sous-ensemble $F \cup \neg F$ est une sous-algèbre de Boole de $\mathbb{B}$.

Intuition logique Intuitivement, chaque filtre $F \subseteq \mathbb{B}$ définit un critère de validité particulier, c'est-à-dire un ensemble de valeurs de vérité considérées comme valides suivant un critère donné. La condition « $1 \in F$ » exprime que la valeur de vérité la plus élevée est toujours considérée comme valide, la condition de clôture supérieure exprime qu'une valeur de vérité plus élevée qu'une valeur de vérité considérée comme valide est elle-même considérée comme valide, et la condition de clôture par intersection exprime que la conjonction de deux valeurs de vérité considérées comme valides est elle-même considérée comme valide. Enfin la condition de cohérence « $0 \notin F$ » qui caractérise les filtres propres exprime que la valeur de vérité « fausse » ne peut pas être considérée comme valide. À l'appui de cette intuition, on notera que les conditions 2 et 3 entraînent une forme sémantique de modus ponens qui est la suivante :

Lemme 1 (Modus ponens) — *Étant donnés un filtre $F \subseteq \mathbb{B}$ et deux éléments $x, y \in \mathbb{B}$, les deux conditions $\neg x \vee y \in F$ et $x \in F$ entraînent que $y \in F$.*

Par ailleurs, les filtres et les idéaux sont conservés par image réciproque à travers les morphismes d'algèbres de Boole, et aussi par image directe à travers les morphismes surjectifs :

Proposition 2 (Image réciproque d'un filtre/idéal) — *Si $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ est un morphisme d'algèbres de Boole, alors l'image réciproque par f de tout filtre de $\mathbb{B}_2$ (resp. de tout idéal de $\mathbb{B}_2$) est un filtre de $\mathbb{B}_1$ (resp. un idéal de $\mathbb{B}_1$). Si en outre f est surjectif, l'image directe par f de tout filtre de $\mathbb{B}_1$ (resp. de tout idéal de $\mathbb{B}_1$) est un filtre de $\mathbb{B}_2$ (resp. un idéal de $\mathbb{B}_2$).*

Filtres et idéaux principaux Soit $\mathbb{B}$ une algèbre de Boole. Pour tout point $x \in \mathbb{B}$, les ensembles $\uparrow_{\mathbb{B}} x$ et $\downarrow_{\mathbb{B}} x$ définis par

$$\begin{array}{rcl} \uparrow_{\mathbb{B}} x & = & \{y \in \mathbb{B} \ : \ y \geq x\} \\ \downarrow_{\mathbb{B}} x & = & \{y \in \mathbb{B} \ : \ y \leq x\} \end{array}$$

sont respectivement un filtre et un idéal de $\mathbb{B}$; on les appelle le *filtre principal* et l'*idéal principal* engendrés par x. On a alors :

$$\neg \uparrow_{\mathbb{B}} x \ = \downarrow_{\mathbb{B}} \neg x \qquad \text{et} \qquad \neg \downarrow_{\mathbb{B}} x \ = \uparrow_{\mathbb{B}} \neg x\,.$$

Par ailleurs, chacun des deux ensembles $\uparrow_{\mathbb{B}} x$ et $\downarrow_{\mathbb{B}} x$ muni de l'ordre induit constitue une algèbre de Boole (mais pas une sous-algèbre de Boole). On a alors les isomorphismes

$$\uparrow_{\mathbb{B}} x \ \simeq \downarrow_{\mathbb{B}} \neg x, \qquad \downarrow_{\mathbb{B}} x \ \simeq \uparrow_{\mathbb{B}} \neg x\,,$$

et finalement :

$$\mathbb{B} \ \simeq \ (\downarrow_{\mathbb{B}} x) \times (\downarrow_{\mathbb{B}} \neg x) \ \simeq \ (\uparrow_{\mathbb{B}} x) \times (\uparrow_{\mathbb{B}} \neg x) \ \simeq \ (\downarrow_{\mathbb{B}} x) \times (\uparrow_{\mathbb{B}} x)\,.$$

Cette décomposition, qui est non triviale dans le cas où $x \notin \{0; 1\}$, permet de démontrer que :

Proposition 3 (Algèbres de Boole finies) — *Toute algèbre de Boole finie est isomorphe à l'algèbre de Boole 2^n pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$.*

Exemples

1. Étant donné un ensemble fini X, l'ensemble F_X des parties cofinies de X est un filtre (non principal) sur $\mathfrak{P}(X)$, qu'on appelle le *filtre de Fréchet*. (L'idéal associé est l'ensemble des parties finies de X.)
2. Dans l'ensemble des parties mesurables de $\mathbb{R}$, l'ensemble des parties de mesure nulle est un idéal non principal.

1.5 Quotient d'une algèbre de Boole par un filtre

Soit $\mathbb{B}$ une algèbre de Boole et $F \subseteq \mathbb{B}$ un filtre sur $\mathbb{B}$. On note $x \sim_F y$ la relation binaire sur $\mathbb{B}$ définie par

$$\begin{array}{rcl} x \sim_F y & \equiv & \exists z \in F\ (x \wedge z = y \wedge z) \\ & \Leftrightarrow & x \oplus y \in \neg F \end{array}$$

La relation $\sim_U$ est clairement une relation d'équivalence compatible avec les opérations de l'algèbre de Boole en ce sens que :

1. Si $x \sim_F x'$, alors $\neg x \sim_U \neg x'$
2. Si $x \sim_F x'$ et $y \sim_F y'$, alors $(x \vee y) \sim_F (x' \vee y')$ et $(x \wedge y) \sim_F (x' \wedge y')$.

Par conséquent, l'ensemble quotient, noté $\mathbb{B}/F$ (ou $\mathbb{B}/\neg F$[1]), a lui-même une structure d'algèbre de Boole, et la surjection canonique $\pi_F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}/F$ est un morphisme d'algèbres de Boole. De plus :

- La classe d'équivalence de 1 est F ;
- La classe d'équivalence de 0 est $\neg F$ l'idéal associé à U ;
- Plus généralement, la classe d'équivalence d'un élément $x \in \mathbb{B}$ quelconque est l'ensemble $x \oplus \neg F = \{x \oplus y \ :\ y \in \neg F\}$. (Toutes les classes d'équivalence sont dont en bijection avec F.)

Pour tout $x \in \mathbb{B}$, on a en particulier

$$\mathbb{B}/({\uparrow_{\mathbb{B}}}\, x) \ \simeq\ {\downarrow_{\mathbb{B}}}\, x \ \simeq\ {\uparrow_{\mathbb{B}}}\, \neg x\,.$$

Proposition 4 (Quotients successifs) — *Pour tout couple de filtres F et F' sur $\mathbb{B}$ tels que $F \subseteq F'$ on a*

$$\mathbb{B}/F' \ \simeq\ (\mathbb{B}/F)/\pi_F(F')$$

où $\pi_F(F')$ désigne l'image de F' par la surjection $\pi_F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}/F$.

1.6 Ultrafiltres

La proposition précédente exprime que plus un filtre $F \subseteq \mathbb{B}$ est grand, plus l'ensemble quotient $\mathbb{B}/F$ est petit, le cas limite correspondant au cas où $F = \mathbb{B}$ et par conséquent $\mathbb{B}/F = 1$ (algèbre dégénérée). Si on se restreint aux filtres propres, un cas limite beaucoup plus intéressant est le suivant :

Proposition et définition 1 (Ultrafiltre) — *Pour tout filtre $U \subseteq \mathbb{B}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *U est un filtre propre maximal (pour l'inclusion) ;*
2. *La paire $\{U; \neg U\}$ constitue une partition de $\mathbb{B}$;*
3. *L'ensemble quotient $\mathbb{B}/U$ est l'algèbre à deux points : $\mathbb{B}/U \simeq 2$.*

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dit que U est un ultrafiltre.

Si $U \subseteq \mathbb{B}$ est un ultrafiltre, la surjection canonique $\pi_U : \mathbb{B} \to 2 = \{0; 1\}$ n'est autre que la fonction caractéristique de U sur $\mathbb{B}$. On a donc les équivalences :

[1]Cette notation n'est pas ambiguë dans la mesure où un même ensemble $X \subseteq \mathbb{B}$ ne peut pas être à la fois un filtre et un idéal de $\mathbb{B}$, sauf dans le cas où $X = \neg X = \mathbb{B}$.

1. $x \wedge y \in U$ ssi $x \in U$ et $y \in U$;
2. $x \vee y \in U$ ssi $x \in U$ ou $y \in U$;
3. $\neg x \in U$ ssi $x \notin U$.

(Seule la première équivalence vaut pour les filtres quelconques.)

Dans le cas où $\mathbb{B}$ est une algèbre de Boole complète, la surjection canonique $\pi_U : \mathbb{B} \to 2$ n'est pas un morphisme d'algèbres de Boole complètes, sauf dans le cas où U est un ultrafiltre trivial (voir lemme 4).

Le lemme de Zorn permet de démontrer que

Proposition 5 (Prolongation d'un filtre) — *Si $F \subseteq \mathbb{B}$ est un filtre propre, alors il existe un ultrafiltre $U \subseteq \mathbb{B}$ tel que $F \subseteq U$.*

Preuve. On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ constitué par tous les filtres propres $F' \subseteq \mathbb{B}$ tels que $F \subseteq F'$, muni de l'ordre de l'inclusion. On vérifie que toute partie totalement ordonnée $T \subseteq \mathcal{F}$ admet une borne supérieure, à savoir : $\bigcup T$. On conclut en appliquant le lemme de Zorn. □

Une conséquence de cette proposition est qu'il est toujours possible de séparer (faiblement) deux éléments distincts de $\mathbb{B}$ avec un ultrafiltre :

Lemme 2 (Séparation) — *Si $x, y \in \mathbb{B}$ sont tels que $x \neq y$, alors il existe un ultrafiltre $U \subseteq \mathbb{B}$ tel que $U \cap \{x; y\}$ est un singleton.*

Preuve. Quitte à échanger x et y, on peut supposer que $y \not\leq x$, c'est-à-dire : $x \wedge \neg y \neq 0$. On considère alors un ultrafiltre U prolongeant le filtre engendré par $x \wedge \neg y$, et on vérifie que $x \in U$ et $\neg y \in U$, donc $y \notin U$. □

Le lemme ci-dessus permet de montrer que toute algèbre de Boole est isomorphe à une algèbre d'ensembles (théorème de représentation de Stone) :

Théorème 1 (Stone) — *Toute algèbre de Boole $\mathbb{B}$ est isomorphe à une algèbre d'ensembles, à savoir l'image dans $\mathfrak{P}(\mathcal{U}_{\mathbb{B}})$ (où $\mathcal{U}_{\mathbb{B}}$ désigne l'ensemble des ultrafiltres de $\mathbb{B}$) du morphisme injectif $f : \mathbb{B} \to \mathfrak{P}(\mathcal{U}_{\mathbb{B}})$ défini par*

$$f(x) \;=\; \{U \in \mathcal{U}_{\mathbb{B}} \;:\; x \in U\}$$

pour tout $x \in \mathbb{B}$.

Preuve. La fonction f définie ci-dessus est clairement un morphisme d'algèbres de Boole, et son injectivité découle du lemme 2. □

1.7 Atomes et ultrafiltres triviaux

Définition 5 (Atomes) — Dans une algèbre de Boole $\mathbb{B}$, un *atome* est un élément minimal de $\mathbb{B} \setminus \{0\}$.

La terminologie d'« atome » est justifiée par le fait que pour tout atome $a \in \mathbb{B}$ et pour tous $x, y \in \mathbb{B}$, on a $a \leq x \vee y$ si et seulement si $a \leq x$ ou $a \leq y$. Une algèbre de Boole finie, isomorphe à 2^n, a exactement n atomes.

Par analogie avec l'ensemble des parties finies de X, on note $\mathbb{B}_{\mathrm{fin}}$ l'ensemble des unions finies (éventuellement vides) d'atomes de $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{B}_{\mathrm{fin}} \;=\; \{a_1 \vee \cdots \vee a_n \;:\; n \geq 0,\; a_1, \ldots, a_n \text{ atomes de } \mathbb{B}\}\,.$$

Proposition 6 — *Le sous-ensemble $\mathbb{B}_{\text{fin}} \subseteq \mathbb{B}$ est un idéal de $\mathbb{B}$, et le quotient $\mathbb{B}/\mathbb{B}_{\text{fin}}$ est une algèbre de Boole sans atome.*

Les atomes et les ultrafiltres sont reliés par le lemme suivant :

Lemme 3 — *Pour tout $x \in \mathbb{B}$, x est un atome ssi $\uparrow_{\mathbb{B}} x$ est un ultrafiltre.*

On qualifie de triviaux les ultrafiltres engendrés par un atome. D'après le lemme ci-dessus, les ultrafiltres triviaux sont les seuls ultrafiltres principaux, et leur générateur est nécessairement un atome. Plus généralement on vérifie que :

Lemme 4 (Caractérisation des ultrafiltres triviaux) — *Pour tout ultrafiltre $U \subseteq \mathbb{B}$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *U est trivial ;*
2. *U contient au moins un atome ;*
3. *U rencontre $\mathbb{B}_{\text{fin}}$: $\quad U \cap \mathbb{B}_{\text{fin}} \neq \varnothing$.*

Dans le cas où $\mathbb{B}$ est une algèbre de Boole complète, ces trois assertions sont équivalentes à la suivante :

4. *$\pi_U : \mathbb{B} \to 2$ est un morphisme d'algèbres de Boole complètes.*

(La preuve est laissée en exercice au lecteur.)

2 Modèles booléens

Dans cette section, $\mathcal{L}$ désigne un langage du premier ordre défini par un ensemble de symboles de fonctions (notation : f, g, h, etc.) et de symboles de prédicats (notation : p, q, r, etc.) munis de leurs arités. On suppose que :

- les termes de $\mathcal{L}$ sont construits à partir d'un ensemble dénombrable de variables noté $\mathcal{X}$ à l'aide des symboles de fonctions de $\mathcal{L}$;
- les formules de $\mathcal{L}$ sont construites à l'aide des symboles de prédicats de $\mathcal{L}$, de l'unité $\bot$, des connecteurs $\neg$, $\vee$, et du quantificateur $\exists$.

(Dans ce langage de base, les autres constructions de la logique sont définies à l'aide des codages habituels basés sur les lois de Morgan.)

2.1 Valuations et prémodèles

Définition 6 (Valuations) — Étant donné un ensemble $\mathscr{M}$, on appelle une *valuation* sur $\mathscr{M}$ toute fonction ρ de domaine fini $\mathrm{dom}(\rho) \subseteq \mathcal{X}$ et à valeurs dans $\mathscr{M}$. L'ensemble des valuations sur $\mathscr{M}$ est noté $\mathrm{Val}_{\mathscr{M}}$.

Pour chaque ensemble fini de variables $X \subseteq \mathcal{X}$, on introduit une relation d'équivalence partielle sur $\mathrm{Val}_{\mathscr{M}}$, notée $\rho \sim_X \rho'$, et définie par :

$$\rho \sim_X \rho' \qquad \equiv \qquad X \subset (\mathrm{dom}(\rho) \cap \mathrm{dom}(\rho')) \quad \text{et} \quad \rho\lfloor X = \rho'\lfloor X$$

pour tous $\rho, \rho' \in \mathrm{Val}_{\mathscr{M}}$. (Le domaine de cette relation d'équivalence partielle est donc l'ensemble des valuations ρ telles que $X \subseteq \mathrm{dom}(\rho)$.)

Pour tous $\rho \in \mathrm{Val}_{\mathscr{M}}$, $x \in \mathcal{X}$ et $v \in \mathscr{M}$, on note $\rho, x \leftarrow v$ la valuation de domaine $\mathrm{dom}(\rho, x \leftarrow v) = \mathrm{dom}(\rho) \cup \{x\}$ définie par

$$(\rho, x \leftarrow v) \quad = \quad \begin{cases} \rho(y) & \text{si } y \in \mathrm{dom}(\rho) \setminus \{x\} \\ v & \text{si } y = x \end{cases}$$

pour tout $y \in \mathrm{dom}(\rho) \cup \{x\}$. Par construction, on a donc

$$(\rho, x \leftarrow v) \sim_{\mathrm{dom}(\rho)\setminus\{x\}} \rho \qquad \text{et} \qquad (\rho, x \leftarrow v)(x) = v\,.$$

Définition 7 (Prémodèle de $\mathcal{L}$) — Soit $\mathbb{B}$ une algèbre de Boole (pas nécessairement complète). Un *prémodèle* du langage $\mathcal{L}$ sur l'algèbre de Boole $\mathbb{B}$ est un ensemble $\mathscr{M} \neq \varnothing$ muni des structures suivantes :

- une fonction $[\![f]\!]^{\mathscr{M}} : \mathscr{M}^k \to \mathscr{M}$
  pour chaque symbole de fonction f d'arité k dans $\mathcal{L}$;
- une fonction $[\![p]\!]^{\mathscr{M}} : \mathscr{M}^k \to \mathbb{B}$
  pour chaque symbole de prédicat p d'arité k dans $\mathcal{L}$.

Dans le cas où $\mathbb{B} = 1$, on parle de prémodèle *inconsistant*.

Dans le cas où $\mathbb{B} = 2 = \{0; 1\}$, la notion de prémodèle sur $\mathbb{B}$ se confond avec la notion de modèle au sens ordinaire. Par ailleurs, tout modèle $\mathscr{M}$ au sens ordinaire peut être vu comme un prémodèle $\mathscr{M}$ (en fait : un modèle) sur une algèbre de Boole $\mathbb{B}$ arbitraire en composant les fonctions d'interprétation des prédicats dans $\mathscr{M}$ avec l'unique morphisme $i : 2 \to \mathbb{B}$.

Plus généralement, tout prémodèle $\mathscr{M}$ sur une algèbre de Boole $\mathbb{B}$ peut être transformé en un prémodèle sur une algèbre de Boole $\mathbb{B}'$ en composant les fonctions d'interprétation des prédicats dans $\mathscr{M}$ avec un morphisme $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$. Le prémodèle (sur $\mathbb{B}'$) qui résulte de cette transformation est noté $f(\mathscr{M})$.

2.2 Interprétation des termes et des formules

Soient $\mathbb{B}$ une algèbre de Boole, et $\mathscr{M}$ un prémodèle du langage $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{B}$.

Définition 8 (Interprétation des termes) — À tout terme $t \in \mathcal{L}$ on associe une fonction partielle $[\![t]\!]^{\mathscr{M}}_{*} : \mathrm{Val}_{\mathscr{M}} \rightharpoonup \mathscr{M}$ qui à chaque valuation ρ de son domaine de définition associe un élément de $\mathscr{M}$ noté $[\![t]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho}$, qu'on appelle la *dénotation* de t dans $\mathscr{M}$ relativement à la valuation ρ. Cette fonction partielle est construite par récurrence sur t à partir des clauses suivantes :

1. Si $x \in \mathrm{dom}(\rho)$, alors la dénotation $[\![x]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho}$ est définie et
$$[\![x]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho} \;=\; x\,.$$
2. Si les dénotations $[\![t_1]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho}, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho}$ sont définies et si f est un symbole de fonction d'arité k, alors la dénotation $[\![f(t_1, \ldots, t_k)]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho}$ est définie et
$$[\![f(t_1, \ldots, t_k)]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho} \;=\; [\![f]\!]^{\mathscr{M}}\big([\![t_1]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho}, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho}\big)\,.$$

Lemme 5 (Domaine de l'interprétation) — *Pour tout terme $t \in \mathcal{L}$ et pour toutes valuations $\rho, \rho' \in \mathrm{Val}_{\mathscr{M}}$:*

1. *La dénotation $[\![t]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho}$ est définie si et seulement si $FV(t) \subseteq \mathrm{dom}(\rho)$;*
2. *Si $\rho \sim_{FV(t)} \rho'$, alors $[\![t]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho} = [\![t]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho'}$.*

Preuve. Par récurrence sur le terme t. □

Lemme 6 (Substitutivité) — *Pour tous termes $t, u \in \mathcal{L}$, pour toute variable $x \in \mathcal{X}$ et pour toute valuation ρ, si les dénotations $[\![u]\!]_\rho$ et $[\![t]\!]_{\rho, x \leftarrow [\![u]\!]_\rho}$ sont toutes les deux définies, alors la dénotation $[\![t\{x := u\}]\!]_\rho$ est définie et*

$$[\![t\{x := u\}]\!]_\rho \;=\; [\![t]\!]_{\rho, x \leftarrow [\![u]\!]_\rho} .$$

Preuve. Par récurrence sur le terme t. □

Définition 9 (Interprétation des formules) — À toute formule $\phi \in \mathcal{L}$ on associe une fonction partielle $[\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_* : \mathrm{Val}_{\mathscr{M}} \rightharpoonup \mathbb{B}$ qui à chaque valuation ρ de son domaine de définition associe un élément de $\mathbb{B}$ noté $[\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho$, qu'on appelle la *dénotation* de ϕ dans $\mathscr{M}$ relativement à la valuation ρ. Cette fonction est construite par récurrence sur ϕ à partir des clauses suivantes :

1. Si les dénotations $[\![t_1]\!]^{\mathscr{M}}_\rho, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathscr{M}}_\rho$ sont définies et si p est un symbole de prédicat d'arité k, alors la dénotation $[\![p(t_1, \ldots, t_k)]\!]^{\mathscr{M}}_\rho$ est définie et
$$[\![p(t_1, \ldots, t_k)]\!]^{\mathscr{M}}_\rho \;=\; [\![p]\!]^{\mathscr{M}}\big([\![t_1]\!]^{\mathscr{M}}_\rho, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathscr{M}}_\rho\big) .$$
2. La dénotation $[\![\bot]\!]^{\mathscr{M}}_\rho$ est toujours définie et
$$[\![\bot]\!]^{\mathscr{M}}_\rho \;=\; 0 .$$
3. Si la dénotation $[\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho$ est définie, alors la dénotation $[\![\neg\phi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho$ est définie et
$$[\![\neg\phi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho \;=\; \neg[\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho .$$
4. Si les dénotations $[\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho$ et $[\![\psi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho$ sont toutes les deux définies, alors la dénotation $[\![\phi \vee \psi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho$ est définie et
$$[\![\phi \vee \psi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho \;=\; [\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho \vee [\![\psi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho .$$
5. Si pour tout $v \in \mathscr{M}$ la dénotation $[\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho, x \leftarrow v}$ est définie, et si l'ensemble de ces dénotations (lorsque v parcourt $\mathscr{M}$) admet une borne supérieure dans $\mathbb{B}$, alors la dénotation $[\![\exists x\, \phi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho$ est définie et
$$[\![\exists x\, \phi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho \;=\; \bigvee_{v \in \mathscr{M}} [\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho, x \leftarrow v} .$$

On notera que contrairement à ce qu'on observe pour les termes, il ne suffit pas que la valuation ρ soit définie sur l'ensemble des variables libres de la formule ϕ pour que la dénotation $[\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho$ soit définie. Il faut encore que toutes les bornes supérieures nécessaires pour calculer les dénotations des sous-formules existentielles de ϕ existent (clause 5). On peut néanmoins vérifier que :

Lemme 7 (Domaine de l'interprétation) — *Pour toute formule $\phi \in \mathcal{L}$ et pour toutes valuations $\rho, \rho' \in \mathrm{Val}_{\mathscr{M}}$:*

1. *Si la dénotation $[\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho$ est définie, alors $FV(\phi) \subseteq \mathrm{dom}(\rho)$;*
2. *Si $\rho \sim_{FV(t)} \rho'$ et si la dénotation $[\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho$ est définie, alors la dénotation $[\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho'}$ est définie et $[\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_\rho = [\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho'}$.*

Preuve. Par récurrence sur la formule ϕ. □

Lemme 8 (Substitutivité) — *Pour toute formule ϕ, pour tout terme $u \in \mathcal{L}$, pour toute variable $x \in \mathcal{X}$ et pour tout $\rho \in \mathrm{Val}_{\mathscr{M}}$, si les dénotations $[\![u]\!]_\rho$ et $[\![\phi]\!]_{\rho,x\leftarrow[\![u]\!]_\rho}$ sont définies, alors la dénotation $[\![\phi\{x := u\}]\!]_\rho$ est définie et*

$$[\![\phi\{x := u\}]\!]_\rho \;=\; [\![\phi]\!]_{\rho,x\leftarrow[\![u]\!]_\rho}\,.$$

Preuve. Par récurrence sur la formule ϕ. □

2.3 Modèles et validité

Les définitions de la section précédente font apparaître une dissymétrie dans l'interprétation des termes et des formules, dans la mesure où

$$\begin{array}{lrcl} & [\![t]\!]_\rho^{\mathscr{M}} \text{ définie} & \Leftrightarrow & FV(t) \subseteq \mathrm{dom}(\rho) \\ \text{tandis que} & [\![\phi]\!]_\rho^{\mathscr{M}} \text{ définie} & \Rightarrow & FV(\phi) \subseteq \mathrm{dom}(\rho)\,. \end{array}$$

Dans le cas où $\mathbb{B}$ est une algèbre de Boole complète, cette dissymétrie disparaît et on vérifie aisément que l'implication ci-dessus (pour les formules) devient une équivalence logique. Ce qui justifie la définition suivante :

Définition 10 (Modèles) — On dit qu'un prémodèle $\mathscr{M}$ du langage $\mathcal{L}$ sur l'algèbre de Boole $\mathbb{B}$ est un *modèle* si la fonction d'interprétation des formules y est totale, en ce sens que pour toute formule $\phi \in \mathcal{L}$ et pour toute valuation ρ telle que $FV(\phi) \subseteq \mathrm{dom}(\rho)$, la dénotation $[\![\phi]\!]_\rho^{\mathscr{M}}$ est définie.

D'après la remarque qui précède, tout prémodèle sur une algèbre de Boole complète est un modèle. Les modèles ordinaires sont donc des modèles booléens sur l'algèbre de Boole $2 = \{0; 1\}$.

Plus généralement, si $\mathscr{M}$ est un modèle ordinaire et si $i : 2 \to \mathbb{B}$ désigne l'unique morphisme de 2 vers $\mathbb{B}$ (où $\mathbb{B}$ est une algèbre de Boole quelconque), le prémodèle $i(\mathscr{M})$ constitue un modèle de $\mathcal{L}$ sur l'algèbre de Boole $\mathbb{B}$. On vérifie par ailleurs que

$$[\![\phi]\!]_\rho^{i(M)} \;=\; i([\![\phi]\!]_\rho^{\mathscr{M}})$$

pour toute formule ϕ et pour toute valuation ρ telle que $FV(\phi) \subseteq \mathrm{dom}(\rho)$, ce qui permet de considérer un modèle ordinaire comme un modèle sur n'importe quelle algèbre de Boole (en tenant compte du fait que les valeurs de vérité 0 et 1 sont identifiées dans le cas où $\mathbb{B}$ est l'algèbre de Boole dégénérée).

La propriété de commutation $[\![\phi]\!]^{f(\mathscr{M})} = f([\![\phi]\!]^{\mathscr{M}})$ n'est en général pas vraie pour un morphisme $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ quelconque (en supposant que $\mathscr{M}$ est un modèle booléen sur $\mathbb{B}$). Nous étudierons à la section 2.5 les conditions dans lesquelles il est possible d'établir une telle propriété.

Proposition 7 (Validité) — *Si le séquent $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi_1, \ldots, \psi_p$ est dérivable en calcul des séquents classique, alors pour toute algèbre de Boole $\mathbb{B}$, pour tout modèle $\mathscr{M}$ du langage $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{B}$ et pour toute valuation ρ définie sur les variables libres des formules $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi_1, \ldots, \psi_p$ on a*

$$\neg[\![\phi_1]\!]_\rho^{\mathscr{M}} \vee \cdots \vee \neg[\![\phi_n]\!]_\rho^{\mathscr{M}} \vee [\![\psi_1]\!]_\rho^{\mathscr{M}} \vee \cdots \vee [\![\psi_p]\!]_\rho^{\mathscr{M}} \;=\; 1\,.$$

Étant donné un modèle booléen $\mathscr{M}$ sur une algèbre de Boole $\mathbb{B}$ et une formule ϕ, on dit que ϕ est *valide* dans $\mathscr{M}$ et on note $\mathscr{M} \models \phi$ si pour toute valuation ρ telle que $FV(\phi) \subseteq \mathrm{dom}(\rho)$ on a $[\![\phi]\!]_\rho^{\mathscr{M}} = 1$. D'après ce qui précède, on a donc $\mathscr{M} \models \phi$ pour toute tautologie classique ϕ.

Définition 11 (Modèles d'une théorie) — Soit $\mathcal{T}$ une théorie du premier ordre construite sur le langage $\mathcal{L}$. On dit qu'un modèle booléen $\mathscr{M}$ du langage $\mathcal{L}$ est un *modèle de la théorie* $\mathcal{T}$ si pour chaque axiome ϕ de $\mathcal{T}$ on a $\mathscr{M} \models \phi$.

D'après la Prop. 7, il est clair que :

Proposition 8 (Validité) — *Si ϕ est un théorème de $\mathcal{T}$, alors ϕ est valide dans tous les modèles booléens de la théorie $\mathcal{T}$.*

Corollaire 1 — *Si une théorie $\mathcal{T}$ admet un modèle booléen sur une algèbre de Boole non dégénérée, alors $\mathcal{T}$ est cohérente.*

On peut également établir la réciproque, à condition d'exclure les modèles booléens sur l'algèbre de Boole dégénérée (qui valident toutes les formules) :

Proposition 9 (Complétude) — *Soit $\mathbb{B}$ une algèbre de Boole non dégénérée.*

1. *Si la théorie $\mathcal{T}$ est cohérente, alors elle admet un modèle sur $\mathbb{B}$;*
2. *Si $\mathscr{M} \models \phi$ pour tout modèle $\mathscr{M}$ de $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{B}$, alors $\mathcal{T} \vdash \phi$.*

Preuve. Conséquence immédiate du théorème de complétude au sens usuel, en utilisant le fait que chaque modèle ordinaire peut être vu comme un modèle sur l'algèbre de Boole $\mathbb{B}$. □

Dans le cas où $\mathcal{T}$ est une théorie contenant l'arithmétique de Peano (PA), le premier théorème d'incomplétude de Gödel implique qu'il n'existe aucun modèle (au sens usuel) capturant exactement la prouvabilité dans $\mathcal{T}$, en raison de la présence de formules closes qui sont indécidables dans $\mathcal{T}$. Nous verrons à la section 2.6 que ce n'est plus le cas dans les modèles booléens, puisque pour chaque théorie cohérente $\mathcal{T}$ il est possible de construire un modèle booléen particulier (sur une algèbre de Boole dépendant de $\mathcal{T}$) qui capture exactement la prouvabilité dans la théorie $\mathcal{T}$.

Conventions de notation Il est souvent commode de distinguer parmi les variables libres d'une formule ϕ celles qui jouent le rôle de variables de celles qui jouent le rôle de paramètres. (Il s'agit d'une distinction purement conventionnelle.) On utilise alors la notation $\phi \equiv \phi(x_1, \dots, x_n)$ pour indiquer que $x_1, \dots, x_n$ jouent le rôle des variables dans ϕ tandis que les autres variables libres de ϕ (non mentionnées) jouent le rôle de paramètres.

Étant donnés une formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$, des points $u_1, \dots, u_n \in \mathscr{M}$ d'un modèle $\mathscr{M}$ sur une algèbre de Boole quelconque et une valuation ρ définie (au moins) sur les paramètres de $\phi(x_1, \dots, x_n)$, on note

$$[\![\phi(u_1, \dots, u_n)]\!]_\rho^{\mathscr{M}} \;=\; [\![\phi(x_1, \dots, x_n)]\!]_{\rho, x_1 \leftarrow u_1, \dots, x_n \leftarrow u_n}^{\mathscr{M}} .$$

(La même convention d'écriture s'applique également aux termes.)

Par exemple, si le langage $\mathcal{L}$ dispose d'un symbole de prédicat « $=$ » pour l'égalité, on notera

$$[\![u = v]\!]^{\mathscr{M}} \;=\; [\![x = y]\!]_{x \leftarrow u, y \leftarrow v}^{\mathscr{M}}$$

pour tous $u, v \in \mathscr{M}$, où x et y sont des variables distinctes quelconques. (Cette notation ne dépend pas du choix des variables x et y.)

2.4 Modèles booléens et théories égalitaires

Définition 12 (Relation d'équivalence compatible) — Soit $\mathscr{M}$ un modèle booléen de $\mathcal{L}$ sur une algèbre de Boole $\mathbb{B}$. On dit qu'une relation d'équivalence $u \sim v$ sur $\mathscr{M}$ est *compatible* avec la structure de $\mathscr{M}$ si :

- $[\![f]\!]^{\mathscr{M}}(u_1, \ldots, u_k) \sim [\![f]\!]^{\mathscr{M}}(v_1, \ldots, v_k)$ pour tout symbole de fonction f d'arité k et pour tous $u_1 \sim v_1, \ldots, u_k \sim v_k$ $(\in \mathscr{M})$;
- $[\![p]\!]^{\mathscr{M}}(u_1, \ldots, u_k) = [\![p]\!]^{\mathscr{M}}(v_1, \ldots, v_k)$ pour tout symbole de prédicat p d'arité k et pour tous $u_1 \sim v_1, \ldots, u_k \sim v_k$ $(\in \mathscr{M})$.

Par une récurrence immédiate, la compatibilité de la relation d'équivalence $u \sim v$ avec la structure de $\mathscr{M}$ implique que pour tout $u, v \in \mathscr{M}$:

- $u \sim v$ entraîne $[\![t(u)]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho} \sim [\![t(v)]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho}$ pour tout terme $t(x)$ et pour toute valuation ρ définie sur les paramètres de $t(x)$;
- $u \sim v$ entraîne $[\![\phi(u)]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho} = [\![\phi(v)]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho}$ pour toute formule $\phi(x)$ et pour toute valuation ρ définie sur les paramètres de $\phi(x)$.

(Ces implications s'étendent immédiatement à des termes et à des formules ayant un nombre de variables arbitraires.)

Dans ce cas, on peut munir l'ensemble quotient $\mathscr{M}/\!\sim$ d'une structure de prémodèle booléen sur $\mathbb{B}$ en posant

$$\begin{array}{rcl} [\![f]\!]^{\mathscr{M}/\sim}([u_1], \ldots, [u_k]) & = & [[\![f]\!]^{\mathscr{M}}(u_1, \ldots, u_k)] \\ [\![p]\!]^{\mathscr{M}/\sim}([u_1], \ldots, [u_k]) & = & [\![p]\!]^{\mathscr{M}}(u_1, \ldots, u_k) \end{array}$$

et en notant $[u]$ la classe d'équivalence d'un point $u \in \mathscr{M}$. (Ces définitions ne dépendent que des classes d'équivalences des points $u_1, \ldots, u_k \in \mathscr{M}$ et pas des points eux-mêmes.) On vérifie alors par une induction immédiate que le prémodèle $\mathscr{M}/\!\sim$ est un modèle et que pour tout terme $t(x_1, \ldots, x_k)$ sans paramètres et pour toute formule $\phi(x_1, \ldots, x_k)$ sans paramètres on a

$$\begin{array}{rcl} [\![t([u_1], \ldots, [u_k])]\!]^{\mathscr{M}/\sim} & = & [[\![t(u_1, \ldots, u_k)]\!]^{\mathscr{M}}] \\ [\![\phi([u_1], \ldots, [u_k])]\!]^{\mathscr{M}/\sim} & = & [\![\phi(u_1, \ldots, u_k)]\!]^{\mathscr{M}} \end{array}$$

pour tous $u_1, \ldots, u_k \in \mathscr{M}$.

Cas d'une théorie égalitaire Une théorie $\mathcal{T}$ est une *théorie égalitaire* si elle dispose d'un prédicat binaire d'égalité « $=$ » pour lequel on a :

1. $\mathcal{T} \vdash x = x$
2. $\mathcal{T} \vdash x = y \wedge \phi(x) \Rightarrow \phi(y)$ pour toute formule $\phi(x)$;

ce qui entraîne notamment que :

3. $\mathcal{T} \vdash x = y \Rightarrow y = x$
4. $\mathcal{T} \vdash x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$.

Si $\mathscr{M}$ est un modèle booléen de la théorie $\mathcal{T}$ (sur une algèbre de Boole quelconque), ces relations se traduisent dans $\mathscr{M}$ par :

1. $[\![u = u]\!]^{\mathscr{M}} = 1$
2. $[\![u = v]\!]^{\mathscr{M}} \wedge [\![\phi(u)]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho} \leq [\![\phi(v)]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho}$
3. $[\![u = v]\!]^{\mathscr{M}} = [\![v = u]\!]^{\mathscr{M}}$
4. $[\![u = v]\!]^{\mathscr{M}} \wedge [\![v = w]\!]^{\mathscr{M}} \leq [\![u = w]\!]^{\mathscr{M}}$

pour tous $u, v \in \mathscr{M}$, pour toute formule $\phi(x)$ et pour toute valuation ρ définie sur les paramètres de $\phi(x)$.

On définit alors une relation binaire $u \sim v$ sur $\mathscr{M}$ en posant

$$u \sim v \quad \equiv \quad [\![u = v]\!]^{\mathscr{M}} = 1$$

pour tous $u, v \in \mathscr{M}$. On vérifie aisément à l'aide des points 1. à 4. que la relation $u \sim v$ est une relation d'équivalence compatible avec la structure du modèle $\mathscr{M}$, ce qui permet de considérer le modèle quotient $\mathscr{M}/{\sim}$. Dans ce nouveau modèle booléen (sur la même algèbre de Boole), on a pour tous $u, v \in \mathscr{M}/{\sim}$:

$$[\![u = v]\!]^{\mathscr{M}/\sim} = 1 \qquad \text{ssi} \qquad u = v\,.$$

2.5 Image d'un modèle par un morphisme

Soient $\mathscr{M}$ un modèle de $\mathcal{L}$ sur une algèbre de Boole $\mathbb{B}$, et $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ un morphisme de $\mathbb{B}$ vers une autre algèbre de Boole $\mathbb{B}'$. Nous avons vu à la section 2.1 qu'un tel morphisme induit une structure de prémodèle, noté $f(\mathscr{M})$, sur l'algèbre de Boole $\mathbb{B}'$. En règle générale, le prémodèle $f(\mathscr{M})$ n'est pas un modèle, car le morphisme f ne commute pas avec les bornes supérieures (et inférieures) infinitaires. Et même dans le cas où l'interprétation d'une formule ϕ est définie dans le prémodèle $f(\mathscr{M})$ relativement à une valuation $\rho \in \mathrm{Val}_{\mathscr{M}}$, on a en général $[\![\phi]\!]_\rho^{f(\mathscr{M})} \neq f([\![\phi]\!]_\rho^{\mathscr{M}})$ pour exactement la même raison.

Ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 13 (Commutation avec les sups arbitraires) — On dit qu'un morphisme $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ *commute avec les sups (et les infs) arbitraires* lorsque pour toute famille $(b_i)_{i \in I} \in \mathbb{B}^I$ admettant une borne supérieure dans $\mathbb{B}$, la famille $(f(b_i))_{i \in I} \in \mathbb{B}'^I$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{B}'$ et

$$f\Big(\bigvee_{i \in I} b_i\Big) \;=\; \bigvee_{i \in I} f(b_i)\,.$$

Bien entendu, cette propriété de commutation est automatiquement vérifiée dans le cas où $\mathbb{B}, \mathbb{B}'$ sont des algèbres de Boole complètes et $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ un morphisme d'algèbres de Boole complètes.

On démontre alors le résultat suivant :

Proposition 10 — *Si le morphisme $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ commute avec les bornes supérieures arbitraires, alors $f(\mathscr{M})$ est un modèle du langage $\mathcal{L}$ sur l'algèbre de Boole $\mathbb{B}'$, et pour toute formule ϕ on a*

$$[\![\phi]\!]_\rho^{f(\mathscr{M})} = f([\![\phi]\!]_\rho^{\mathscr{M}})$$

(en supposant la valuation ρ définie sur les variables libres de ϕ).

Malheureusement, l'hypothèse de commutation avec les bornes supérieures arbitraires est trop forte dans de nombreux cas, notamment celui où $f : \mathbb{B} \to 2$ est la surjection canonique associée à un ultrafiltre $U \subseteq \mathbb{B}$. Pour cela, on introduit une condition supplémentaire sur $\mathscr{M}$ qui est la suivante :

Définition 14 (Modèles pleins) — On dit que le modèle $\mathscr{M}$ (sur $\mathbb{B}$) est *plein* si pour toute formule $\phi(x)$ et pour toute valuation ρ définie sur les paramètres de $\phi(x)$, il existe un élément $u_0 \in \mathscr{M}$ tel que

$$[\![\phi(u_0)]\!]_\rho^{\mathscr{M}} \;=\; \bigvee_{u\in\mathscr{M}} [\![\phi(u)]\!]_\rho^{\mathscr{M}} \quad (=\; [\![\exists x\,\phi(x)]\!]_\rho^{\mathscr{M}})\,.$$

Autrement dit, l'hypothèse de plénitude indique que la borne supérieure qui définit la dénotation du quantificateur existentiel est atteinte sur un point du modèle dans tous les cas. On notera en particulier que tous les modèles au sens usuel sont pleins. On vérifie alors que :

Proposition 11 — *Si le modèle $\mathscr{M}$ (sur $\mathbb{B}$) est plein et si $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ est un morphisme quelconque, alors $f(\mathscr{M})$ est un modèle plein du langage $\mathcal{L}$ sur l'algèbre de Boole $\mathbb{B}'$, et pour toute formule ϕ on a*

$$[\![\phi]\!]_\rho^{f(\mathscr{M})} = f([\![\phi]\!]_\rho^{\mathscr{M}})$$

(en supposant la valuation ρ définie sur les variables libres de ϕ).

Corollaire 2 (Transfert) — *Soient $\mathscr{M}$ un modèle booléen d'une théorie $\mathcal{T}$ sur une algèbre de Boole $\mathbb{B}$ et $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ un morphisme de $\mathbb{B}$ vers une autre algèbre de Boole $\mathbb{B}'$. Si $\mathscr{M}$ est plein ou si f commute avec les bornes supérieures arbitraires, alors $f(\mathscr{M})$ est un modèle de $\mathcal{T}$ sur l'algèbre de Boole $\mathbb{B}'$.*

Quotient d'un modèle booléen par un ultrafiltre Soit $\mathscr{M}$ un modèle booléen plein d'une théorie $\mathcal{T}$ sur une algèbre de Boole $\mathbb{B}$ et $U \subseteq \mathbb{B}$ un ultrafiltre. D'après la proposition qui précède, $\pi_U(\mathscr{M})$ est un modèle au sens usuel de la théorie $\mathcal{T}$, que l'on désigne également par $\mathscr{M}/U$. On notera qu'avec cette définition, l'écriture $\mathscr{M}/U$ ne réfère pas à un quotient, mais à l'image du modèle $\mathscr{M}$ par le morphisme $\pi_U : \mathbb{B} \to 2$. En particulier, les modèles $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}/U$ sont tous les deux construits sur le même ensemble de base.

Cependant, dans le cas où $\mathcal{T}$ est une théorie égalitaire, l'effondrement des valeurs de vérité qui résulte de la composition des structures de $\mathscr{M}$ avec le morphisme $\pi_U : \mathbb{B} \to 2$ peut amener à créer dans le modèle induit $\pi_U(\mathscr{M})$ de nombreuses relations d'égalité $[\![u = v]\!]^{\pi_U(\mathscr{M})} = 1$ pour des objets u et v distincts au sens du modèle initial $\mathscr{M}$ (c'est-à-dire tels que $[\![u = v]\!]^{\mathscr{M}} \neq 1$). Pour se ramener à un modèle égalitaire (i.e. dans lequel le prédicat d'égalité est interprétée par l'égalité), on quotiente le modèle $\pi_U(\mathscr{M})$ par la relation d'équivalence $u \sim v$ induite par l'égalité (cf section 2.4), ici donnée par

$$u \sim v \quad\equiv\quad [\![u = v]\!]^{\mathscr{M}} \in U$$

pour tous $u, v \in \mathscr{M}$. Dans le cas d'une théorie égalitaire, on définira donc $\mathscr{M}/U$ par $\mathscr{M}/U = \pi_U(\mathscr{M})/\!\sim$ plutôt que par $\mathscr{M}/U = \pi_U(\mathscr{M})$.

2.6 Produit d'une famille de modèles

Soit I un ensemble. Pour chaque indice $i \in I$, on suppose donné un modèle $\mathscr{M}_i$ du langage $\mathcal{L}$ sur une algèbre de Boole $\mathbb{B}_i$.

Le produit cartésien $\mathscr{M} = \prod_{i \in I} \mathscr{M}_i$ peut alors être muni d'une structure de modèle de $\mathcal{L}$ sur l'algèbre produit $\mathbb{B} = \prod_{i \in I} \mathbb{B}_i$ en posant

$$\begin{array}{lrcl} & [\![f]\!]^{\mathscr{M}}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k) & = & \Big([\![f]\!]^{\mathscr{M}_i}\big((\boldsymbol{u}_1)_i, \ldots, (\boldsymbol{u}_k)_i\big)\Big)_{i \in I} \\ \text{et} & [\![p]\!]^{\mathscr{M}}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k) & = & \Big([\![p]\!]^{\mathscr{M}_i}\big((\boldsymbol{u}_1)_i, \ldots, (\boldsymbol{u}_k)_i\big)\Big)_{i \in I} \end{array}$$

pour tout symbole de fonction f, pour tout symbole de prédicat p d'arité k et pour tous $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in \mathscr{M} = \prod_{i \in I} \mathscr{M}_i$. On vérifie alors par une induction immédiate que les interprétations d'un terme t et d'une formule ϕ sont bien définies pour toute valuation $\rho \in \mathrm{Val}_{\mathscr{M}}$ telle que $FV(t), FV(\phi) \subseteq \mathrm{dom}(\rho)$, et qu'on a en outre les égalités

$$[\![t]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho} \;=\; \big([\![t]\!]^{\mathscr{M}_i}_{\pi_i \circ \rho}\big)_{i \in I} \qquad \text{et} \qquad [\![\phi]\!]^{\mathscr{M}}_{\rho} \;=\; \big([\![\phi]\!]^{\mathscr{M}_i}_{\pi_i \circ \rho}\big)_{i \in I}$$

en désignant par $\pi_i : \mathscr{M} \to \mathscr{M}_i$ la projection de $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{M}_i$.

On vérifie aisément que :

Proposition 12 (Passage au produit) — *Pour toute formule $\phi \in \mathcal{L}$ et pour toute théorie $\mathcal{T}$ construite sur le langage $\mathcal{L}$:*

1. *$\mathscr{M} \models \phi$ si et seulement si $\mathscr{M}_i \models \phi$ pour tout $i \in I$;*
2. *$\mathscr{M} \models \mathcal{T}$ si et seulement si $\mathscr{M}_i \models \mathcal{T}$ pour tout $i \in I$;*
3. *$\mathscr{M}$ est plein si et seulement si $\mathscr{M}_i$ est plein pour tout $i \in I$.*

Produit de modèles ordinaires Dans le cas particulier où les modèles $\mathscr{M}_i$ sont tous des modèles au sens usuel (i.e. $\mathbb{B}_i = 2$ pour tout $i \in I$), le modèle produit $\mathscr{M}$ est un modèle booléen sur l'algèbre de Boole $\mathbb{B} = \mathfrak{P}(I)$.

Un modèle booléen capturant la prouvabilité Soit $\mathcal{T}$ une théorie du premier ordre cohérente, dont l'ensemble des formules closes est noté Φ. À chaque formule $\phi \in \Phi$, on associe un modèle $\mathscr{M}_\phi$ (au sens usuel) de la théorie $\mathcal{T}$ tel que si $\mathcal{T} \not\vdash \phi$, alors $\mathscr{M}_\phi \models \neg\phi$: il suffit de prendre n'importe quel modèle de $\mathcal{T}$ dans le cas où $\mathcal{T} \vdash \phi$, et dans le cas où $\mathcal{T} \not\vdash \phi$, il suffit de prendre n'importe quel modèle de $\mathcal{T} + \neg\phi$ (qui est une théorie cohérente).

On considère alors le modèle produit $\mathscr{M} = \prod_{\phi \in \Phi} \mathscr{M}_\phi$ sur l'algèbre de Boole $\mathbb{B} = \mathfrak{P}(\Phi)$. Par construction, on a pour toute formule close ϕ :

$$\mathscr{M} \models \phi \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{T} \vdash \phi\,.$$

(Dans le cas où $\mathcal{T} \vdash \phi$, on a bien évidemment $\mathscr{M} \models \phi$. Tandis que dans le cas où $\mathcal{T} \not\vdash \phi$, on a $\mathscr{M}_\phi \models \neg\phi$ d'où $\mathscr{M} \not\models \Phi$ d'après la Prop. 12.)

On a ainsi construit un modèle booléen $\mathscr{M}$ sur $\mathfrak{P}(\Phi)$ qui capture très exactement la notion de prouvabilité dans la théorie $\mathcal{T}$.

2.7 Ultraproduits et ultrapuissances

Ultraproduit Soit $(\mathscr{M}_i)_{i \in I}$ une famille de modèles de la théorie $\mathcal{T}$ (au sens usuel) et U un ultrafiltre sur l'algèbre de Boole $\mathfrak{P}(I)$. On appelle *ultraproduit* de la famille de modèles $(\mathscr{M}_i)_{i \in I}$ suivant l'ultrafiltre U et on note $(\prod_i \mathscr{M}_i)/U$ le quotient $\pi_U(\prod_i \mathscr{M}_i)/{\sim}$, où $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$ désigne la relation d'équivalence définie par

$$\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v} \quad \equiv \quad \{i \in I \;:\; \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i\} \in U$$

pour tous $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \prod_i \mathscr{M}_i$. (On vérifie aisément que cette relation d'équivalence est compatible avec la structure du modèle $\pi_U(\mathscr{M})$.)

Dans le cas où $\mathcal{T}$ est une théorie égalitaire et où l'égalité est interprétée par elle-même dans chaque modèle $\mathscr{M}_i$ $(i \in I)$, l'ultraproduit $(\prod_i \mathscr{M}_i)/U$ est précisément le quotient du produit $\prod_i \mathscr{M}_i$ par l'ultrafiltre U au sens où nous l'avons défini à la fin de la section 2.5 pour les théories égalitaires. En particulier, l'égalité est interprétée par elle-même dans l'ultraproduit (grâce au quotient).

Dans le cas où U est un ultrafiltre trivial, c'est-à-dire de la forme

$$U \ = \ \{J \in \mathfrak{P}(I) \ : \ i_0 \in J\}$$

pour un certain indice $i_0 \in I$, on a $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$ si et seulement si $\boldsymbol{u}_{i_0} = \boldsymbol{v}_{i_0}$ pour tous $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \prod_i \mathscr{M}_i$. Par conséquent, la projection $\pi_{i_0} : \prod_i \mathscr{M}_i \to \mathscr{M}_{i_0}$ définit par passage au quotient un isomorphisme entre l'ultraproduit $(\prod_i \mathscr{M}_i)/U$ et le modèle $\mathscr{M}_{i_0}$, ce qui retire tout intérêt à la construction.

En topologie et en analyse, la notion de filtre sert à donner un sens formel à des notions telles que « suffisamment grand », « suffisamment petit », « suffisamment proche », etc. et intervient naturellement dans la définition moderne des notions de limite et de voisinage. La notion d'ultraproduit reprend cette intuition et donne un sens formel à l'idée qu'une formule ϕ puisse être vraie dans un ensemble de modèles $\mathscr{M}_i$ $(i \in I)$ qui est « suffisamment grand » :

Proposition 13 (Caractérisation de la validité) — *Soit* $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ *une formule de* $\mathcal{L}$ *de variables libres* $x_1, \ldots, x_n$. *Pour tous* $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \prod_i \mathscr{M}_i$ *les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $(\prod_i \mathscr{M}_i)/U \models \phi([\boldsymbol{u}_1], \ldots, [\boldsymbol{u}_n])$.
2. *L'ensemble des indices* $i \in I$ *tels que* $\mathscr{M}_i \models \phi((\boldsymbol{u}_1)_i, \ldots, (\boldsymbol{u}_n)_i)$ *est un élément de l'ultrafiltre* U.
3. *Il existe un ensemble d'indices* $J \in U$ *tel que* $\mathscr{M}_i \models \phi((\boldsymbol{u}_1)_i, \ldots, (\boldsymbol{u}_n)_i)$ *pour tout indice* $i \in J$.

On notera que cette caractérisation repose de manière essentielle sur la notion d'ultrafiltre, qui combine à la fois la notion de filtre (issue de l'analyse) et la propriété de maximalité qui permet d'assurer la commutation avec tous les connecteurs logiques (et notamment : la disjonction et la négation).

Ultrapuissance L'*ultrapuissance* est le cas particulier de l'utraproduit où toutes les composantes $\mathscr{M}_i$ sont égales. Formellement, l'ultrapuissance d'un modèle $\mathscr{M}$ (du langage $\mathcal{L}$ ou d'une théorie $\mathcal{T}$ donnée) par un ensemble $I \neq \varnothing$ suivant un ultrafiltre $U \subseteq \mathfrak{P}(I)$ est notée $\mathscr{M}^I/U$ (voire $\mathscr{M}^U$).

Le modèle de départ $\mathscr{M}$ se plonge dans l'ultrapuissance $\mathscr{M}^I/U$ à travers la fonction qui à tout élément $u \in \mathscr{M}$ associe la classe $[\bar{u}]$ de la fonction constante $\bar{u} \in \mathscr{M}^I$ (i.e. telle que $(\bar{u})_i = u$ pour tout $i \in I$). Les images des éléments de $\mathscr{M}$ par ce plongement sont appelés les *éléments standard* de $\mathscr{M}^I/U$; les autres éléments de $\mathscr{M}^I/U$ sont dits *non standard*.

Pour toute formule $\phi(x_1, \ldots, u_k)$ (sans paramètres) du langage $\mathcal{L}$ et pour tous $u_1, \ldots, u_k \in \mathscr{M}$ on a

$$\begin{aligned} \mathscr{M}^I/U \models \phi([\bar{u}_1], \ldots, [\bar{u}_k]) \quad &\Leftrightarrow \quad \{i \in I \ : \ \mathscr{M} \models \phi((\bar{u}_1)_i, \ldots, (\bar{u}_k)_i)\} \in U \\ &\Leftrightarrow \quad \{i \in I \ : \ \mathscr{M} \models \phi(u_1, \ldots, u_k)\} \in U \\ &\Leftrightarrow \quad \mathscr{M} \models \phi(u_1, \ldots, u_k) \end{aligned}$$

Par conséquent :

Proposition 14 (Équivalence élémentaire) — *Les modèles $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}^I/U$ sont élémentairement équivalents pour les formules du langage $\mathcal{L}$.*

Ces deux modèles sont en revanche très loin d'être isomorphes en général, sauf dans le cas (inintéressant) où U est un ultrafiltre trivial.

Le prédicat $\mathtt{st}$ Pour refléter la distinction entre les éléments standard et les éléments non standard de $\mathscr{M}^I/U$, il est naturel d'étendre le langage $\mathcal{L}$ avec un symbole de prédicat unaire $\mathtt{st}(x)$ (« x est standard ») interprété dans le modèle $\mathscr{M}^I/U$ par

$$\mathscr{M}^I/U \models \mathtt{st}(\boldsymbol{u}) \qquad \equiv \qquad \exists v \in \mathscr{M} \quad \boldsymbol{u} = [\bar{v}]$$

pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathscr{M}^I/U$. (La notation $\mathscr{M}^I/U \models \phi(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ s'étend ensuite à toutes les formules du langage $\mathcal{L} + \mathtt{st}$ de la manière habituelle.)

La caractérisation de la validité d'une formule dans $\mathscr{M}^I/U$ par

$$\mathscr{M}^I/U \models \phi([\boldsymbol{u}_1], \ldots, [\boldsymbol{u}_n]) \quad \Leftrightarrow \quad \exists J \in U \ \ \forall i \in J \ \ \mathscr{M} \models \phi((\boldsymbol{u}_1)_i, \ldots, (\boldsymbol{u}_n)_i)$$

(pour tous $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \in \mathscr{M}^I$) n'a de sens que pour les formules $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ du langage $\mathcal{L}$, c'est-à-dire uniquement pour les formules ne mentionnant pas le prédicat $\mathtt{st}$. (Comme ce symbole ne fait pas partie du langage du départ, la validité d'une formule utilisant ce symbole n'a pas de sens dans le modèle $\mathscr{M}$.) Pour les formules du langage étendu ($\mathcal{L}+\mathtt{st}$), on raisonne dans le modèle $\mathscr{M}^I/U$ comme dans n'importe quel modèle, en suivant la sémantique de Tarski :

$$\begin{array}{rcl}
\mathscr{M}^I/U \models \neg\phi & \text{ssi} & \mathscr{M}^I/U \not\models \phi \\
\mathscr{M}^I/U \models \phi \vee \psi & \text{ssi} & \mathscr{M}^I/U \models \phi \ \text{ ou } \ \mathscr{M}^I/U \models \psi \\
\mathscr{M}^I/U \models \exists x\, \phi(x) & \text{ssi} & \text{il existe } \boldsymbol{u} \in \mathscr{M}^I/U \text{ tel que } \mathscr{M}^I/U \models \phi(\boldsymbol{u}), \quad \text{etc.}
\end{array}$$

(Les deux modes de raisonnement étant équivalents pour les formules de $\mathcal{L}$.)

Le schéma de transfert Les formules du langage $\mathcal{L}$ (i.e. n'utilisant pas $\mathtt{st}$) sont appelées les *formules internes* tandis que les formules du langage $\mathcal{L} + \mathtt{st}$ sont appelées les *formules externes*. On remarque alors le phénomène suivant :

Lemme 9 (Principe de transfert) — *Soit $\phi(x, z_1, \ldots, z_n)$ une formule interne de variables libres $x, z_1, \ldots, z_n$ et $\boldsymbol{w}_1 = [\bar{w}_1], \ldots, \boldsymbol{w}_n = [\bar{w}_n]$ des éléments standard de $\mathscr{M}^I/U$. Si $\mathscr{M}^I/U \models \phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$ pour tout élément standard $\boldsymbol{u} = [\bar{u}]$, alors $\mathscr{M}^I/U \models \phi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$ pour tout $\boldsymbol{u} \in \mathscr{M}^I/U$.*

Preuve. Par hypothèse, on a $\mathscr{M}^I/U \models \phi([\bar{u}], [\bar{w}_1], \ldots, [\bar{w}_n])$ pour tout $u \in \mathscr{M}$, c'est-à-dire : $\mathscr{M} \models \phi(u, w_1, \ldots, w_n)$ pour tout $u \in \mathscr{M}$. Soit $\boldsymbol{u} \in \mathscr{M}^I$ une suite quelconque. Pour tout indice $i \in I$ on a $\mathscr{M} \models \phi(u_i, w_1, \ldots, w_n)$ d'après ce qui précède, d'où il ressort que $\mathscr{M}^I/U \models \phi([\boldsymbol{u}], [\bar{w}_1], \ldots, [\bar{w}_n])$ (car $I \in U$). □

D'un point de vue syntaxique, ce lemme exprime que pour toute formule interne ϕ de variables libres $x, z_1, \ldots, z_n$, la formule

(Transfert) $$\forall^{\mathtt{st}} z_1 \cdots \forall^{\mathtt{st}} z_n \ (\forall^{\mathtt{st}} x\, \phi \ \Rightarrow \ \forall x\, \phi)$$

est valide dans $\mathscr{M}^I/U$ (en notant : $\forall^{\mathtt{st}} x\, \phi(x) \equiv \forall x\, (\mathtt{st}(x) \Rightarrow \phi(x))$). Cette famille de formules (paramétrée par l'ensemble des formules internes) constitue un schéma d'axiomes qu'on appelle le *schéma de transfert.* Par contraposition, le schéma de transfert permet également de montrer que si une propriété interne (paramétrée par des objets standard) est vraie pour au moins un objet de l'univers, alors cette propriété est vraie pour au moins un objet standard :

$$\forall^{\mathtt{st}} z_1 \cdots \forall^{\mathtt{st}} z_n \ (\exists x\, \phi \ \Rightarrow \ \exists^{\mathtt{st}} x\, \phi)$$

(où ϕ est une formule interne de variables libres $x, z_1, \ldots, z_n$).

Le schéma de transfert est également équivalent au schéma suivant

$$\forall^{\mathtt{st}} z_1 \cdots \forall^{\mathtt{st}} z_n \ (\phi \ \Leftrightarrow \ \phi^{\mathtt{st}})$$

(où ϕ parcourt l'ensemble des formules internes de variables libres $z_1, \ldots, z_n$), en notant $\phi^{\mathtt{st}}$ la formule ϕ relativisée à la classe des objets standard, obtenue en remplaçant dans ϕ toutes les sous-formules de la forme $\exists x \cdots$ par $\exists^{\mathtt{st}} x \cdots$.

2.8 Application : l'hyperarithmétique de Peano

L'ensemble des hyperentiers naturels On note ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/U$, où $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, et où U est un ultrafiltre sur $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ qui prolonge le filtre de Fréchet (c'est-à-dire un ultrafiltre contenant toutes les parties cofinies de $\mathbb{N}$). Formellement, ${}^*\mathbb{N}$ est l'ensemble des classes d'équivalence des suites d'entiers pour la relation d'équivalence $\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v}$ définie par

$$\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{v} \quad \equiv \quad \{i \in \mathbb{N} \ : \ \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{v}_n\} \in U$$

pour toutes suites $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

L'ensemble des entiers naturels (c'est-à-dire les entiers standards) se plonge dans ${}^*\mathbb{N}$ par l'injection $n \mapsto [\bar{n}]$ qui à chaque entier $n \in \mathbb{N}$ associe la classe d'équivalence de la suite constante $\bar{n} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Le modèle ${}^*\mathbb{N}$ contient des entiers non standard, comme par exemple la (classe d'équivalence de la) suite identité $\boldsymbol{I} \in \mathbb{N}$ définie par $\boldsymbol{I}_i = i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, pour laquelle on montre aisément que $\boldsymbol{I} \not\sim \bar{n}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$${}^*\mathbb{N} \models \forall^{\mathtt{st}} x \ (x \neq \boldsymbol{I})\,.$$

Plus généralement, chaque fonction $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ et chaque relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ se prolongent en une fonction ${}^*f : {}^*\mathbb{N}^k \to {}^*\mathbb{N}$ et une relation ${}^*R \subseteq {}^*\mathbb{N}^k$ définies pour tous $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ par

$$\begin{aligned} {}^*f([\boldsymbol{u}_1], \ldots, [\boldsymbol{u}_k]) \quad &\equiv \quad \left[\big(f((\boldsymbol{u}_1)_i, \ldots, (\boldsymbol{u}_k)_i)\big)_{i \in \mathbb{N}}\right] \\ {}^*R([\boldsymbol{u}_1], \ldots, [\boldsymbol{u}_k]) \quad &\equiv \quad \{i \in \mathbb{N} \ : \ R((\boldsymbol{u}_1)_i, \ldots, (\boldsymbol{u}_k)_i)\} \in U \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, si ϕ est une formule du premier ordre construite à partir de symboles de fonction et de prédicat interprétés dans $\mathbb{N}$ par des fonctions f, g, etc. et des relations R, S, etc., alors on a

$$\mathbb{N} \models \phi \qquad \text{si et seulement si} \qquad {}^*\mathbb{N} \models \phi\,,$$

en interprétant dans ${}^*\mathbb{N}$ les symboles de fonction et de prédicat de ϕ par les fonctions ${}^*f$, ${}^*g$, etc. et les relations ${}^*R$, ${}^*S$, etc. correspondantes.

Par exemple, la relation ${}^*\!\leq$ induite par la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{N}$ et définie par

$$[\boldsymbol{u}]\ {}^*\!\leq [\boldsymbol{v}] \quad \equiv \quad \{i \in \mathbb{N}\ :\ \boldsymbol{u}_i \leq \boldsymbol{v}_i\} \in U$$

pour tous $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est une relation d'ordre *total* dans ${}^*\mathbb{N}$, contrairement à l'ordre produit sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dont elle est issue par passage au quotient.

En revanche, l'ordre strict ${}^*\!<$ correspondant (qui est aussi la relation sur ${}^*\mathbb{N}$ déduite de l'ordre strict usuel sur $\mathbb{N}$) n'est pas une relation bien fondée, car la propriété de bonne fondation, qui n'est pas exprimable par une formule du premier ordre, ne peut pas être transférée sur ${}^*\mathbb{N}$. Un contre-exemple est donné par la suite d'éléments non standards $(\boldsymbol{N}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$(\boldsymbol{N}_n)_i \ = \ \max(0,\ i^2 - ni) \qquad\qquad (i, n \in \mathbb{N})$$

et pour laquelle on a $[\boldsymbol{N}_{n+1}]\ {}^*\!< [\boldsymbol{N}_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cependant, pour toute formule *interne* $\phi(x)$ du langage de l'arithmétique on a bien évidemment :

$${}^*\mathbb{N} \ \models\ \forall x \left((\forall y < x\ \phi(y)) \Rightarrow \phi(x)\right) \ \Rightarrow\ \forall x\, \phi(x)\,.$$

(en interprétant $<$ par ${}^*\!<$ dans ${}^*\mathbb{N}$). Autrement dit, le schéma d'induction bien fondée (tout comme le schéma de récurrence habituel) ne sont transférables dans ${}^*\mathbb{N}$ que pour les formules internes. (De même pour l'existence d'un plus petit hyperentier satisfaisant une propriété interne donnée.)

Enfin, il est important de noter que

Lemme 10 (Segment initial) — *Dans ${}^*\mathbb{N}$, tout hyperentier inférieur ou égal à un entier standard est lui-même standard. Autrement dit : $\mathbb{N}$ est un segment initial de ${}^*\mathbb{N}$ pour l'ordre ${}^*\!\leq$.*

Preuve. Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tel que $[\boldsymbol{u}]\ {}^*\!\leq [\bar{n}]$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire tel que l'ensemble $F \equiv \{i \in I\ :\ \boldsymbol{u}_i \leq n\}$ est un élément de l'ultrafiltre U. Pour tout entier $0 \leq p \leq n$ on pose $F_p \equiv \{i \in I\ :\ \boldsymbol{u}_i = p\}$. Par construction on a donc $F_0 \cup \cdots \cup F_n = F \in U$, ce qui entraîne que $F_p \in U$ pour un certain indice $p \in \{0; \ldots; n\}$, d'où $[\boldsymbol{u}] = [\bar{p}]$. □

Par conséquent : ${}^*\mathbb{N} \models \forall^{\mathtt{st}} x\ \forall y\ (y \leq x \Rightarrow \mathtt{st}(y))$.

Une arithmétique non standard Les constructions que nous venons de présenter dans $\mathbb{N}$ (lesquelles s'étendent à $\mathbb{R}$ et même à n'importe quel modèle de la théorie des ensembles) sont à la base de l'*analyse non standard*, introduite par Robinson [4] afin de donner une légitimation mathématique au calcul infinitésimal tel qu'il était pratiqué par Leibniz, c'est-à-dire : comme un calcul sur les nombres infinitésimaux. Divers systèmes formels ont été proposés pour refléter dans la syntaxe les propriétés des modèles construits avec la technique des ultrapuissances. Le plus connu de ces systèmes est la *théorie des ensembles internes* (IST, pour : *Internal Set Theory*) de Nelson [3], qui étend (conservativement) le système ZFC avec trois schémas d'axiomes : le schéma d'idéalisation, le schéma de standardisation et le schéma de transfert.

Nous n'allons pas présenter ici le système IST complet (dont l'étude dépasse le cadre de cette introduction), mais une version spécialisée à l'arithmétique de Peano : le système hPA. Formellement, la théorie du premier ordre hPA est basée sur le langage de l'arithmétique de Peano (PA) étendu avec le symbole de prédicat st. Ses axiomes sont les axiomes de Peano (où le schéma de récurrence est restreint aux seules formules internes[2]) étendus avec trois nouveaux schémas : le schéma de transfert, le schéma d'idéalisation et le schéma de standardisation, adaptés ici au cadre de l'arithmétique.

Transfert Le *schéma de transfert* est le même que celui que nous avons présenté à la section 2.7, et dont nous avons déjà montré la validité :

$$(\text{Transfert}) \qquad \forall^{\mathtt{st}} z_1 \cdots \forall^{\mathtt{st}} z_n \ (\forall^{\mathtt{st}} x\, \phi \ \Rightarrow\ \forall x\, \phi)$$

(où ϕ désigne n'importe quelle formule interne de variables libres $x, z_1, \ldots, z_n$).[3]

Ce schéma implique en particulier que si une propriété standard (paramétrée par des entiers standard) est vérifiée par un entier et un seul, alors cet entier est lui-même standard. C'est par ce procédé qu'on montre que les fonctions définies dans la signature de l'arithmétique (successeur, addition, multiplication, etc.) envoient les entiers standard sur les entiers standard.

Idéalisation Le schéma de transfert ne permet évidemment pas de démontrer l'existence d'entiers non standard. Cette tâche est assurée par le *schéma d'idéalisation* dont l'énoncé est

$$(\text{Idéalisation}) \qquad \forall z_1 \cdots \forall z_n \ \big(\forall^{\mathtt{st}} n\ \exists y\ \forall x \le n\ \phi \ \ \Rightarrow\ \ \exists y\ \forall^{\mathtt{st}} x\ \phi\big)\,,$$

où ϕ désigne toute formule *interne* de variables libres $x, y, z_1, \ldots, z_n$. (La réciproque du schéma est trivialement vraie[4].)

Intuitivement, ce schéma exprime que si pour tout entier standard n on peut trouver, en fonction de n, un entier y (pas nécessairement standard) tel que la formule interne $\phi(x, y)$ (paramétrée par des entiers quelconques) est vraie pour tout $x \le n$, alors on peut trouver un entier y (en général non standard) tel que $\phi(x, y)$ *pour tout entier standard* x. Par exemple :

- Avec la formule $\phi(x, y) \equiv x \le y$, le schéma d'idéalisation permet de démontrer l'existence d'un entier y (forcément non standard) plus grand que tous les entiers standard.
- Avec la formule $\phi(x, y) \equiv (x \ne 0 \Rightarrow x|y)$, le schéma d'idéalisation permet de démontrer l'existence d'un entier y (forcément non standard) qui est divisible par tous les entiers standard non nuls ; etc.

Standardisation Le schéma de récurrence de l'arithmétique de Peano ne peut être utilisé dans hPA qu'avec une formule interne $\phi(x)$ — c'est le prix à payer

[2]Précisons que les axiomes de récurrence sont exprimés par des formules internes closes. On pourra donc les instancier avec des paramètres quelconques, standard ou non.

[3]Dans IST, le schéma de transfert combiné avec l'axiome d'extensionnalité (sous sa forme habituelle) permet de démontrer que deux ensembles standard sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments standard.

[4]Dans IST, le schéma d'idéalisation est : $\forall^{\mathtt{st}} \vec{z}\ \big(\forall^{\mathtt{stfin}} X\ \exists y\ \forall x \in X\ \phi \ \ \Leftrightarrow\ \ \exists y\ \forall^{\mathtt{st}} x\ \phi\big)$, où ϕ est une formule interne quelconque, et où $\forall^{\mathtt{stfin}}$ désigne la quantification universelle relativisée aux ensembles finis standard. (On notera que le schéma d'idéalisation de IST est formulé comme une équivalence logique et non comme une simple implication.) Ce schéma permet notamment de montrer que tout ensemble infini ou non standard admet au moins un élément non standard. Dans IST, tous les éléments d'un ensemble sont standard si et seulement si cet ensemble est fini et standard.

pour pouvoir conclure que la propriété $\phi(x)$ est vraie pour tout x, sans restriction. On peut cependant introduire un second schéma de récurrence qui porte sur toutes les formules externes, mais dont la conclusion est alors restreinte aux seuls entiers standard : c'est le *schéma de standardisation*, dont l'énoncé est

$$\text{(Standardisation)} \qquad \phi(0) \;\Rightarrow\; \forall^{\mathtt{st}} y\, (\phi(y) \Rightarrow \phi(s(y))) \;\Rightarrow\; \forall^{\mathtt{st}} x\, \phi(x)$$

pour toute formule externe ϕ (à paramètres quelconques). [5]

Le schéma de standardisation de hPA permet notamment de montrer que tout entier plus petit qu'un entier standard est lui-même standard. Il permet également de définir « le plus petit entier standard x tel que $\phi(x)$ » où $\phi(x)$ est une formule externe quelconque, vraie pour au moins un entier standard.

On démontre alors que :

Proposition 15 — ${}^*\mathbb{N} \models \mathrm{hPA}$

Nous avons déjà montré la validité du schéma de transfert à la section 2.7. La validité du schéma de standardisation résulte du principe de récurrence sur $\mathbb{N}$ dans le modèle. Toute la difficulté réside dans la preuve de validité du schéma d'idéalisation dans ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/U$, qui est laissée en exercice au lecteur.

Références

[1] J. L. Bell. *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.* Oxford, 1985.

[2] T. Jech. *Set theory, third millennium edition (revised and expanded).* Springer, 2002.

[3] E. Nelson. Internal set theory : A new approach to nonstandard analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83(6), November 1977.

[4] A. Robinson. *Selected papers of Abraham Robinson. Volume II. Nonstandard analysis and philosophy.* Yale University Press, 1979.

[5] Dans IST, le schéma de standardisation est un second schéma de compréhension, valable pour toutes les formules externes, mais dont la conclusion est limitée aux seuls objets standard. (Le schéma de compréhension de ZFC étant limité aux seules formules internes.) Son énoncé est : $\forall^{\mathtt{st}} a\ \exists^{\mathtt{st}} b\ \forall^{\mathtt{st}} x\ (x \in b \Leftrightarrow x \in a \wedge \phi)$, où ϕ est n'importe quelle formule externe telle que $b \notin FV(\phi)$. (On notera que le comportement des éléments non standard de b n'est pas spécifié par cet axiome.) Par transfert et extensionnalité, l'ensemble b est unique (voir note 3).