

Modèles booléens de ZFC

Alexandre Miquel

Dans tout ce qui suit, on se place dans un univers \mathcal{U} satisfaisant les axiomes de Zermelo-Fraenkel (ZF) et l'axiome de la fondation (AF), et on considère dans \mathcal{U} un ensemble \mathbb{B} muni d'une structure d'algèbre de Boole complète (au sens de \mathcal{U}) et non dégénérée. On désigne par Ord (resp. Card) la classe des ordinaux (resp. la classe des cardinaux) et on note $(V_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ la hiérarchie de Veblen, dont l'union transfinie est notée V . D'après l'axiome de la fondation, on a $\mathcal{U} = V$. Le rang d'un ensemble x est noté $\text{rk}(x)$.

1 Construction du modèle $V^{(\mathbb{B})}$

1.1 La classe des \mathbb{B} -ensembles

Dans l'univers \mathcal{U} on définit la classe des \mathbb{B} -ensembles comme la plus petite classe engendrée par la clause suivante :

Si X est un ensemble de \mathbb{B} -ensembles,
alors toute fonction $f : X \rightarrow \mathbb{B}$ est un \mathbb{B} -ensemble.

Formellement, cette classe est construite comme la limite de la suite transfinie d'ensembles emboîtés $(V_\alpha^{(\mathbb{B})})_{\alpha \in \text{Ord}}$ définie par

$$V_\alpha^{(\mathbb{B})} = \bigcup_{\beta < \alpha} (V_\beta^{(\mathbb{B})} \rightarrow \mathbb{B})$$

pour tout $\alpha \in \text{Ord}$, où $X \rightarrow \mathbb{B}$ désigne l'ensemble des fonctions partielles de X dans \mathbb{B} , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions totales f à valeurs dans \mathbb{B} qui sont définies sur un sous-ensemble $\text{dom}(f) \subseteq X$. On notera que :

- $V_0^{(\mathbb{B})} = \emptyset$
- $V_\beta^{(\mathbb{B})} \subseteq V_\alpha^{(\mathbb{B})}$ si $\beta \leq \alpha$ (i.e. la suite est croissante)
- $V_{\alpha+1}^{(\mathbb{B})} = V_\alpha^{(\mathbb{B})} \rightarrow \mathbb{B}$
- $V_\alpha^{(\mathbb{B})} = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta^{(\mathbb{B})}$ si α est un ordinal limite.

Étant donné un \mathbb{B} -ensemble u , on appelle *rang de u* et on note $\text{rk}^{(\mathbb{B})}(u)$ le plus petit ordinal α tel que $u \in V_\alpha^{(\mathbb{B})}$. Par construction, on a donc :

$$\text{rk}(u) = \left(\sup_{v \in \text{dom}(u)} \text{rk}(v) \right) + 1 > 0.$$

Si u est un \mathbb{B} -ensemble et $v \in \text{dom}(u)$ un élément de son domaine, $u(v)$ désigne la valeur de vérité de \mathbb{B} associée à v par la fonction u . Dans tout ce qui suit, on étend la notation $u(v)$ à tous les \mathbb{B} -ensembles v en dehors du domaine de x en posant $u(v) = 0$ dès que $v \notin \text{dom}(u)$.

1.2 Valeur de vérité d'une formule

Définition 1 (Valeur de vérité d'une formule) — À chaque couple de \mathbb{B} -ensembles u et v on associe deux valeurs de vérité $\llbracket u = v \rrbracket^{(\mathbb{B})}, \llbracket u \in v \rrbracket^{(\mathbb{B})} \in \mathbb{B}$ définies par induction sur les rangs de u et v par :

$$\begin{aligned}\llbracket u = v \rrbracket^{(\mathbb{B})} &= \bigwedge_{w \in \text{dom}(u)} \left(u(w) \Rightarrow \llbracket w \in v \rrbracket^{(\mathbb{B})} \right) \wedge \bigwedge_{w \in \text{dom}(v)} \left(v(w) \Rightarrow \llbracket w \in u \rrbracket^{(\mathbb{B})} \right) \\ \llbracket u \in v \rrbracket^{(\mathbb{B})} &= \bigvee_{w \in \text{dom}(v)} \left(v(w) \wedge \llbracket u = w \rrbracket^{(\mathbb{B})} \right)\end{aligned}$$

Cette définition est étendue à toute formule ϕ de la théorie des ensembles à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$ en posant

$$\begin{aligned}\llbracket \neg \phi \rrbracket^{(\mathbb{B})} &= \neg \llbracket \phi \rrbracket^{(\mathbb{B})} \\ \llbracket \phi \vee \psi \rrbracket^{(\mathbb{B})} &= \llbracket \phi \rrbracket^{(\mathbb{B})} \vee \llbracket \psi \rrbracket^{(\mathbb{B})} \\ \llbracket \exists x \phi(x) \rrbracket^{(\mathbb{B})} &= \bigvee_{u \in V^{(\mathbb{B})}} \llbracket \phi(u) \rrbracket^{(\mathbb{B})} = \bigvee \left\{ b \in \mathbb{B} : \exists u \in V^{(\mathbb{B})} \llbracket \phi(u) \rrbracket^{(\mathbb{B})} = b \right\}\end{aligned}$$

(Dans ce qui suit on écrira fréquemment $\llbracket \phi \rrbracket$ pour $\llbracket \phi \rrbracket^{(\mathbb{B})}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'algèbre de Boole \mathbb{B} considérée.)

Remarque 1 — Il est important de distinguer les deux inductions à l'œuvre dans la définition ci-dessus. L'induction mutuelle qui définit les valeurs de vérité $\llbracket u = v \rrbracket$ et $\llbracket u \in v \rrbracket$ est une induction sur $\max(\text{rk}^{(\mathbb{B})}(u), \text{rk}^{(\mathbb{B})}(v))$, qui est interne à la théorie des ensembles. En revanche, l'induction sur ϕ qui permet d'étendre cette définition à toutes les formules de la théorie des ensembles est une induction externe, effectuée dans le formalisme ambiant (i.e. le formalisme utilisé pour raisonner à l'extérieur du modèle (\mathcal{U}, \in)).

Pour que cette définition ait un sens, il est crucial que pour chaque formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$ de variables libres x_1, \dots, x_n la relation « $\llbracket \phi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket = b$ » soit définissable à l'aide d'une formule de la théorie des ensembles de variables libres u_1, \dots, u_n, b ¹. C'est en effet cette propriété de définissabilité qui permet de construire le sous-ensemble $\{b \in \mathbb{B} : \exists u \in V^{(\mathbb{B})} \llbracket \phi(u) \rrbracket = b\}$ comme un point du modèle (à l'aide du schéma de compréhension) et de justifier l'existence de la borne supérieure définissant la valeur de la formule $\exists x \phi(x)$ dans \mathbb{B} . Sans cette propriété de définissabilité dans ZF, le sous-ensemble en question n'est pas un point du modèle (il s'agit d'un ensemble externe à \mathcal{U}) et sa borne supérieure n'est pas définie.²

Le langage des ε -formules Pour comprendre la définition (assez complexe) des valeurs de vérité $\llbracket u = v \rrbracket$ et $\llbracket u \in v \rrbracket$, il est commode d'étendre le langage de la théorie des ensembles avec une deuxième relation d'appartenance notée $x \varepsilon y$ (« appartenance immédiate »). On distinguera ainsi deux types de formules :

¹Il faut par ailleurs que cette relation soit fonctionnelle en ce sens que

$$\mathcal{U} \models \forall u_1 \in V^{(\mathbb{B})} \dots \forall u_n \in V^{(\mathbb{B})} \exists! b \in \mathbb{B} \llbracket \phi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket = b \text{ ,}$$

afin de justifier la notation skolémisée $\llbracket \phi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket$.

²Rappelons que l'algèbre de Boole \mathbb{B} est complète dans \mathcal{U} , mais qu'elle ne l'est pas en général en dehors du modèle (\mathcal{U}, \in) .

- Les formules de la théorie des ensembles, ou \in -formules, construites à partir des seuls symboles de prédicat $=$ et \in .
 - Les ε -formules, construites à partir des symboles de prédicat $=$, \in et ε .
- On utilisera également dans le langage des ε -formules l'abréviation

$$x \sqsubseteq y \equiv \forall z (z \varepsilon x \Rightarrow z \in y)$$

(à ne pas confondre avec l'inclusion ordinaire $x \subseteq y \equiv \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y)$).

La définition de la valeur de vérité d'une formule (Déf. 1) s'étend immédiatement au langage des ε -formules en posant

$$\llbracket u \varepsilon v \rrbracket = v(u)$$

pour tous $u, v \in V^{(\mathbb{B})}$. Grâce à cette extension, on peut caractériser la valeur de vérité des formules atomiques $x = y$ et $x \in y$ à travers les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \llbracket u \in v \rrbracket &= \llbracket \exists z (z \varepsilon v \wedge u = z) \rrbracket = \llbracket \exists z \varepsilon v \ u = z \rrbracket \\ \llbracket u = v \rrbracket &= \llbracket u \sqsubseteq v \wedge v \sqsubseteq u \rrbracket \\ &= \llbracket \forall z \varepsilon u \ \exists z' \varepsilon v \ z = z' \wedge \forall z \varepsilon v \ \exists z' \varepsilon u \ z = z' \rrbracket \end{aligned}$$

pour tous $u, v \in V^{(\mathbb{B})}$, ce qui permet de faire apparaître au niveau de la logique la nature récursive de la définition de l'égalité.

Remarque 2 — Le passage de V à $V^{(\mathbb{B})}$ entraîne une duplication considérable des éléments de l'univers³. Par exemple, l'ensemble vide peut-être représenté dans $V^{(\mathbb{B})}$ par n'importe quel \mathbb{B} -ensemble de la forme $\{(u, 0) : u \in X\}$, où X est un ensemble quelconque de \mathbb{B} -ensembles. Plus généralement, la classe des \mathbb{B} -ensembles u tels que $\llbracket u = u_0 \rrbracket = 1$ (pour $u_0 \in V^{(\mathbb{B})}$ fixé) est une sous-classe propre de $V^{(\mathbb{B})}$. C'est cette duplication qui explique la définition non triviale de la valeur de vérité $\llbracket u = v \rrbracket$, qui sert à effectuer (récursivement) toutes les identifications nécessaires.

Dans ce cadre, la relation d'appartenance immédiate $x \varepsilon y$, dont la valeur de vérité dans \mathbb{B} est définie par $\llbracket u \varepsilon v \rrbracket = u(v)$, n'est compatible avec la relation d'égalité ni à gauche ni à droite. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer deux \mathbb{B} -ensembles distincts u et u' tels que $\llbracket u = u' \rrbracket = 1$ (par exemple : deux copies distinctes de l'ensemble vide) et de former les \mathbb{B} -ensembles $v = \{(u, 1)\}$ et $v' = \{(u', 1)\}$ pour lesquels on vérifie aisément que $\llbracket v = v' \rrbracket = 1$. On a alors $\llbracket u \varepsilon v \rrbracket = \llbracket u' \varepsilon v' \rrbracket = 1$ tandis que $\llbracket u' \varepsilon v \rrbracket = \llbracket u \varepsilon v' \rrbracket = 0$, d'où

$$\llbracket u = u' \wedge u \varepsilon v \Rightarrow u' \varepsilon v \rrbracket = \llbracket u \varepsilon v \wedge v = v' \Rightarrow u \varepsilon v' \rrbracket = 0.$$

Pour résoudre ce défaut de compatibilité avec l'égalité, on doit donc définir la relation d'appartenance usuelle « à égalité près » en posant :

$$\llbracket u \in v \rrbracket = \llbracket \exists z (z \varepsilon v \ u = z) \rrbracket.$$

Dans notre exemple, on a alors $\llbracket u \in v \rrbracket = \llbracket u' \in v \rrbracket = \llbracket u \in v' \rrbracket = \llbracket u' \in v' \rrbracket = 1$.

³Nous verrons plus loin comment envoyer chaque élément de \mathcal{U} sur un élément de $V^{(\mathbb{B})}$.

1.3 Premières propriétés

Étant donnée une ε -formule close à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$, on dit que ϕ est vraie dans $V^{(\mathbb{B})}$ et on note $V^{(\mathbb{B})} \models \phi$ si $\llbracket \phi \rrbracket = 1$. L'ensemble des ε -formules vraies dans $V^{(\mathbb{B})}$ est clos par conséquence logique (au sens du calcul des prédicats classique⁴). Cette propriété est très utile en pratique pour déduire que certaines formules sont vraies à partir de formules dont la vérité a déjà été établie. Par exemple nous avons vu que par définition :

$$\begin{aligned} V^{(\mathbb{B})} &\models \forall x \forall y (x \in y \Leftrightarrow \exists z (z \varepsilon y \wedge x = z)) \\ V^{(\mathbb{B})} &\models \forall x \forall y (x = y \Leftrightarrow x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq x) \end{aligned}$$

(avec $x \sqsubseteq y \equiv \forall z (z \varepsilon x \Rightarrow z \in y)$), ce qui permet de conclure par simple voie de conséquence logique que l'égalité est symétrique dans $V^{(\mathbb{B})}$:

$$V^{(\mathbb{B})} \models \forall x \forall y (x = y \Rightarrow y = x).$$

Cependant, ce mécanisme de raisonnement est insuffisant pour établir certaines propriétés telles que la réflexivité et la transitivité de l'égalité. Pour cela on doit d'abord établir le principe d'induction suivant :

Proposition 1 (Principe d'induction non extensionnel) — Si $\phi(x)$ est une ε -formule à une variable libre x et à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$, alors

$$V^{(\mathbb{B})} \models \forall x (\forall y \varepsilon x \phi(y) \Rightarrow \phi(x)) \Rightarrow \forall x \phi(x).$$

Preuve. Soit $b = \llbracket \forall x (\forall y \varepsilon x \phi(y) \Rightarrow \phi(x)) \rrbracket$. Il s'agit de montrer que pour tout $u \in V^{(\mathbb{B})}$ on a $b \leq \llbracket \phi(u) \rrbracket$, ce que l'on fait en procédant par induction sur u . Pour cela, supposons que $b \leq \llbracket \phi(v) \rrbracket$ pour tout $v \in \text{dom}(u)$. On a donc

$$b \leq \bigwedge_{v \in \text{dom}(u)} \llbracket \phi(v) \rrbracket \leq \bigwedge_{v \in V^{(\mathbb{B})}} (u(v) \Rightarrow \llbracket \phi(v) \rrbracket) = \llbracket \forall y \varepsilon u \phi(y) \rrbracket.$$

Comme par ailleurs $b \leq \llbracket \forall y \varepsilon u \phi(y) \rrbracket \Rightarrow \llbracket \phi(u) \rrbracket$, il vient $b \leq \llbracket \phi(u) \rrbracket$. □

Grâce au principe d'induction ci-dessus, on peut démontrer que :

Proposition 2 — Les formules ci-dessous sont vraies dans $V^{(\mathbb{B})}$:

1. $\forall x x = x$
2. $\forall x \forall y (y \varepsilon x \Rightarrow y \in x)$
3. $\forall x \forall y (x = y \Rightarrow y = x)$
4. $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$
5. $\forall x \forall y \forall z (x \in y \wedge y = z \Rightarrow x \in z)$
6. $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z)$

Preuve.

1. Par induction avec la formule $\phi(x) \equiv x = x$.
2. Conséquence immédiate de 1.
3. Immédiat.
4. Par induction avec la formule $\phi(x) \equiv \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$.
5. Conséquence de 4.
6. Idem. □

⁴Sans assigner de sens particulier au symbole d'égalité.

Dans le modèle $V^{(\mathbb{B})}$, les relations ci-dessus se traduisent par les inégalités suivantes pour tous $u, v, w \in V^{(\mathbb{B})}$:

1. $\llbracket u = v \rrbracket = 1$
2. $u(v) \leq \llbracket v \in u \rrbracket$
3. $\llbracket u = v \rrbracket = \llbracket v = u \rrbracket$
4. $\llbracket u = v \rrbracket \wedge \llbracket v = w \rrbracket \leq \llbracket u = w \rrbracket$
5. $\llbracket u \in v \rrbracket \wedge \llbracket v = w \rrbracket \leq \llbracket u \in w \rrbracket$
6. $\llbracket u = v \rrbracket \wedge \llbracket v \in w \rrbracket \leq \llbracket u \in w \rrbracket$

1.4 Le principe de Leibniz et ses conséquences

D'après la proposition qui précède, l'appartenance ordinaire (mais pas l'appartenance immédiate) est compatible avec l'égalité. Par conséquent :

Proposition 3 (Principe de Leibniz) — *Si $\phi(x)$ est une \in -formule à une variable libre x et à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$, alors :*

$$V^{(\mathbb{B})} \models \forall x \forall y (x = y \wedge \phi(x) \Rightarrow \phi(y)).$$

Preuve. Par récurrence (externe) sur la structure de ϕ . □

Dans le modèle $V^{(\mathbb{B})}$, le principe de Leibniz se traduit par l'inégalité

$$\llbracket u = v \rrbracket \wedge \llbracket \phi(u) \rrbracket \leq \llbracket \phi(v) \rrbracket$$

pour tous $u, v \in V^{(\mathbb{B})}$. Bien entendu, cette inégalité ne vaut que si $\phi(x)$ est une \in -formule, et elle est en général fautive dans le cas contraire.

Du principe de Leibniz on déduit alors le résultat suivant :

Proposition 4 (Quantifications bornées) — *Si $\phi(x)$ est une \in -formule à une variable libre x et à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$, alors pour tout $u \in V^{(\mathbb{B})}$:*

$$V^{(\mathbb{B})} \models \exists x \in u \phi(x) \Leftrightarrow \exists x \varepsilon u \phi(x)$$

$$V^{(\mathbb{B})} \models \forall x \in u \phi(x) \Leftrightarrow \forall x \varepsilon u \phi(x)$$

Preuve. Il suffit de montrer l'implication $\exists x \in u \phi(x) \Rightarrow \exists x \varepsilon u \phi(x)$. Supposons qu'il existe $x \in u$ tel que $\phi(x)$. Comme $x \in u$, il existe $x' \varepsilon u$ tel que $x' = x$. D'après le principe de Leibniz, on a $\phi(x')$, d'où $\exists x' \varepsilon u \phi(x')$. □

Dans le modèle, ces relations se traduisent par les égalités

$$\llbracket \exists x \in u \phi(x) \rrbracket = \bigvee_{v \in \text{dom}(u)} (u(v) \wedge \llbracket \phi(v) \rrbracket)$$

$$\llbracket \forall x \in u \phi(x) \rrbracket = \bigwedge_{v \in \text{dom}(u)} (u(v) \Rightarrow \llbracket \phi(v) \rrbracket)$$

qui ne sont valables que si $\phi(x)$ est une \in -formule.

Ces équivalences ont plusieurs conséquences importantes. La première est que l'inclusion $x \sqsubseteq y \equiv \forall z (z \varepsilon x \Rightarrow z \in y)$ utilisée pour définir l'égalité est en réalité équivalente à l'inclusion usuelle $x \subseteq y \equiv \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y)$:

Corollaire 1 (Inclusion) — $V^{(\mathbb{B})} \models \forall x \forall y (x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \subseteq y)$

Dans ce qui suit, on considérera que les symboles \sqsubseteq et \subseteq sont interchangeables. Pour tous $u, v \in V^{(\mathbb{B})}$ on a donc les égalités

$$\llbracket u = v \rrbracket = \llbracket u \sqsubseteq v \wedge v \sqsubseteq u \rrbracket = \llbracket u \subseteq v \wedge v \subseteq u \rrbracket,$$

d'où il ressort que :

Proposition 5 (Axiome d'extensionnalité) — *L'axiome d'extensionnalité est vrai dans le modèle $V^{(\mathbb{B})}$: $V^{(\mathbb{B})} \models \forall x \forall y (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$.*

Combinée avec le principe d'induction non extensionnel (Prop. 1), la proposition précédente permet de montrer que l'axiome de la fondation est vrai dans le modèle $V^{(\mathbb{B})}$:

Proposition 6 (Axiome de la fondation) — *Si $\phi(x)$ est une \in -formule à une variable libre x et à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$, alors*

$$V^{(\mathbb{B})} \models \forall x (\forall y \in x \phi(y) \Rightarrow \phi(x)) \Rightarrow \forall x \phi(x).$$

2 Mélange et principe du maximum

Rappelons tout d'abord la définition de la notion d'antichaîne :

Définition 2 (Antichaîne) — Soit $(b_i)_{i \in I} \in \mathbb{B}^I$ une famille de valeurs de vérité. On dit que cette famille est une *antichaîne* si $b_i \wedge b_j = 0$ pour tous $i \neq j$. Si en outre $\bigvee_{i \in I} b_i = 1$, on dit que cette famille est une *partition de l'unité*.

2.1 La notion de mélange

Définition 3 (Mélange d'une famille de \mathbb{B} -ensembles) — Étant données une famille de \mathbb{B} -ensembles $(u_i)_{i \in I}$ et une famille de valeurs de vérité $(b_i)_{i \in I} \in \mathbb{B}^I$ indicées par le même ensemble I , on appelle *mélange* de la famille $(u_i)_{i \in I}$ suivant les proportions $(b_i)_{i \in I}$ le \mathbb{B} -ensemble u défini par

1. $\text{dom}(u) = \bigcup_{i \in I} \text{dom}(u_i)$;
2. $u(v) = \bigvee_{i \in I} (b_i \wedge u_i(v))$ pour tout $v \in \text{dom}(u)$.

Dans ce qui suit, le \mathbb{B} -ensemble u est noté $\sum_{i \in I} b_i u_i$.

Le lemme ci-dessous exprime que sous une certaine condition de recollement (qui est automatiquement satisfaite dans le cas où $(b_i)_{i \in I}$ est une antichaîne), le mélange $u = \sum_{i \in I} b_i u_i$ est égal à chacune de ses composantes u_i (pour tout $i \in I$) suivant une valeur de vérité au moins égale à b_i :

Lemme 1 (Lemme du mélange) — *Soit $u = \sum_{i \in I} b_i u_i$ le mélange d'une famille de \mathbb{B} -ensembles $(u_i)_{i \in I}$ suivant une famille de valeurs de vérité $(b_i)_{i \in I}$. Si pour tous $i, j \in I$ on a $b_i \wedge b_j \leq \llbracket u_i = u_j \rrbracket$ (condition de recollement), alors pour tout $i \in I$ on a*

$$b_i \leq \llbracket u = u_i \rrbracket.$$

Preuve. Montrons d'abord que $b_i \leq \llbracket u_i \sqsubseteq u \rrbracket$. Pour tout $v \in \text{dom}(u_i)$ on a

$$b_i \leq u_i(v) \Rightarrow b_i \wedge u_i(v) \leq \llbracket v \varepsilon u_i \Rightarrow v \varepsilon u \rrbracket \leq \llbracket v \varepsilon u_i \Rightarrow v \in u \rrbracket$$

d'où $b_i \leq \llbracket u_i \sqsubseteq u \rrbracket$ par passage à la borne inférieure. Montrons à présent que $b_i \leq \llbracket u \sqsubseteq u_i \rrbracket$. Soit $v \in \text{dom}(u)$. Pour tout $j \in I$ on a

$$\begin{aligned} b_i &\leq b_j \Rightarrow b_j \wedge b_i \leq b_j \Rightarrow \llbracket u_j = u_i \rrbracket \leq b_j \Rightarrow \llbracket u_j \sqsubseteq u_i \rrbracket \\ &\leq b_j \Rightarrow (u_j(v) \Rightarrow \llbracket v \in u_i \rrbracket) = (b_j \wedge u_j(v)) \Rightarrow \llbracket v \in u_i \rrbracket \end{aligned}$$

Par passage à la borne inférieure (pour $j \in J$) il vient

$$\begin{aligned} b_i &\leq \bigwedge_{j \in I} \left((b_j \wedge u_j(v)) \Rightarrow \llbracket v \in u_i \rrbracket \right) = \bigvee_{j \in I} (b_j \wedge u_j(v)) \Rightarrow \llbracket v \in u_i \rrbracket \\ &= \llbracket v \varepsilon u \Rightarrow v \in u_i \rrbracket \end{aligned}$$

et cela pour tout $v \in \text{dom}(u)$. Donc $b_i \leq \llbracket u \sqsubseteq u_i \rrbracket$. \square

Remarque 3 — La condition de recollement $b_i \wedge b_j \leq \llbracket u_i = u_j \rrbracket$ est automatiquement satisfaite lorsque $(b_i)_{i \in I}$ est une antichaîne.

Une conséquence importante du lemme du mélange est que la classe des \mathbb{B} -ensembles u tels que $V^{(\mathbb{B})} \models \phi(u)$ (où $\phi(x)$ est une formule quelconque de la théorie des ensembles) est stable par mélange suivant n'importe quelle partition de l'unité, c'est-à-dire :

Proposition 7 (Stabilité par mélange) — Soit $\phi(x)$ une ε -formule à une variable libre x et à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$, et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de \mathbb{B} -ensembles telle que $V^{(\mathbb{B})} \models \phi(u_i)$ pour tout $i \in I$. Pour toute partition de l'unité $(b_i)_{i \in I} \in \mathbb{B}^I$ on a alors

$$V^{(\mathbb{B})} \models \phi\left(\sum_{i \in I} b_i u_i\right).$$

Preuve. Soit $u = \sum_{i \in I} b_i u_i$. D'après le lemme du mélange (Lemme 1) et la Prop. 3 on a

$$b_i \leq \llbracket u_i = u \rrbracket = \llbracket u_i = u \rrbracket \wedge \llbracket \phi(u_i) \rrbracket \leq \llbracket \phi(u) \rrbracket$$

pour tout $i \in I$, d'où $\llbracket \phi(u) \rrbracket = 1$ par passage à la borne supérieure. \square

2.2 Le principe du maximum

Nous pouvons à présent démontrer que la borne supérieure qui définit la valeur de vérité d'une ε -formule existentielle

$$\llbracket \exists x \phi(x) \rrbracket = \bigvee_{u \in V^{(\mathbb{B})}} \llbracket \phi(u) \rrbracket$$

est atteinte sur un \mathbb{B} -ensemble $u \in V^{(\mathbb{B})}$ particulier :

Proposition 8 (Principe du maximum) — Si $\mathcal{U} \models \text{AC}$, alors pour chaque ε -formule $\phi(x)$ à une variable libre x et à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$, il existe un \mathbb{B} -ensemble u tel que

$$\llbracket \exists x \phi(x) \rrbracket = \llbracket \phi(u) \rrbracket.$$

Preuve. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de \mathbb{B} -ensembles telle que pour tout $u \in V^{(\mathbb{B})}$, il existe un indice $i \in I$ pour lequel on a $\llbracket \phi(u) \rrbracket = \llbracket \phi(u_i) \rrbracket$. (Une telle famille existe d'après le schéma de collection.) Soit \leq une relation de bon ordre sur l'ensemble I (qui existe d'après l'axiome du choix). Pour tout $i \in I$ on pose

$$b_i = \llbracket \phi(u_i) \rrbracket \wedge \bigwedge_{j < i} \neg \llbracket \phi(u_j) \rrbracket.$$

La famille $(b_i)_{i \in I}$ est clairement une antichaîne, et on vérifie par une induction immédiate (sur i) que $\llbracket \phi(u_i) \rrbracket = \bigvee_{j \leq i} b_j$ pour tout $i \in I$. Par conséquent :

$$\bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} \llbracket \phi(u_i) \rrbracket = \bigvee_{u \in V^{(\mathbb{B})}} \llbracket \phi(u) \rrbracket = \llbracket \exists x \phi(x) \rrbracket.$$

Soit $u = \sum_{i \in I} b_i u_i$. On a $b_i \leq \llbracket \phi(u_i) \rrbracket$ (par construction) et $b_i \leq \llbracket u_i = u \rrbracket$ (d'après le lemme du mélange), d'où

$$b_i \leq \llbracket u_i = u \rrbracket \wedge \llbracket \phi(u_i) \rrbracket \leq \llbracket \phi(u) \rrbracket$$

d'après la Prop. 3. Par passage à la borne supérieure, il vient alors

$$\llbracket \exists x \phi(x) \rrbracket = \bigvee_{i \in I} b_i \leq \llbracket \phi(u) \rrbracket.$$

L'inclusion réciproque est immédiate. \square

On notera que l'axiome du choix (AC) intervient de manière essentielle dans la preuve du principe du maximum. Il n'est pas possible de se passer de cette hypothèse dans la mesure où :

Proposition 9 — *Si pour toute algèbre de Boole complète \mathbb{B} (dans \mathcal{U}) le modèle $V^{(\mathbb{B})}$ satisfait le principe du maximum, alors $\mathcal{U} \models \text{AC}$.*

(Voir [1, Problem 1.30 p. 36].)

Remarque 4 — Le principe du maximum exprime que le modèle booléen $V^{(\mathbb{B})}$ (sur l'algèbre de Boole \mathbb{B}) est un modèle plein du langage de la théorie des ensembles. Grâce à cette propriété, on pourra donc quotienter $V^{(\mathbb{B})}$ par un ultrafiltre pour obtenir un modèle ordinaire de la théorie des ensembles (une fois que nous aurons démontré que $V^{(\mathbb{B})}$ satisfait bien tous les axiomes de ZFC).

Corollaire 2 — *On suppose que $\mathcal{U} \models \text{AC}$ et que $\phi(x)$ est une \in -formule à une variable libre x et à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$ telle que $V^{(\mathbb{B})} \models \exists x \phi(x)$.*

1. *Pour tout $v \in V^{(\mathbb{B})}$, il existe $u \in V^{(\mathbb{B})}$ tel que*

$$V^{(\mathbb{B})} \models \phi(u) \quad \text{et} \quad \llbracket u = v \rrbracket = \llbracket \phi(v) \rrbracket.$$

2. *Si $\psi(x)$ est une \in -formule de variable libre x et à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$ telle que pour tout $u \in V^{(\mathbb{B})}$, $V^{(\mathbb{B})} \models \phi(u)$ entraîne $V^{(\mathbb{B})} \models \psi(u)$, alors*

$$V^{(\mathbb{B})} \models \forall x (\phi(x) \Rightarrow \psi(x)).$$

Preuve. 1. Soit $w \in V^{(\mathbb{B})}$ tel que $\llbracket \phi(w) \rrbracket = 1$ (d'après le principe du maximum). Étant donné $v \in V^{(\mathbb{B})}$, on pose $b = \llbracket \phi(v) \rrbracket$ et $u = b \cdot v + (\neg b) \cdot w$. D'après le lemme du mélange, on a $\llbracket u = v \rrbracket \geq b$ et $\llbracket u = w \rrbracket \geq \neg b$, d'où

$$\llbracket \phi(u) \rrbracket \geq \llbracket u = v \wedge \phi(v) \rrbracket \vee \llbracket u = w \wedge \phi(w) \rrbracket \geq b \vee \neg b = 1.$$

Comme par ailleurs on a

$$\llbracket u = v \rrbracket = \llbracket u = v \wedge \phi(u) \rrbracket \leq \llbracket \phi(v) \rrbracket = b$$

il vient $\llbracket u = v \rrbracket = b = \llbracket \phi(v) \rrbracket$.

2. Supposons que $\llbracket \phi(u) \rrbracket = 1$ entraîne $\llbracket \psi(u) \rrbracket = 1$ pour tout $u \in V^{(\mathbb{B})}$. Soit v un \mathbb{B} -ensemble arbitraire. D'après 1., il existe $u \in V^{(\mathbb{B})}$ tel que $V^{(\mathbb{B})} \models \phi(u)$ et $\llbracket u = v \rrbracket = \llbracket \phi(v) \rrbracket$. D'après notre hypothèse on a $V^{(\mathbb{B})} \models \psi(u)$, d'où

$$\llbracket \psi(v) \rrbracket \geq \llbracket u = v \rrbracket \wedge \llbracket \psi(u) \rrbracket = \llbracket \phi(v) \rrbracket.$$

Donc $\llbracket \phi(v) \rrbracket \leq \llbracket \psi(v) \rrbracket$ pour tout $v \in V^{(\mathbb{B})}$, soit $\llbracket \forall x (\phi(x) \Rightarrow \psi(x)) \rrbracket = 1$. \square

2.3 Cœur d'un $V^{(\mathbb{B})}$ -ensemble

Définition 4 (Cœur d'un \mathbb{B} -ensemble) — Soit u un \mathbb{B} -ensemble. On dit qu'un ensemble de \mathbb{B} -ensembles $C \subset V^{(\mathbb{B})}$ est un *cœur* de u si :

1. Pour tout $v \in C$ on a $\llbracket v \in u \rrbracket = 1$;
2. Pour tout $w \in V^{(\mathbb{B})}$ tel que $\llbracket w \in u \rrbracket = 1$, il existe un unique $v \in C$ tel que $\llbracket v = w \rrbracket = 1$.

Proposition 10 (Existence d'un cœur) — Si l'axiome du choix (AC) est vrai dans l'univers \mathcal{U} , alors tout \mathbb{B} -ensemble admet un cœur.

Preuve. Soit $u \in V^{(\mathbb{B})}$. Pour tout $v \in V^{(\mathbb{B})}$ on note

$$f_v = \{(w, \llbracket v = w \rrbracket) : w \in \text{dom}(u)\} \in \mathbb{B}^{\text{dom}(u)}.$$

Par construction, la correspondance $v \mapsto f_v$ a cette propriété que si $f_v = f_{v'}$, alors pour toute \in -formule $\phi(x)$ on a

$$\begin{aligned} \llbracket v \in u \wedge \phi(v) \rrbracket &= \bigvee_{w \in \text{dom}(u)} (u(w) \wedge \llbracket v = w \rrbracket) \wedge \llbracket \phi(v) \rrbracket \\ &= \bigvee_{w \in \text{dom}(u)} (u(w) \wedge \llbracket v = w \rrbracket \wedge \llbracket \phi(v) \rrbracket) \\ &= \bigvee_{w \in \text{dom}(u)} (u(w) \wedge \llbracket v = w \rrbracket \wedge \llbracket \phi(w) \rrbracket) \\ &= \bigvee_{w \in \text{dom}(u)} (u(w) \wedge \llbracket v' = w \rrbracket \wedge \llbracket \phi(w) \rrbracket) \quad (\text{car } f_v = f_{v'}) \\ &= \bigvee_{w \in \text{dom}(u)} (u(w) \wedge \llbracket v' = w \rrbracket \wedge \llbracket \phi(v') \rrbracket) = \llbracket v' \in u \wedge \phi(v') \rrbracket \end{aligned}$$

et en particulier $\llbracket v \in u \rrbracket = \llbracket v' \in u \rrbracket$. D'après le schéma de collection, il existe un ensemble $S \subset V^{(\mathbb{B})}$ tel que pour tout $v \in V^{(\mathbb{B})}$, il existe $v' \in S$ tel que $f_{v'} = f_v$. Soit $T = \{v \in S : \llbracket v \in u \rrbracket = 1\}$ et C un système de représentants de la relation d'équivalence définie sur T par $v \sim v' \Leftrightarrow \llbracket v = v' \rrbracket = 1$ pour tous $v, v' \in T$. Montrons que C est un cœur de u .

1. Pour tout $v \in C$ on a $\llbracket v \in u \rrbracket = 1$ par construction.
2. Soit $w \in V^{(\mathbb{B})}$ tel que $\llbracket w \in u \rrbracket = 1$, et montrons l'existence de $v \in C$ tel que $\llbracket v = w \rrbracket = 1$. Par construction de S , il existe $w' \in S$ tel que $f_{w'} = f_w$. On a donc $\llbracket w' \in u \rrbracket = \llbracket w \in u \rrbracket = 1$ d'où $w' \in T$, et en utilisant la propriété de la correspondance $v \mapsto f_v$ avec $\phi(z) \equiv z = w'$, il vient

$$\llbracket w = w' \rrbracket = \llbracket w \in u \wedge w = w' \rrbracket = \llbracket w' \in u \wedge w' = w' \rrbracket = 1.$$

Si v désigne le représentant de la classe d'équivalence de w' dans C , on a $\llbracket w = v \rrbracket \geq \llbracket w = w' \wedge w' = v \rrbracket = 1$. L'unicité de v est immédiate. \square

3 Valeur de vérité dans une sous-algèbre

3.1 Valeur de vérité dans une sous-algèbre $\mathbb{B}' \subseteq \mathbb{B}$

Soit $\mathbb{B}' \subseteq \mathbb{B}$ une sous-algèbre de Boole complète de \mathbb{B} . L'algèbre de Boole \mathbb{B}' définit à son tour une classe $V^{(\mathbb{B}')}$ des \mathbb{B}' -ensembles. Il est clair (par une induction transfinie immédiate) que $V_\alpha^{(\mathbb{B}')} \subseteq V_\alpha^{(\mathbb{B})}$ pour tout $\alpha \in \text{Ord}$, d'où il ressort que $V^{(\mathbb{B}')} \subseteq V^{(\mathbb{B})}$: $V^{(\mathbb{B}')} \subseteq V^{(\mathbb{B})}$.

Proposition 11 — Pour tous $u, v \in V^{(\mathbb{B}')} \subseteq V^{(\mathbb{B})}$ on a

$$\begin{aligned} \llbracket u \varepsilon v \rrbracket^{(\mathbb{B}')} &= \llbracket u \varepsilon v \rrbracket^{(\mathbb{B})} \\ \llbracket u = v \rrbracket^{(\mathbb{B}')} &= \llbracket u = v \rrbracket^{(\mathbb{B})} \\ \llbracket u \in v \rrbracket^{(\mathbb{B}')} &= \llbracket u \in v \rrbracket^{(\mathbb{B})} \end{aligned}$$

Preuve. Pour tous $u, v \in V^{(\mathbb{B}')} \subseteq V^{(\mathbb{B})}$ on a $\llbracket u \varepsilon v \rrbracket^{(\mathbb{B}')} = \llbracket u \varepsilon v \rrbracket^{(\mathbb{B})} = v(u)$. Les deux égalités $\llbracket u = v \rrbracket^{(\mathbb{B}')} = \llbracket u = v \rrbracket^{(\mathbb{B})}$ et $\llbracket u \in v \rrbracket^{(\mathbb{B}')} = \llbracket u \in v \rrbracket^{(\mathbb{B})}$ s'établissent ensuite par induction transfinie sur le maximum des rangs de u et de v . \square

D'après l'inclusion $V^{(\mathbb{B}')} \subseteq V^{(\mathbb{B})}$, toute ε -formule ϕ à paramètres dans $V^{(\mathbb{B}')}$ est aussi une ε -formule à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$. On peut donc interpréter cette formule de deux manières différentes : dans l'algèbre de Boole \mathbb{B}' par la valeur de vérité $\llbracket \phi \rrbracket^{(\mathbb{B}')} \in \mathbb{B}'$, mais aussi dans l'algèbre de Boole englobante \mathbb{B} par la valeur de vérité $\llbracket \phi \rrbracket^{(\mathbb{B})} \in \mathbb{B}$. Dans le cas général cependant, ces deux valeurs ne coïncident pas car les quantifications existentielles (resp. universelles) présentes dans la formule ϕ sont interprétées par des bornes supérieures (resp. inférieures) qui portent sur des domaines différents :

$$\llbracket \exists x \phi(x) \rrbracket^{(\mathbb{B})} = \bigvee_{u \in V^{(\mathbb{B})}} \llbracket \phi(u) \rrbracket^{(\mathbb{B})} \neq \bigvee_{u \in V^{(\mathbb{B}')}} \llbracket \phi(u) \rrbracket^{(\mathbb{B}')} = \llbracket \exists x \phi(x) \rrbracket^{(\mathbb{B}')}$$

(de même pour la quantification universelle $\forall x \phi(x)$).

Ce problème n'apparaît pas dans le cas particulier où ϕ est une formule *restreinte*, c'est-à-dire une formule dans laquelle toutes les quantifications sont relativisées à un ensemble (à l'aide d'un des deux symboles \in ou ε) :

Définition 5 (Formules restreintes) — La classe des ε -formules *restreintes* est définie par la BNF suivante :

$$\begin{aligned} \phi, \psi &::= x = y \mid x \in y \mid x \varepsilon y \\ &\mid \neg \phi \mid \phi \vee \psi \mid \exists x \in y \phi \mid \exists x \varepsilon y \phi \end{aligned}$$

La classe des \in -formules restreintes est définie comme l'intersection de la classe des \in -formules avec la classe des ε -formules restreintes.

Il est utile de remarquer que toute ε -formule restreinte ϕ peut être remplacée par une ε -formule restreinte ϕ' formée dans la signature $\{=, \varepsilon\}$. Pour cela, il suffit de remplacer chaque sous-formule atomique de la forme $x \in y$ dans la formule ϕ par l' ε -formule restreinte $\exists z \varepsilon y \ x = z$ qui est équivalente à $x \in y$ dans $V^{(\mathbb{B})}$ comme dans $V^{(\mathbb{B}')}$. La formule ϕ' ainsi obtenue est une ε -formule restreinte équivalente à la formule initiale ϕ au sens des modèles $V^{(\mathbb{B})}$ et $V^{(\mathbb{B}')}$.

Proposition 12 — *Si $\phi(x_1, \dots, x_n)$ est une ε -formule restreinte de variables libres x_1, \dots, x_n , alors pour tous $u_1, \dots, u_n \in V^{(\mathbb{B}')}$ on a :*

$$\llbracket \phi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket^{(\mathbb{B}')} = \llbracket \phi(u_1, \dots, u_n) \rrbracket^{(\mathbb{B})}.$$

Preuve. D'après la remarque qui précède, il suffit de démontrer le résultat pour les ε -formules restreintes formées dans la signature $\{=, \varepsilon\}$. On procède par récurrence sur la structure de la formule, en utilisant le fait que \mathbb{B}' est une sous-algèbre de Boole complète de \mathbb{B} pour traiter le cas des quantificateurs. \square

3.2 Valeur de vérité dans la sous-algèbre $2 \subseteq \mathbb{B}$

Soit $V^{(2)}$ la classe des 2-ensembles induite par l'algèbre de Boole initiale $2 = \{0; 1\}$. Quitte à poser $0 = 0_{\mathbb{B}}$ et $1 = 1_{\mathbb{B}}$, on peut considérer cette algèbre initiale comme une sous-algèbre de Boole (complète) de \mathbb{B} ; on a donc $V^{(2)} \subseteq V^{(\mathbb{B})}$.

Il s'agit de démontrer que la classe $V^{(2)}$ est isomorphe à V en un certain sens. Pour cela, on associe à tout ensemble $x \in \mathcal{U} = V$ un 2-ensemble $\hat{x} \in V^{(2)}$ défini par induction sur le rang de x en posant :

$$\hat{x} = \{(\hat{y}, 1) : y \in x\}.$$

(La correspondance $x \mapsto \hat{x}$ est clairement injective.) Notons que d'après l'inclusion $2 \subseteq \mathbb{B}$, \hat{x} est également un \mathbb{B} -ensemble.

Lemme 2 — *Pour tous $x \in V$ et $u \in V^{(\mathbb{B})}$ on a :*

$$\llbracket u \in \hat{x} \rrbracket^{(\mathbb{B})} = \bigvee_{y \in x} \llbracket u = \hat{y} \rrbracket^{(\mathbb{B})}.$$

Preuve. Par définition on a

$$\llbracket u \in \hat{x} \rrbracket^{(\mathbb{B})} = \bigvee_{v \in \text{dom}(\hat{x})} (\hat{x}(v) \wedge \llbracket u = v \rrbracket^{(\mathbb{B})}) = \bigvee_{y \in x} \llbracket u = \hat{y} \rrbracket^{(\mathbb{B})}. \quad \square$$

Proposition 13 — *Pour tous $x, y \in V$ on a les équivalences :*

$$\begin{aligned} x = y &\Leftrightarrow \llbracket \hat{x} = \hat{y} \rrbracket^{(\mathbb{B})} = 1 \\ x \in y &\Leftrightarrow \llbracket \hat{x} \in \hat{y} \rrbracket^{(\mathbb{B})} = 1 \Leftrightarrow \llbracket \hat{x} \varepsilon \hat{y} \rrbracket^{(\mathbb{B})} = 1 \end{aligned}$$

Preuve. L'équivalence $x \in y \Leftrightarrow \llbracket \hat{x} \varepsilon \hat{y} \rrbracket^{(\mathbb{B})} = 1$ est immédiate. Les deux autres équivalences se démontrent simultanément par induction sur le maximum des rangs de x et de y en utilisant le lemme 2. \square

Réciproquement, on démontre que :

Lemme 3 — *Pour tout 2-ensemble $u \in V^{(2)}$, il existe un unique ensemble $x \in V$ tel que $\llbracket \hat{x} = u \rrbracket^{(2)} = 1$.*

Preuve. L'unicité découle directement de la Prop. 13. Pour montrer l'existence de cet ensemble, on a associé à tout 2-ensemble $u \in V^{(2)}$ un ensemble $\check{u} \in V$ défini par induction sur u par

$$\check{u} = \{ \check{v} : (v, 1) \in u \},$$

et on vérifie que $\llbracket \hat{\check{u}} = u \rrbracket^{(2)} = 1$. □

Proposition 14 (Isomorphisme entre V et $V^{(2)}$) — *Soit $\phi(x_1, \dots, x_n)$ une \in -formule de variables libres x_1, \dots, x_n . Alors pour tous $x_1, \dots, x_n \in V$ on a*

$$\phi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \llbracket \phi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \rrbracket^{(2)} = 1.$$

Si en outre $\phi(x_1, \dots, x_n)$ est une formule restreinte, alors

$$\phi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \llbracket \phi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \rrbracket^{(\mathbb{B})} = 1.$$

Preuve. La première équivalence se démontre par récurrence (externe) sur la formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$. La deuxième équivalence découle de la première d'après la Prop. 12. □

Il est important de comprendre que dans le cas général (i.e. sans aucune hypothèse sur la formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$), aucune des deux implications qui forment l'équivalence

$$\phi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow V^{(\mathbb{B})} \models \phi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$$

n'est satisfaite. Cependant, il est possible (et en pratique très utile) de conserver l'implication directe dans un cas particulier, à savoir quand la formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$ est dans la classe Σ_1 :

Définition 6 (Formules Σ_1) — La classe des \in -formules Σ_1 est définie inductivement par les deux clauses suivantes :

1. Si ϕ est une \in -formule restreinte, alors ϕ est Σ_1 .
2. Si ϕ est une \in -formule Σ_1 , alors $\exists x \phi$ est Σ_1 .

Dualement, on définit la classe des \in -formules Π_1 en remplaçant les quantifications existentielles par des quantifications universelles.

Proposition 15 (Conservation des formules Σ_1) — *Si $\phi(x_1, \dots, x_n)$ est une \in -formule Σ_1 , alors pour tous x_1, \dots, x_n on a*

$$\phi(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \llbracket \phi(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \rrbracket^{(\mathbb{B})} = 1.$$

Preuve. Par récurrence (externe) sur la formule $\phi(x_1, \dots, x_n)$. □

(On a aussi l'énoncé dual avec les formules Π_1 .)

4 Satisfaction des axiomes de ZFC

Nous avons vu que l'axiome d'extensionnalité est vrai dans $V^{(\mathbb{B})}$ (Prop. 5), de même que le schéma d'induction ensembliste (Prop. 6) qui équivaut bien entendu à l'axiome de la fondation. Il s'agit à présent de démontrer que $V^{(\mathbb{B})}$ satisfait tous les autres axiomes de ZFC.

4.1 Paire, union, compréhension et collection

Proposition 16 (Axiome de la paire) — *L'axiome de la paire est vrai dans le modèle $V^{(\mathbb{B})}$:*

$$V^{(\mathbb{B})} \models \forall a \forall b \exists c \forall x (x \in c \Leftrightarrow x = a \wedge x = b).$$

Preuve. Étant donnés deux \mathbb{B} -ensembles a et b , on pose $c = \{(a, 1); (b, 1)\}$. Pour tout $u \in V^{(\mathbb{B})}$ on a alors

$$\llbracket u \in c \rrbracket = \bigvee_{v \in \text{dom}(c)} (c(v) \wedge \llbracket u = v \rrbracket) = \llbracket u = a \rrbracket \vee \llbracket u = b \rrbracket$$

d'où il ressort que $\llbracket \forall x (x \in c \Leftrightarrow x = a \vee x = b) \rrbracket = 1$. □

Dans $V^{(\mathbb{B})}$, la paire (non ordonnée) formée par deux \mathbb{B} -ensembles u et v est donc définie par $\{u; v\}^{(\mathbb{B})} = \{(u, 1); (v, 1)\}$. Dans ce qui suit, on utilisera également la notation

$$\langle u, v \rangle^{(\mathbb{B})} = \{\{u; u\}^{(\mathbb{B})}; \{u; v\}^{(\mathbb{B})}\}^{(\mathbb{B})}$$

pour désigner la paire ordonnée formée par u et v dans $V^{(\mathbb{B})}$.

Proposition 17 (Axiome de l'union) — *L'axiome de l'union est vrai dans le modèle $V^{(\mathbb{B})}$:*

$$V^{(\mathbb{B})} \models \forall a \exists c \forall x (x \in c \Leftrightarrow \exists y (y \in a \wedge x \in y)).$$

Preuve. Soit $a \in V^{(\mathbb{B})}$. On considère le \mathbb{B} -ensemble c défini par

- $\text{dom}(c) = \bigcup_{v \in \text{dom}(a)} \text{dom}(v)$
- $c(u) = \bigvee_{v \in \text{dom}(a)} (a(v) \wedge v(u))$ pour tout $u \in \text{dom}(b)$.

Pour tout $u \in V^{(\mathbb{B})}$ on a alors

$$\begin{aligned} \llbracket u \in c \rrbracket &= \bigvee_{u' \in \text{dom}(c)} (c(u') \wedge \llbracket u = u' \rrbracket) \\ &= \bigvee_{v \in \text{dom}(a)} \bigvee_{u' \in \text{dom}(v)} (a(v) \wedge v(u') \wedge \llbracket u = u' \rrbracket) \\ &= \bigvee_{v \in \text{dom}(a)} \left(a(v) \wedge \bigvee_{u' \in \text{dom}(v)} (v(u') \wedge \llbracket u = u' \rrbracket) \right) \\ &= \bigvee_{v \in \text{dom}(a)} (a(v) \wedge \llbracket u \in v \rrbracket) = \llbracket \exists y \in a \ u \in y \rrbracket \end{aligned}$$

d'où il ressort que $\llbracket \forall x (x \in c \Leftrightarrow \exists y \in a \ x \in y) \rrbracket = 1$. □

Proposition 18 (Schéma de compréhension) — *Le schéma de compréhension est vrai dans le modèle $V^{(\mathbb{B})}$, en ce sens que pour toute \in -formule $\phi(x)$ à une variable libre x et à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$ on a*

$$V^{(\mathbb{B})} \models \forall a \exists c \forall x (x \in c \Leftrightarrow x \in a \wedge \phi(x)).$$

Preuve. Soit $a \in V^{(\mathbb{B})}$. On considère le \mathbb{B} -ensemble c défini par

- $\text{dom}(c) = \text{dom}(a)$
- $c(u) = a(u) \wedge \llbracket \phi(u) \rrbracket$ pour tout $u \in \text{dom}(c)$

Pour tout $u \in V^{(\mathbb{B})}$ on a

$$\begin{aligned} \llbracket u \in c \rrbracket &= \bigvee_{v \in \text{dom}(c)} (c(v) \wedge \llbracket u = v \rrbracket) = \bigvee_{v \in \text{dom}(a)} (a(v) \wedge \llbracket \phi(v) \rrbracket \wedge \llbracket u = v \rrbracket) \\ &= \bigvee_{v \in \text{dom}(a)} (a(v) \wedge \llbracket u = v \rrbracket \wedge \llbracket \phi(u) \rrbracket) = \llbracket u \in a \rrbracket \wedge \llbracket \phi(u) \rrbracket \end{aligned}$$

d'où il ressort que $\llbracket \forall x (x \in c \Leftrightarrow x \in a \wedge \phi(x)) \rrbracket = 1$. □

Proposition 19 (Schéma de collection) — *Le schéma de collection est vrai dans le modèle $V^{(\mathbb{B})}$, en ce sens que pour toute \in -formule $\phi(x, y)$ à deux variables libres x et à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$ on a*

$$V^{(\mathbb{B})} \models \forall a \exists c \forall x \in a (\exists y \phi(x, y) \Rightarrow \exists y \in c \phi(x, y)).$$

Preuve. Soit $a \in V^{(\mathbb{B})}$. D'après le schéma de collection dans \mathcal{U} , il existe un ensemble $F \subset V^{(\mathbb{B})}$ tel que pour tous $u \in \text{dom}(a)$ et $b \in \mathbb{B}$, s'il existe $v \in V^{(\mathbb{B})}$ tel que $\llbracket \phi(u, v) \rrbracket = b$, alors il existe $v \in F$ tel que $\llbracket \phi(u, v) \rrbracket = b$. On pose alors $c = \{(v, 1) : v \in F\}$. Pour tout $u \in \text{dom}(a)$ on a

$$\begin{aligned} \llbracket \exists y \phi(u, y) \rrbracket &= \bigvee_{v \in V^{(\mathbb{B})}} \llbracket \phi(u, v) \rrbracket \\ &= \bigvee_{v \in \text{dom}(c)} (c(v) \wedge \llbracket \phi(u, v) \rrbracket) = \llbracket \exists y \in c \phi(u, y) \rrbracket \end{aligned}$$

(d'après la définition de $F = \text{dom}(c)$), d'où il ressort que

$$\begin{aligned} &\llbracket \forall x \in a (\exists y \phi(x, y) \Rightarrow \exists y \in c \phi(x, y)) \rrbracket \\ &= \bigwedge_{u \in \text{dom}(a)} (a(u) \Rightarrow \llbracket \exists y \phi(u, y) \rrbracket \Rightarrow \llbracket \exists y \in c \phi(u, y) \rrbracket) \\ &= \bigwedge_{u \in \text{dom}(a)} (a(u) \Rightarrow 1) = 1 \end{aligned} \quad \square$$

4.2 L'axiome des parties

À tout \mathbb{B} -ensemble a on associe le \mathbb{B} -ensemble noté $\mathfrak{P}^{(\mathbb{B})}(a)$ et défini par

- $\text{dom}(\mathfrak{P}^{(\mathbb{B})}(a)) = \mathbb{B}^{\text{dom}(a)}$
- $\mathfrak{P}^{(\mathbb{B})}(a)(u) = \llbracket u \subseteq a \rrbracket$ pour tout $u \in \text{dom}(\mathfrak{P}^{(\mathbb{B})}(a))$

Proposition 20 (Axiome des parties) — *L'axiome des parties est vrai dans le modèle $V^{(\mathbb{B})}$:*

$$V^{(\mathbb{B})} \models \forall a \exists c \forall x (x \in c \Leftrightarrow x \subseteq a).$$

Preuve. Soit $a \in V^{(\mathbb{B})}$ fixé, et posons $c = \mathfrak{P}^{(\mathbb{B})}(a)$. Il s'agit de démontrer que $\llbracket u \subseteq a \rrbracket = \llbracket u \in c \rrbracket$ pour tout $u \in V^{(\mathbb{B})}$. Pour cela, on fixe $u \in V^{(\mathbb{B})}$ et on considère le \mathbb{B} -ensemble u' défini par

- $\text{dom}(u') = \text{dom}(a)$
- $u'(v) = a(v) \wedge \llbracket v \in u \rrbracket$ pour tout $v \in \text{dom}(u') = \text{dom}(a)$

Par construction, on a $u' \in \text{dom}(c)$. Pour tout $v \in V^{(\mathbb{B})}$ on a

$$\begin{aligned} \llbracket v \in a \wedge v \in u \rrbracket &= \bigvee_{w \in \text{dom}(a)} (a(w) \wedge \llbracket v = w \rrbracket) \wedge \llbracket v \in u \rrbracket \\ &= \bigvee_{w \in \text{dom}(a)} (a(w) \wedge \llbracket v = w \rrbracket \wedge \llbracket v \in u \rrbracket) \\ &= \bigvee_{w \in \text{dom}(a)} (a(w) \wedge \llbracket w \in u \rrbracket \wedge \llbracket v = w \rrbracket) \\ &= \bigvee_{w \in \text{dom}(a)} (u'(w) \wedge \llbracket v = w \rrbracket) = \llbracket v \in u' \rrbracket \end{aligned}$$

Autrement dit : $V^{(\mathbb{B})} \models u' = a \cap u$. Ce qui entraîne que :

1. $\llbracket u' \subseteq u \rrbracket = 1$, d'où $\llbracket u \subseteq u' \rrbracket = \llbracket u = u' \rrbracket$.
2. $\llbracket u' \subseteq a \rrbracket = 1$, d'où $c(u') = \llbracket u' \subseteq a \rrbracket = 1$, soit : $\llbracket u' \in c \rrbracket = 1$.

On a alors

$$\llbracket u \subseteq a \rrbracket = \llbracket u \subseteq a \rrbracket \wedge \llbracket u \subseteq u \rrbracket = \llbracket u \subseteq u' \rrbracket = \llbracket u = u' \rrbracket$$

d'où $\llbracket u \subseteq a \rrbracket = \llbracket u = u' \rrbracket \wedge \llbracket u' \in c \rrbracket \leq \llbracket u \in c \rrbracket$. Réciproquement on a

$$\llbracket u \in c \rrbracket = \bigwedge_{v \in \text{dom}(c)} (\llbracket v \subseteq a \rrbracket \wedge \llbracket u = v \rrbracket) \leq \llbracket u \subseteq a \rrbracket. \quad \square$$

Il est utile de remarquer que

Lemme 4 — Pour tout $x \in \mathcal{U}$: $\widehat{\mathfrak{P}}(x) \subseteq \mathfrak{P}^{(\mathbb{B})}(\hat{x})$.

Preuve. Pour tout $y \in \mathfrak{P}(x)$ on a en effet $\llbracket \hat{y} \in \mathfrak{P}^{(\mathbb{B})}(\hat{x}) \rrbracket = \llbracket \hat{y} \subseteq \hat{x} \rrbracket = 1$. \square

Bien entendu, l'inclusion réciproque est en générale fausse dans $V^{(\mathbb{B})}$: l'ensemble des parties de \hat{x} dans $V^{(\mathbb{B})}$ est bien plus gros que l'ensemble des parties de x dans \mathcal{U} , et c'est même l'un des intérêts majeurs de la construction.

4.3 L'axiome de l'infini

Soient les abréviations

$$\begin{aligned} \text{zero}(x) &\equiv \forall y \in x \ y \neq y \\ \text{succ}(x, y) &\equiv x \subseteq y \wedge x \in y \wedge \forall z \in y \ (z \in x \vee z = x) \end{aligned}$$

qui expriment respectivement que x est l'ensemble vide et que $y = x \cup \{x\}$ (i.e. y est le successeur de x).

Proposition 21 (Axiome de l'infini) — L'axiome de l'infini est vrai dans le modèle $V^{(\mathbb{B})}$:

$$V^{(\mathbb{B})} \models \exists a (\exists x \in a \ \text{zero}(x) \wedge \forall x \in a \ \exists y \in a \ \text{succ}(x)).$$

Preuve. Cet axiome est de la forme $\exists a \phi(a)$, où ϕ est une \in -formule restreinte. Comme $\phi(\omega)$, on a alors $V^{(\mathbb{B})} \models \phi(\hat{\omega})$ d'après la Prop. 14. \square

4.4 L'axiome du choix

Nous savons maintenant que $V^{(\mathbb{B})} \models \phi$ pour toute formule close ϕ qui est un théorème de ZF. Pour étendre ce résultat à ZFC (sous l'hypothèse où $\mathcal{U} \models \text{AC}$), on commence par généraliser le second item du corollaire 2 p. 8 à des formules ϕ et ψ dépendant d'un nombre quelconque de variables :

Proposition 22 — Soient $\phi(x_1, \dots, x_n)$ et $\psi(x_1, \dots, x_n)$ deux \in -formules de variables libres x_1, \dots, x_n et à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$. Si :

1. $\mathcal{U} \models \text{AC}$
2. $V^{(\mathbb{B})} \models \exists x_1 \cdots \exists x_n \phi(x_1, \dots, x_n)$
3. $V^{(\mathbb{B})} \models \phi(u_1, \dots, u_n)$ entraîne $V^{(\mathbb{B})} \models \psi(u_1, \dots, u_n)$
pour tous $u_1, \dots, u_n \in V^{(\mathbb{B})}$,

alors $V^{(\mathbb{B})} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n (\phi(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \psi(x_1, \dots, x_n))$.

Preuve. On se ramène au corollaire 2 item 2 en considérant les formules

- $\phi'(z) \equiv \exists x_1 \cdots \exists x_n (z = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \wedge \phi(x_1, \dots, x_n))$ et
- $\psi'(z) \equiv \exists x_1 \cdots \exists x_n (z = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \wedge \psi(x_1, \dots, x_n))$

et en utilisant le fait que $V^{(\mathbb{B})} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists! z z = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. \square

Proposition 23 (Axiome du choix) — Si $\mathcal{U} \models \text{AC}$, alors l'axiome du choix est vrai dans le modèle $V^{(\mathbb{B})} : V^{(\mathbb{B})} \models \text{AC}$.

Preuve. Il s'agit de montrer que la formule « toute relation d'équivalence admet un système de représentants » est vraie dans $V^{(\mathbb{B})}$. Sans perte de généralité, on peut se restreindre au cas des relations d'équivalence non vides. (L'existence d'un système de représentants étant triviale dans le cas de la relation vide.) On considère les abréviations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{hab}(a) &\equiv \exists x x \in a \\ \text{rel}(r, x, y) &\equiv \langle x, y \rangle \in r \\ \text{equiv}(a, r) &\equiv \forall x \in a \text{ rel}(r, x, x) \\ &\quad \wedge \forall x \in a \forall y \in a (\text{rel}(r, x, y) \Rightarrow \text{rel}(r, y, x)) \\ &\quad \wedge \forall x \in a \forall y \in a \forall z \in a (\text{rel}(r, x, y) \Rightarrow \text{rel}(r, y, z) \Rightarrow \text{rel}(r, x, z)) \\ \text{repr}(a, r, c) &\equiv c \subseteq a \\ &\quad \wedge \forall x \in a \exists y \in c \text{ rel}(r, x, y) \\ &\quad \wedge \forall x \in c \forall y \in c (\text{rel}(r, x, y) \Rightarrow x = y) \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que

$$V^{(\mathbb{B})} \models \forall a \forall r (\text{hab}(a) \wedge \text{equiv}(a, r) \Rightarrow \exists c \text{ repr}(a, r, c)).$$

Pour cela on utilise la Prop. 22 en remarquant que

$$V^{(\mathbb{B})} \models \exists a \exists r (\text{hab}(a) \wedge \text{equiv}(a, r))$$

(la formule à droite du symbole \models étant un théorème de ZF). Soient $a, r \in V^{(\mathbb{B})}$ tels que (1) $V^{(\mathbb{B})} \models \text{hab}(a)$ et (2) $V^{(\mathbb{B})} \models \text{equiv}(a, r)$. Soit A un cœur de a . D'après (1), A est non vide. On considère la relation binaire \sim sur A définie pour tous $u, v \in A$ par

$$u \sim v \equiv V^{(\mathbb{B})} \models \text{rel}(r, u, v)$$

D'après (2), \sim est une relation d'équivalence sur A . Soit $C \subseteq A$ un système de représentants de la relation \sim , et c le \mathbb{B} -ensemble défini par $c = \{(u, 1) : u \in C\}$. (Par construction c est un \mathbb{B} -ensemble dont C est un cœur.) En utilisant la Prop. 22, on vérifie successivement que

1. $V^{(\mathbb{B})} \models \forall x (x \in c \Rightarrow x \in a)$
2. $V^{(\mathbb{B})} \models \forall x (x \in a \Rightarrow \exists y (y \in c \wedge \text{rel}(r, x, y)))$
3. $V^{(\mathbb{B})} \models \forall x \forall y (x \in c \wedge y \in c \wedge \text{rel}(r, x, y) \Rightarrow x = y),$

soit : $V^{(\mathbb{B})} \models \text{repr}(a, r, c)$. □

5 Ordinaux et cardinaux

5.1 Les ordinaux dans $V^{(\mathbb{B})}$

Dans ZF + AF, la classe des ordinaux est définie par la formule

$$\text{Ord}(\alpha) \equiv \forall x \in \alpha \ x \subseteq \alpha \ \wedge \ \forall x \in \alpha \ \forall y \in \alpha \ (x \in y \vee x = y \vee y \in x).$$

Comme cette formule est restreinte⁵, la Prop. 14 nous donne immédiatement :

Proposition 24 (Transfert des ordinaux) — *Pour tout ensemble x :*

$$\text{Ord}(x) \Leftrightarrow V^{(\mathbb{B})} \models \text{Ord}(\hat{x}).$$

On peut affiner ce résultat de la manière suivante :

Proposition 25 — *Pour tout \mathbb{B} -ensemble u , on a*

$$\llbracket \text{Ord}(u) \rrbracket = \bigvee_{\alpha \in \text{Ord}} \llbracket u = \hat{\alpha} \rrbracket.$$

Preuve. Pour tout $\alpha \in \text{Ord}$, on a $\llbracket u = \hat{\alpha} \rrbracket = \llbracket u = \hat{\alpha} \rrbracket \wedge \llbracket \text{Ord}(\hat{\alpha}) \rrbracket \leq \llbracket \text{Ord}(u) \rrbracket$ (car $\llbracket \text{Ord}(\hat{\alpha}) \rrbracket = 1$), d'où

$$\bigvee_{\alpha \in \text{Ord}} \llbracket u = \hat{\alpha} \rrbracket \leq \llbracket \text{Ord}(u) \rrbracket.$$

Réciproquement, on associe à tout $v \in \text{dom}(u)$ la classe D_v définie par

$$D_v = \{\beta \in \text{Ord} : \llbracket v = \hat{\beta} \rrbracket \neq 0\}.$$

On remarque que la correspondance $\beta \mapsto \llbracket v = \hat{\beta} \rrbracket$ est injective de D_v dans \mathbb{B} . Comme \mathbb{B} est un ensemble, D_v est aussi un ensemble. On pose alors

$$D = \bigcup_{v \in \text{dom}(u)} D_v,$$

et on considère un ordinal $\alpha_0 \notin D$. Comme la formule

$$\text{Ord}(x) \wedge \text{Ord}(y) \Rightarrow x \in y \vee x = y \vee y \in x$$

⁵On notera que la définition caractérise la classe des ordinaux uniquement dans la mesure où la relation d'appartenance est supposée bien fondée sur l'univers \mathcal{U} (axiome de la fondation). Dans le cas où on ne suppose pas l'axiome de la fondation, la classe des ordinaux ne peut pas être définie par une formule restreinte.

est un théorème de ZF + AF on a

$$\llbracket \text{Ord}(u) \rrbracket = \llbracket \text{Ord}(u) \wedge \text{Ord}(\hat{\alpha}_0) \rrbracket \leq \llbracket u \in \hat{\alpha}_0 \rrbracket \vee \llbracket u = \hat{\alpha}_0 \rrbracket \vee \llbracket \hat{\alpha}_0 \in u \rrbracket.$$

On remarque alors que pour tout $v \in \text{dom}(u)$ on a $\llbracket \hat{\alpha}_0 = v \rrbracket = 0$, d'où

$$\llbracket \alpha_0 \in u \rrbracket = \bigvee_{v \in \text{dom}(u)} (u(v) \wedge \llbracket \hat{\alpha}_0 = v \rrbracket) = 0.$$

Comme par ailleurs $\llbracket u \in \hat{\alpha}_0 \rrbracket = \bigvee_{\beta \in \alpha_0} \llbracket u = \hat{\beta} \rrbracket$, il vient

$$\llbracket \text{Ord}(u) \rrbracket \leq \llbracket u \in \hat{\alpha}_0 \rrbracket \vee \llbracket u = \hat{\alpha}_0 \rrbracket \leq \bigvee_{\alpha \in \text{Ord}} \llbracket u = \hat{\alpha} \rrbracket. \quad \square$$

Corollaire 3 (Quantification sur les ordinaux) — Si $\phi(x)$ est une \in -formule à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$, alors

$$\llbracket \exists x (\text{Ord}(x) \wedge \phi(x)) \rrbracket^{(\mathbb{B})} = \bigvee_{\alpha \in \text{Ord}} \llbracket \phi(\hat{\alpha}) \rrbracket.$$

Preuve. On a clairement l'inégalité $\bigvee_{\alpha \in \text{Ord}} \llbracket \phi(\hat{\alpha}) \rrbracket \leq \llbracket \exists x (\text{Ord}(x) \wedge \phi(x)) \rrbracket^{(\mathbb{B})}$. Réciproquement, pour tout $u \in V^{(\mathbb{B})}$ on a :

$$\llbracket \text{Ord}(u) \wedge \phi(u) \rrbracket = \bigvee_{\alpha \in \text{Ord}} (\llbracket u = \hat{\alpha} \rrbracket \wedge \llbracket \phi(u) \rrbracket) \leq \bigvee_{\alpha \in \text{Ord}} \llbracket \phi(\hat{\alpha}) \rrbracket,$$

d'où l'autre inégalité par passage à la borne supérieure. \square

D'après les Prop. 7 et 25, le mélange d'une famille d'ordinaux standards $(\alpha_i)_{i \in I}$ suivant une partition de l'unité $(b_i)_{i \in I}$ reste un ordinal dans $V^{(\mathbb{B})}$:

$$V^{(\mathbb{B})} \models \text{Ord}\left(\sum_{i \in I} b_i \hat{\alpha}_i\right).$$

Grâce à ce qui précède, on peut même démontrer que tous les ordinaux de $V^{(\mathbb{B})}$ sont de cette forme :

Proposition 26 (Décomposition des ordinaux) — Pour tout $u \in V^{(\mathbb{B})}$ tel que $V^{(\mathbb{B})} \models \text{Ord}(u)$, il existe une famille d'ordinaux $(\alpha_i)_{i \in I}$ (dans \mathcal{U}) et une partition de l'unité $(b_i)_{i \in I}$ telles que $V^{(\mathbb{B})} \models u = \sum_{i \in I} b_i \hat{\alpha}_i$.

Preuve. On considère la classe I définie par $I = \{\alpha \in \text{Ord} : \llbracket u = \hat{\alpha} \rrbracket > 0\}$, et on note $b_\alpha = \llbracket u = \hat{\alpha} \rrbracket$ pour tout $\alpha \in I$. Pour tous $\alpha_1, \alpha_2 \in I$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, on a

$$b_{\alpha_1} \wedge b_{\alpha_2} = \llbracket u = \hat{\alpha}_1 \wedge u = \hat{\alpha}_2 \rrbracket \leq \llbracket \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2 \rrbracket = 0.$$

d'où l'on déduit que la correspondance $\alpha \mapsto b_\alpha$ est injective de I dans \mathbb{B} . Par conséquent, I est un ensemble et $(b_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une antichaîne. Enfin d'après la Prop. 25 on a

$$\bigvee_{\alpha \in I} b_\alpha = \bigvee_{\alpha \in \text{Ord}} \llbracket u = \hat{\alpha} \rrbracket = \llbracket \text{Ord}(u) \rrbracket = 1$$

ce qui montre que $(b_\alpha)_{\alpha \in I}$ est une partition de l'unité. Soit $v = \sum_{\alpha \in I} b_\alpha$. Pour tout $\alpha \in I$ on a $\llbracket u = \hat{\alpha} \rrbracket = b_\alpha \leq \llbracket \hat{\alpha} = v \rrbracket$ d'après le Lemme 1 (lemme du mélange), d'où $b_\alpha \leq \llbracket u = \hat{\alpha} \wedge \hat{\alpha} = v \rrbracket \leq \llbracket u = v \rrbracket$ pour tout $\alpha \in I$, et finalement $1 \leq \llbracket u = v \rrbracket$ par passage à la borne supérieure. \square

5.2 Rappels de théorie des cardinaux

Avant d'analyser le comportement des cardinaux dans $V^{(\mathbb{B})}$, il est utile de rappeler quelques éléments de théorie des cardinaux.

Équipotence (sans AC) On dit que deux ensembles x et y sont *équipotents* s'ils sont en bijection. Une condition nécessaire et suffisante pour que deux ensembles x et y soient équipotents est qu'il existe une injection de x dans y et une injection de y dans x (lemme de Cantor-Bernstein-Schröder).

La classe des cardinaux (sans AC) On dit qu'un ordinal κ est un *cardinal* s'il n'existe aucun ordinal $\alpha < \kappa$ équipotent à κ . La classe des cardinaux est notée Card . D'après cette définition, il est immédiat que deux cardinaux sont équipotents si et seulement si ils sont égaux. Tout ordinal α est équipotent à un (unique) cardinal que l'on note $|\alpha|$. Ce cardinal est défini comme le plus petit ordinal $\kappa \leq \alpha$ tel que κ est équipotent à α . Par construction, deux ordinaux ont le même cardinal si et seulement si ils sont équipotents.

De plus on démontre (sans AC) que

Lemme 5 — *La classe des cardinaux est une classe propre.*

Preuve. Supposons que Card est un ensemble. Soient W l'ensemble des bons ordres définis sur un élément de Card , et W' l'image de W (construite par remplacement) à travers la correspondance qui à tout bon ordre associe son ordinal. Comme tout ordinal α est équipotent à un cardinal — et donc isomorphe à un bon ordre défini sur un élément Card — on a $W' = \text{Ord}$, ce qui est absurde puisque la classe des ordinaux n'est pas un ensemble. \square

Ordre sur les cardinaux (sans AC) La classe des cardinaux $\text{Card} \subseteq \text{Ord}$ est munie de l'ordre induit par la classe des ordinaux (c'est-à-dire de l'ordre de l'inclusion). On vérifie aisément que si κ et μ sont des cardinaux, $\kappa \leq \mu$ si et seulement si il existe une injection de κ dans μ . Si X est un ensemble de cardinaux, son union (c'est-à-dire sa borne supérieure dans la classe des ordinaux) est encore un cardinal. Les bornes supérieures se calculent donc dans la classe des cardinaux de la même manière que dans la classe des ordinaux. Par ailleurs, la classe des cardinaux n'a pas de plus grand élément (sinon Card serait un ensemble) et tout ordinal est majoré par un cardinal. Le plus petit cardinal strictement supérieur à un cardinal κ est noté κ^+ (« successeur de κ »).

Cardinaux finis et infinis (sans AC) Les ordinaux finis (i.e. les entiers naturels) sont tous des cardinaux. L'ordinal ω est lui-même un cardinal, que l'on note également \aleph_0 . (Il s'agit du plus petit cardinal infini.) L'ordinal $\omega + 1$ n'est pas un cardinal car il est en bijection avec l'ordinal ω ; c'est donc le plus petit ordinal qui n'est pas un cardinal. Les autres ordinaux dénombrables ne sont pas non plus des cardinaux. Le plus petit ordinal non dénombrable est à son tour un cardinal, que l'on note \aleph_1 .

Plus généralement, on construit la suite transfinie $(\aleph_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ des cardinaux infinis en définissant \aleph_α (pour chaque ordinal α) comme le plus petit cardinal κ tel que $\kappa > \aleph_\beta$ pour tout $\beta < \alpha$ (cardinal dont l'existence découle du fait que Card est une classe propre). Cette suite transfinie est caractérisée par

1. $\aleph_0 = \omega$
2. $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$ (= successeur de \aleph_α dans Card)
3. $\aleph_\alpha = \sup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta$ si α est un ordinal limite.

Tout cardinal κ est soit fini (i.e. $\kappa \in \omega = \aleph_0$), soit de la forme $\kappa = \aleph_\alpha$ pour un certain ordinal α . La classe des cardinaux infinis est donc en bijection avec la classe des ordinaux à travers la correspondance $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$. (De même pour la classe de tous les cardinaux.)

Conséquences de l'axiome du choix D'après l'axiome du choix, tout ensemble x peut-être muni d'un bon ordre, lui-même isomorphe à un certain ordinal. Par conséquent, tout ensemble x est équipotent à un unique cardinal, que l'on note $|x|$. Une conséquence de cette propriété est que pour deux ensembles quelconques x et y , il existe toujours ou bien une injection de x dans y ou bien une injection de y dans x (suivant que $|x| \leq |y|$ ou $|y| \leq |x|$).

Comme tout ensemble admet un cardinal, on peut définir la somme $\kappa + \mu$, le produit $\kappa \times \mu$ et la puissance κ^μ de deux cardinaux κ et μ comme le cardinal (respectivement) de l'union disjointe de κ et de μ , du produit cartésien de κ par μ et de l'ensemble des fonctions de μ dans κ . (Attention : ces opérations ne coïncident pas avec les opérations de somme, de produit et d'exponentiation telles qu'elles sont définies habituellement sur les ordinaux.) On démontre que pour tout cardinal infini \aleph_α on a $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$, d'où l'on tire les formules

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \times \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta) = \aleph_{\max(\alpha, \beta)}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \text{Ord}$.

Cardinal de l'ensemble des parties et hypothèse du continu Si κ est un cardinal, on note 2^κ le cardinal de l'ensemble des parties de κ . On a clairement $2^\kappa > \kappa$ et par conséquent $2^\kappa \geq \kappa^+$, en notant κ^+ le successeur du cardinal κ . L'hypothèse du continu s'écrit alors

$$(HC) \quad 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

tandis que l'hypothèse généralisée du continu s'exprime par la formule

$$(HGC) \quad \forall \alpha \in \text{Ord} \quad 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

(On notera que dans le cas où κ est un cardinal fini, il y a en général de nombreux cardinaux situés entre $\kappa + 1$ et 2^κ .)

De manière similaire à la hiérarchie $(\aleph_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ des cardinaux infinis, on définit la hiérarchie $(\beth_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$ en posant :

1. $\beth_0 = \aleph_0$
2. $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$
3. $\beth_\alpha = \sup_{\beta < \alpha} \beth_\beta$ si α est un ordinal limite.

Avec ces notations, l'hypothèse du continu s'écrit alors $\aleph_1 = \beth_1$ tandis que l'hypothèse généralisée du continu devient : $\forall \alpha \in \text{Ord} \quad \aleph_\alpha = \beth_\alpha$.

Notions avancées : cofinalité et régularité (avec AC) Soit α et β deux ordinaux. On dit que α est *cofinal* à β s'il existe une injection de α dans β (strictement) croissante dont l'image n'est pas bornée dans β . La relation « α est cofinal à β » est une relation d'ordre plus fine que l'ordre usuel sur les ordinaux (i.e. elle implique $\alpha \leq \beta$). Cette relation n'est pas totale (0 et 1 ne sont pas comparables) et n'admet pas de plus petit élément. Étant donné un ordinal α , on appelle la *cofinalité* de α et on note $\text{cof}(\alpha)$ le plus petit ordinal $\beta \leq \alpha$ tel que β est cofinal à α . Un ordinal α est *régulier* si $\text{cof}(\alpha) = \alpha$. (Les ordinaux réguliers sont donc les ordinaux minimaux pour la relation de cofinalité.) On démontre que tout ordinal régulier est un cardinal ; dans ce qui suit, on parlera donc de cardinaux réguliers. Les seuls cardinaux finis réguliers sont 0 et 1. Le cardinal \aleph_0 est régulier, de même que tous les cardinaux de la forme $\aleph_{\alpha+1}$ ($\alpha \in \text{Ord}$). Cette dernière propriété découle immédiatement du lemme suivant :

Lemme 6 (Cardinaux réguliers) — *Un cardinal μ est régulier si et seulement si pour tout cardinal $\kappa < \mu$ et pour toute famille de cardinaux $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$ tels que $\mu_\alpha < \mu$ (pour tout $\alpha \in \kappa$) on a $\sum_{\alpha \in \kappa} \mu_\alpha < \mu$.*

En revanche, le cardinal \aleph_ω n'est pas régulier, car $\text{cof}(\aleph_\omega) = \aleph_0$. On pourra également remarquer que

$$\aleph_\omega = \sup_{n \in \omega} \aleph_n = \sum_{n \in \aleph_0} \aleph_n.$$

Un outil important de théorie des cardinaux est le suivant :

Théorème 1 (König) — *Soient $(\mu_i)_{i \in I}$ et $(\nu_i)_{i \in I}$ deux familles de cardinaux indicées par un même ensemble I (quelconque). Si $\mu_i < \nu_i$ pour tout $i \in I$, alors*

$$\sum_{i \in I} \mu_i < \prod_{i \in I} \nu_i.$$

Preuve. Si $\mu_i < \nu_i$ pour tout $i \in I$, il existe (d'après AC) une famille d'injections $f_i : \mu_i \rightarrow \nu_i$ (pour $i \in I$). Comme aucune des injections f_i n'est surjective, il existe (d'après AC) une famille d'ordinaux $(\beta_i)_{i \in I}$ tels que $\beta_i \in (\nu_i \setminus f_i(\mu_i))$ pour tout $i \in I$. Soient $S = \sum_{i \in I} \mu_i$ et $P = \prod_{i \in I} \nu_i$ (on considère ici la somme et le produit au sens ensembliste). On vérifie aisément que la fonction $f : S \rightarrow P$ définie pour tous $i \in I$, $\alpha \in \mu_i$ et $j \in I$ par

$$(f(i, \alpha))_j = \begin{cases} f_i(\alpha) & \text{si } j = i \\ \beta_j & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

est injective, d'où l'inégalité $|S| \leq |P|$ (au sens large). Pour montrer que cette inégalité est stricte, supposons l'existence d'une bijection $h : S \rightarrow P$ et montrons que cette hypothèse est absurde. Pour chaque $i \in I$, on construit une fonction $g_i : \mu_i \rightarrow \nu_i$ en posant $g_i(\alpha) = (h(i, \alpha))_i$ pour tout $\alpha \in \mu_i$. La fonction g_i ne peut pas être surjective, car $\mu_i < \nu_i$. Ceci nous permet donc de choisir un élément $\gamma_i \in (\nu_i \setminus g_i(\mu_i))$ pour tout $i \in I$. Soit $(i_0, \alpha_0) = h^{-1}((\gamma_i)_{i \in I})$. On a alors

$$g_{i_0}(\alpha_0) = (h(i_0, \alpha_0))_{i_0} = ((\gamma_i)_{i \in I})_{i_0} = \gamma_{i_0} \notin g_{i_0}(\mu_{i_0}),$$

ce qui est absurde. Donc il n'y a pas de bijection de S sur P . \square

Corollaire 4 — Pour tout cardinal infini μ on a $\mu < \mu^{\text{cof}(\mu)}$.

Preuve. Soit $\kappa = \text{cof}(\mu)$. Dans le cas où $\kappa = \mu$ (μ est régulier), on a clairement $\mu < 2^\mu \leq \mu^\mu$. Dans le cas où $\kappa < \mu$ (μ n'est pas régulier), on vérifie aisément qu'il existe une suite de cardinaux $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \kappa}$ tels que $\mu_\alpha < \mu$ pour tout $\alpha \in \kappa$ et $\mu = \sup_{\alpha \in \kappa} \mu_\alpha$. On a alors d'après le théorème de König

$$\mu = \sup_{\alpha \in \kappa} \mu_\alpha \leq \sum_{\alpha \in \kappa} \mu_\alpha < \prod_{\alpha \in \kappa} \mu = \mu^\kappa. \quad \square$$

De ce corollaire on tire immédiatement que

Corollaire 5 — $\text{cof}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$.

Preuve. Soit $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. On a $\text{cof}(\mathfrak{c}) \geq \aleph_0$ (car \mathfrak{c} est infini). Comme $\mathfrak{c}^{\text{cof}(\mathfrak{c})} \neq \mathfrak{c}$ (Corollaire 4) et $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, il vient $\text{cof}(\mathfrak{c}) \neq \aleph_0$. \square

Le corollaire ci-dessus permet ainsi de démontrer (dans ZFC) que $\mathfrak{c} \neq \aleph_\omega$, $\mathfrak{c} \neq \aleph_{2^\omega}$, $\mathfrak{c} \neq \aleph_{\aleph_\omega}$, etc. et plus généralement que $\mathfrak{c} \neq \aleph_\alpha$ pour tout ordinal α tel que $\text{cof}(\alpha) = \aleph_0$ (car dans ce cas on a $\text{cof}(\aleph_\alpha) = \aleph_0$ également).

5.3 Les cardinaux dans $V^{(\mathbb{B})}$

Dans cette section on suppose que $\mathcal{U} \models \text{AC}$, et on considère les abréviations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{bij}(x, y, f) &\equiv \ll f \text{ est une bijection de } x \text{ sur } y \gg \\ \text{equip}(x, y) &\equiv \exists f \text{ bij}(x, y, f) \\ \text{Card}(\alpha) &\equiv \forall f (\text{Ord}(\alpha) \wedge \forall \beta \in \alpha \neg \text{bij}(\beta, \alpha, f)) \end{aligned}$$

Comme la formule $\text{bij}(x, y, f)$ est restreinte, les formules $\text{equip}(x, y)$ et $\text{Card}(\alpha)$ sont respectivement de classe Σ_1 et Π_1 . D'après la Prop. 15 on a alors :

Proposition 27 — Pour tous ensembles x, y, α on a

$$\begin{aligned} \text{equip}(x, y) &\Rightarrow V^{(\mathbb{B})} \models \text{equip}(\hat{x}, \hat{y}) \\ V^{(\mathbb{B})} \models \text{Card}(\hat{\alpha}) &\Rightarrow \text{Card}(\alpha) \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, tout élément de \mathcal{U} qui est un cardinal dans $V^{(\mathbb{B})}$ (à travers la correspondance $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$) est un cardinal dans \mathcal{U} , mais la réciproque est fautive en général. Intuitivement, $V^{(\mathbb{B})}$ contient moins de cardinaux standard que \mathcal{U} . (Mais $V^{(\mathbb{B})}$ contient également des cardinaux non standard.) Comme pour les ordinaux, on peut démontrer que tout cardinal de $V^{(\mathbb{B})}$ est un mélange de cardinaux de \mathcal{U} (la réciproque étant fautive en général).

Proposition 28 (Décomposition des cardinaux) — Pour tout $u \in V^{(\mathbb{B})}$ tel que $V^{(\mathbb{B})} \models \text{Card}(u)$, il existe une famille de cardinaux $(\kappa_i)_{i \in I}$ et une partition de l'unité $(b_i)_{i \in I}$ telles que $V^{(\mathbb{B})} \models u = \sum_{i \in I} b_i \hat{\kappa}_i$.

Preuve. D'après la Prop. 26, il existe une famille d'ordinaux $(\alpha_i)_{i \in I}$ et une partition de l'unité $(b_i)_{i \in I}$ telles que $V^{(\mathbb{B})} \models u = \sum_{i \in I} b_i \hat{\alpha}_i$. Quitte à restreindre I , on peut supposer que $b_i \neq 0$ pour tout $i \in I$. Montrons à présent que tous les ordinaux α_i sont des cardinaux. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un indice $i \in I$ tel que α_i n'est pas un cardinal. Comme la

formule « x n'est pas un cardinal » est Σ_1 , on a $\llbracket \text{Card}(\hat{\alpha}_i) \rrbracket = 0$. Or d'après le lemme du mélange, on a également

$$0 \neq b_i \leq \llbracket u = \hat{\alpha}_i \rrbracket = \llbracket u = \hat{\alpha}_i \rrbracket \wedge \llbracket \text{Card}(u) \rrbracket \leq \llbracket \text{Card}(\hat{\alpha}_i) \rrbracket,$$

ce qui est absurde. Donc pour tout $i \in I$, α_i est un cardinal. \square

Proposition 29

1. $V^{(\mathbb{B})} \models \widehat{\aleph}_0 = \aleph_0$
2. Pour tout ordinal α : $V^{(\mathbb{B})} \models \widehat{\aleph}_\alpha \leq \aleph_{\hat{\alpha}}$

Preuve. 1. Conséquence de la Prop. 14, car l'énoncé $x = \aleph_0$ (« x est l'ordinal ω ») peut être défini par une formule restreinte.

2. On note tout d'abord que pour tout ordinal α on a $V^{(\mathbb{B})} \models \text{Ord}(\widehat{\aleph}_\alpha)$, même si on n'a pas nécessairement $V^{(\mathbb{B})} \models \text{Card}(\widehat{\aleph}_\alpha)$. On démontre la propriété par induction transfinie pour tout ordinal $\alpha > 0$. Soit $\alpha > 0$ tel que pour tout $\beta < \alpha$ on ait $V^{(\mathbb{B})} \models \widehat{\aleph}_\beta \leq \aleph_{\hat{\beta}}$. On commence par démontrer que pour tout ordinal $\xi < \aleph_\alpha$ on a $V^{(\mathbb{B})} \models \hat{\xi} < \aleph_{\hat{\alpha}}$. On distingue deux cas :

1. $\xi < \aleph_0$. Dans ce cas on a $V^{(\mathbb{B})} \models \hat{\xi} < \widehat{\aleph}_0 = \aleph_0 \leq \aleph_{\hat{\alpha}}$.
2. $\xi \geq \aleph_0$. Dans ce cas il existe $\beta < \alpha$ tel que $|\xi| = \aleph_\beta$. On a alors
 - $V^{(\mathbb{B})} \models |\hat{\xi}| = |\widehat{\aleph}_\beta| \leq \widehat{\aleph}_\beta$ (Prop. 27)
 - $V^{(\mathbb{B})} \models |\hat{\xi}| \leq \aleph_{\hat{\beta}}$ (hypothèse d'induction)
 - $V^{(\mathbb{B})} \models |\hat{\xi}| < \aleph_{\hat{\alpha}}$ (car $V^{(\mathbb{B})} \models \aleph_{\hat{\beta}} < \aleph_{\hat{\alpha}}$ puisque $V^{(\mathbb{B})} \models \hat{\alpha} < \hat{\beta}$)
 - $V^{(\mathbb{B})} \models \hat{\xi} < \aleph_{\hat{\alpha}}$

On a alors

$$\llbracket \widehat{\aleph}_\alpha \subseteq \aleph_{\hat{\alpha}} \rrbracket = \bigvee_{v \in \text{dom}(\widehat{\aleph}_\alpha)} (\widehat{\aleph}_\alpha(v) \Rightarrow \llbracket v \in \aleph_{\hat{\alpha}} \rrbracket) = \bigvee_{\xi < \aleph_\alpha} \llbracket \hat{\xi} \in \aleph_{\hat{\alpha}} \rrbracket = 1,$$

soit $V^{(\mathbb{B})} \models \widehat{\aleph}_\alpha \leq \aleph_{\hat{\alpha}}$. \square

Nous avons vu que $V^{(\mathbb{B})}$ contient moins de cardinaux que \mathcal{U} (en se limitant aux cardinaux standard). On peut néanmoins faire coïncider les cardinaux de \mathcal{U} avec les cardinaux standard de $V^{(\mathbb{B})}$ en supposant la condition suivante sur l'algèbre de Boole \mathbb{B} :

Définition 7 (Condition de chaîne dénombrable) — On dit que l'algèbre de Boole \mathbb{B} satisfait la *condition de chaîne dénombrable* si toute antichaîne de \mathbb{B} a un support fini ou dénombrable.

On notera que la terminologie de « condition de chaîne dénombrable » est particulièrement maladroite puisqu'elle porte sur les antichaînes plutôt que sur les chaînes. Mais puisque c'est la terminologie consacrée par l'usage...

Proposition 30 — Si \mathbb{B} satisfait la condition de chaîne dénombrable, alors pour tous x, y et pour tout ordinal α :

1. $\text{Card}(\alpha) \Rightarrow V^{(\mathbb{B})} \models \text{Card}(\hat{\alpha})$
2. $V^{(\mathbb{B})} \models \widehat{\aleph}_\alpha = \aleph_{\hat{\alpha}}$

3. $\text{equip}(x, y) \Leftrightarrow V^{(\mathbb{B})} \models \text{equip}(\hat{x}, \hat{y})$.

Preuve. 1. L'implication est immédiate dans le cas où α est un cardinal fini ou dénombrable. Supposons donc que α est un cardinal infini non dénombrable. On cherche à démontrer que pour tout $\beta < \alpha$ et pour tout $f \in V^{(\mathbb{B})}$

$$\llbracket f \text{ est une surjection de } \hat{\beta} \text{ sur } \hat{\alpha} \rrbracket = 0$$

Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que

$$a = \llbracket f \text{ est une surjection de } \hat{\beta} \text{ sur } \hat{\alpha} \rrbracket \neq 0$$

On a donc

$$a \leq \llbracket \forall x \in \hat{\alpha} \exists y \in \hat{\beta} \langle y, x \rangle \in f \rrbracket,$$

soit

$$a \leq \bigwedge_{\xi \in \alpha} \bigvee_{\eta \in \beta} \llbracket \langle \hat{\eta}, \hat{\xi} \rangle \in f \rrbracket.$$

Comme $a \neq 0$, pour tout ordinal $\xi \in \alpha$ il existe au moins un ordinal $\eta_\xi \in \beta$ tel que $\llbracket \langle \hat{\eta}_\xi, \hat{\xi} \rangle \in f \rrbracket \wedge a \neq 0$. Comme α est un cardinal infini non dénombrable et comme $\beta < \alpha$, il existe un ordinal $\gamma \in \beta$ tel que l'ensemble

$$X = \{\xi < \alpha : \eta_\xi = \gamma\}$$

est infini non dénombrable (principe des tiroirs). En utilisant le fait que $a \leq \llbracket f \text{ est une fonction} \rrbracket$, on vérifie alors aisément que la famille

$$(\llbracket \langle \hat{\gamma}, \hat{\xi} \rangle \in f \rrbracket \wedge a)_{\xi \in X}$$

est une antichaîne non dénombrable, ce qui contredit l'hypothèse sur \mathbb{B} . De ceci il ressort que pour tout $\beta < \alpha$ on a $\llbracket \text{equip}(\hat{\beta}, \hat{\alpha}) \rrbracket = 0$ d'où

$$\llbracket \text{Card}(\hat{\alpha}) \rrbracket = \bigwedge_{\beta < \alpha} \llbracket \neg \text{equip}(\hat{\beta}, \hat{\alpha}) \rrbracket = 1.$$

2. On raisonne par induction sur α . Supposons que $V^{(\mathbb{B})} \models \widehat{\aleph}_\beta = \aleph_\beta$ pour tout ordinal $\beta < \alpha$. D'après la Prop. 29, il suffit de montrer que $V^{(\mathbb{B})} \models \aleph_{\hat{\alpha}} \leq \widehat{\aleph}_\alpha$. D'après 1. on a $V^{(\mathbb{B})} \models \text{Card}(\widehat{\aleph}_\alpha)$. Pour tout $\beta < \alpha$ on a $V^{(\mathbb{B})} \models \widehat{\aleph}_\beta < \widehat{\aleph}_\alpha$, et comme $V^{(\mathbb{B})} \models \widehat{\aleph}_\beta = \aleph_{\hat{\beta}}$ (hypothèse d'induction) il vient $V^{(\mathbb{B})} \models \aleph_{\hat{\beta}} < \widehat{\aleph}_\alpha$. On a alors

$$\begin{aligned} 1 &= \llbracket \text{Card}(\widehat{\aleph}_\alpha) \rrbracket \wedge \bigwedge_{\beta < \alpha} \llbracket \aleph_{\hat{\beta}} < \widehat{\aleph}_\alpha \rrbracket \\ &= \llbracket \text{Card}(\widehat{\aleph}_\alpha) \wedge \forall \beta \in \alpha \aleph_\beta < \widehat{\aleph}_\alpha \rrbracket \leq \llbracket \aleph_{\hat{\alpha}} \leq \widehat{\aleph}_\alpha \rrbracket. \end{aligned}$$

3. D'après la Prop. 27 il suffit de montrer que $V^{(\mathbb{B})} \models \text{equip}(\hat{x}, \hat{y})$ entraîne $\text{equip}(x, y)$. On raisonne par contraposition en supposant que x et y ne sont pas équipotents. D'après (AC), il existe des cardinaux κ et μ tels que $\text{equip}(x, \kappa)$, $\text{equip}(y, \mu)$ et $\kappa \neq \mu$. On a d'après la Prop. 27 (2.) et le point 1. ci-dessus :

$$V^{(\mathbb{B})} \models \text{Card}(\hat{\kappa}) \wedge \text{Card}(\hat{\mu}) \wedge \hat{\kappa} \neq \hat{\mu} \wedge \text{equip}(\hat{x}, \hat{\kappa}) \wedge \text{equip}(\hat{y}, \hat{\mu}).$$

Par conséquent : $V^{(\mathbb{B})} \models \neg \text{equip}(\hat{x}, \hat{y})$, d'où $V^{(\mathbb{B})} \not\models \text{equip}(\hat{x}, \hat{y})$. \square

Lemme 7 — Pour tout $u \in V^{(\mathbb{B})}$: $V^{(\mathbb{B})} \models |u| \leq |\widehat{\text{dom}(u)}|$.

Preuve. Il suffit de montrer que

$$V^{(\mathbb{B})} \models \exists f (\text{fonction}(f) \wedge \text{dom}(f) = \widehat{\text{dom}(u)} \wedge u \subseteq \text{im}(f)).$$

Pour cela on considère le \mathbb{B} -ensemble f défini par

$$f = \{(\langle \hat{z}, z \rangle^{(\mathbb{B})}, 1) : z \in \text{dom}(u)\}$$

et on vérifie que f satisfait les conditions requises dans $V^{(\mathbb{B})}$. \square

6 Construction par forcing

6.1 Ensembles de conditions

Une manière simple de construire une algèbre de Boole complète consiste à partir d'un préordre (\mathbb{P}, \leq) quelconque. Les éléments de \mathbb{P} sont appelés des conditions, et la relation $p \leq q$ se lit : « p est plus forte que q ».

La relation de compatibilité entre deux éléments $p, q \in \mathbb{P}$ est définie par

$$p \top q \equiv \exists r \in \mathbb{P} (r \leq p \wedge r \leq q)$$

et sa négation est notée $p \perp q$ (« p et q sont incompatibles »). L'orthogonal d'un ensemble de conditions $X \subseteq \mathbb{P}$ est défini par

$$X^\perp = \{q \in \mathbb{P} : p \perp q\}.$$

Cet ensemble est clos inférieurement dans \mathbb{P} . Comme d'habitude, on a :

1. $Y \subseteq X$ entraîne $X^\perp \subseteq Y^\perp$ (contravariance de l'orthogonal)
2. $X \subseteq X^{\perp\perp}$ (clôture par bi-orthogonal)
3. $X^{\perp\perp\perp} = X^\perp$ (tri-orthogonal)

Dans le cas où X est un ensemble clos inférieurement dans \mathbb{P} , les définitions de X^\perp et de $X^{\perp\perp}$ se simplifient de la manière suivante :

Lemme 8 — Pour tout ensemble de conditions $X \subseteq \mathbb{P}$ qui est clos inférieurement et pour toute condition $p \in \mathbb{P}$ on a :

$$\begin{aligned} p \in X^\perp &\Leftrightarrow \forall q \leq p \quad q \notin X \\ p \in X^{\perp\perp} &\Leftrightarrow \forall q \leq p \quad \exists r \leq q \quad r \in X \end{aligned}$$

Si en outre $Y \subseteq \mathbb{P}$ est clos inférieurement, alors :

$$(X \cap Y)^{\perp\perp} = X^{\perp\perp} \cap Y^{\perp\perp}.$$

On désigne alors par $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ l'ensemble des ensembles de conditions égaux à leur bi-orthogonal, c'est-à-dire $\mathcal{B}(\mathbb{P}) = \{X \subseteq \mathbb{P} : X = X^{\perp\perp}\}$, et on vérifie que

Proposition 31 (Algèbre engendrée par \mathbb{P}) — L'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ muni de l'ordre de l'inclusion est une algèbre de Boole complète, où

1. $0 = \emptyset$ et $1 = \mathbb{P}$

2. $X \wedge Y = X \cap Y$ et $X \vee Y = (X \cup Y)^{\perp\perp}$
3. $\neg X = X^\perp$.

Preuve. Par construction, $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ est un treillis complet où $X \wedge Y = X \cap Y$ et où $X \vee Y = (X \cup Y)^{\perp\perp}$. Ce treillis complet est également muni d'une involution antimotone $X \mapsto X^\perp$. Pour conclure, il reste à établir la loi de distributivité, c'est-à-dire pour tous $X, Y, Z \in \mathcal{B}(\mathbb{P})$:

$$\begin{aligned} (X \vee Y) \wedge Z &= (X \cup Y)^{\perp\perp} \cap Z = (X \cup Y)^{\perp\perp} \cap Z^{\perp\perp} \\ &= ((X \cup Y) \cap Z)^{\perp\perp} = ((X \cap Z) \cup (Y \cap Z))^{\perp\perp} \\ &= (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 8 pour $(X \cup Y)^{\perp\perp} \cap Z^{\perp\perp} = ((X \cup Y) \cap Z)^{\perp\perp}$. \square

Par ailleurs, l'ensemble de conditions \mathbb{P} s'envoie de manière monotone dans l'algèbre de Boole $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ à travers l'application $p \mapsto p^{\perp\perp}$ (qui n'est pas injective en général). L'algèbre de Boole complète $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ peut donc être vue comme une forme de complétion du préordre (\mathbb{P}, \leq) dans laquelle les conditions qui ont le même (bi-)orthogonal sont identifiées.

Réciproquement, toute algèbre de Boole complète \mathbb{B} peut être construite de cette manière, en remarquant que

Proposition 32 — *Si \mathbb{B} est une algèbre de Boole complète, alors l'algèbre de Boole complète $\mathcal{B}(\mathbb{B} \setminus \{0\})$ engendrée par $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ est isomorphe à \mathbb{B} .*

6.2 Forcing dans $V^{(\mathbb{B})}$

Supposons à présent que le modèle $V^{(\mathbb{B})}$ est construit à partir de l'algèbre de Boole $\mathbb{B} = \mathcal{B}(\mathbb{P})$ engendrée par un ensemble de conditions (\mathbb{P}, \leq) . (D'après la Prop. 32, on peut toujours faire cette hypothèse quitte à prendre $\mathbb{P} = \mathbb{B} \setminus \{0\}$.) Dans ce cadre, on définit la relation de forcing par

$$p \Vdash \phi \equiv p \in \llbracket \phi \rrbracket^{(\mathbb{B})}$$

(où ϕ est une formule quelconque à paramètres dans $V^{(\mathbb{B})}$). Par construction, l'ensemble $\llbracket \phi \rrbracket^{(\mathbb{B})}$ est clos inférieurement dans \mathbb{P} , c'est-à-dire :

$$q \leq p \wedge p \Vdash \phi \Rightarrow q \Vdash \phi.$$

En utilisant la définition simplifiée de l'orthogonal et du bi-orthogonal d'un ensemble de conditions clos inférieurement dans \mathbb{P} (Lemme 8), on obtient alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} p \Vdash \neg \phi &\Leftrightarrow \forall q \leq p \quad q \not\Vdash \phi \\ p \Vdash \phi \wedge \psi &\Leftrightarrow p \Vdash \phi \wedge p \Vdash \psi \\ p \Vdash \phi \vee \psi &\Leftrightarrow \forall q \leq p \quad \exists r \leq q \quad (r \Vdash \phi \vee r \Vdash \psi) \\ p \Vdash \phi \Rightarrow \psi &\Leftrightarrow \forall q \leq p \quad (q \Vdash \phi \Rightarrow \exists r \leq q \quad r \Vdash \psi) \\ p \Vdash \forall x \phi(x) &\Leftrightarrow \forall u \in V^{(\mathbb{B})} \quad p \Vdash \phi(u) \\ p \Vdash \exists x \phi(x) &\Leftrightarrow \forall q \leq p \quad \exists r \leq q \quad \exists u \in V^{(\mathbb{B})} \quad r \Vdash \phi(u) \end{aligned}$$

Le modèle $V^{(\mathbb{P})}$ En pratique, on peut se passer entièrement de l'algèbre de Boole engendrée par \mathbb{P} dans la construction du modèle en remplaçant la notion de \mathbb{B} -ensemble par la notion de \mathbb{P} -ensemble définie inductivement par la clause

- Si X est un ensemble de \mathbb{P} -ensembles et si $u \subseteq X \times \mathbb{P}$, alors u est un \mathbb{P} -ensemble.

Intuitivement, les fonctions de X dans \mathbb{B} sont remplacées par des relations binaires $u \subseteq X \times \mathbb{P}$, de telles relations pouvant toujours être vues comme des \mathbb{B} -ensembles où l'application est définie par $u(v) = \{p \in \mathbb{P} : (v, p) \in u\}^{\perp\perp}$. Comme pour $V^{(\mathbb{B})}$ on construit une hiérarchie $(V_\alpha^{(\mathbb{P})})_{\alpha \in \text{Ord}}$ en posant

$$V_\alpha^{(\mathbb{P})} = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathfrak{P}(V_\beta^{(\mathbb{P})} \times \mathbb{P})$$

pour tout $\alpha \in \text{Ord}$ et on note $V^{(\mathbb{P})} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} V_\alpha^{(\mathbb{P})}$.

Toute la difficulté de l'exercice réside ensuite dans la définition des relations de forcing $p \Vdash u \in v$ et $p \Vdash u = v$ sur les formules atomiques (avec $u, v \in V^{(\mathbb{P})}$) de telle sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} \llbracket u \in v \rrbracket &:= \{p : p \Vdash u \in v\} \in \mathbb{B}(\mathbb{P}), \\ \llbracket u = v \rrbracket &:= \{p : p \Vdash u = v\} \in \mathbb{B}(\mathbb{P}) \end{aligned}$$

et qu'on retrouve les égalités attendues :

$$\begin{aligned} \llbracket u = v \rrbracket &= \bigwedge_{w \in V^{(\mathbb{P})}} (u(w) \Rightarrow \llbracket w \in v \rrbracket) \wedge \bigwedge_{w \in V^{(\mathbb{P})}} (v(w) \Rightarrow \llbracket w \in u \rrbracket) \\ \llbracket u \in v \rrbracket &= \bigvee_{w \in V^{(\mathbb{P})}} (v(w) \wedge \llbracket u = w \rrbracket) \end{aligned}$$

dans l'algèbre de Boole engendrée, en notant $u(w) = \{p : (w, p) \in u\}^{\perp\perp}$.

Le modèle de forcing $V^{(\mathbb{P})}$ ainsi défini est évidemment isomorphe au modèle booléen $V^{(\mathbb{B})}$ (avec $\mathbb{B} = \mathcal{B}(\mathbb{P})$) en ce sens qu'il existe une fonction $u \mapsto u^\dagger$ de $V^{(\mathbb{P})}$ dans $V^{(\mathbb{B})}$ telle que pour toute formule de la théorie des ensembles $\phi(x_1, \dots, x_n)$ (sans paramètres), pour tous \mathbb{P} -ensembles $u_1, \dots, u_n \in V^{(\mathbb{P})}$ et pour toute condition $p \in \mathbb{P}$ on ait

$$p \Vdash \phi(u_1, \dots, u_n) \Leftrightarrow p \in \llbracket \phi(u_1^\dagger, \dots, u_n^\dagger) \rrbracket.$$

Le forcing de Cohen La construction qui précède est difficile à manipuler en pratique car les formules qui définissent la relation $p \Vdash \phi$ sont très lourdes. Pour simplifier ces formules, Cohen utilise [2, 3] une relation de forcing $p \Vdash \phi$ pour laquelle l'ensemble des conditions forçant ϕ n'est pas nécessairement un élément de l'algèbre de Boole \mathbb{B} engendrée par (\mathbb{P}, \leq) , mais seulement un ensemble de conditions clos inférieurement. La construction de Cohen reste équivalente à la construction précédente dans la mesure où l'on conserve l'égalité

$$\{p : p \Vdash \phi\}^{\perp\perp} = \{p : p \Vdash \phi\} = \llbracket \phi \rrbracket.$$

La conservation des relations ci-dessus est facilitée par les égalités

$$\left(\bigcap_i X_i \right)^{\perp\perp} = \bigwedge_i X_i^{\perp\perp} \quad \text{et} \quad \left(\bigcup_i X_i \right)^{\perp\perp} = \bigvee_i X_i^{\perp\perp}$$

(en supposant les X_i clos inférieurement) qui permettent d'interpréter la disjonction par l'union et la conjonction par l'intersection. Dans ce cadre, seule l'interprétation de la négation reste non triviale, puisqu'on conserve la définition par orthogonalité. Formellement, la relation de forcing $p \Vdash \phi$ au sens de Cohen est définie sur les formules non atomiques par :

$$\begin{aligned}
p \Vdash \neg \phi &\Leftrightarrow \forall q \leq p \quad q \nVdash \phi \\
p \Vdash \phi \wedge \psi &\Leftrightarrow p \Vdash \phi \wedge p \Vdash \psi \\
p \Vdash \phi \vee \psi &\Leftrightarrow p \Vdash \phi \vee p \Vdash \psi \\
p \Vdash \phi \Rightarrow \psi &\Leftrightarrow \forall q \leq p \quad (q \Vdash \phi \Rightarrow p \Vdash \psi) \\
p \Vdash \forall x \phi(x) &\Leftrightarrow \forall u \in V^{(\mathbb{P})} \quad p \Vdash \phi(u) \\
p \Vdash \exists x \phi(x) &\Leftrightarrow \exists u \in V^{(\mathbb{P})} \quad p \Vdash \phi(u)
\end{aligned}$$

Les relations $p \Vdash u \in v$ et $p \Vdash u = v$ sont alors définies par induction sur les rangs de u et de v par les équivalences :

$$\begin{aligned}
p \Vdash u \in v &\Leftrightarrow \exists w \exists r \geq p \quad ((w, r) \in v \wedge p \Vdash u = w) \\
p \Vdash u = v &\Leftrightarrow \forall w \forall q \leq p \quad \forall r \geq q \quad ((w, r) \in u \Rightarrow p \Vdash w \in v) \wedge \\
&\quad \forall w \forall q \leq p \quad \forall r \geq q \quad ((w, r) \in v \Rightarrow p \Vdash w \in u)
\end{aligned}$$

(Exercice : vérifier que $\{p : p \Vdash \phi\}^{\perp\perp} = \llbracket \phi \rrbracket$. On peut également vérifier que la définition ci-dessus est équivalente à celle qui est donnée dans [6].)

6.3 Antichaînes de conditions

Dans cette section, on suppose l'axiome du choix ($\mathcal{Z} \models \text{AC}$).

La notion d'antichaîne (définie au départ dans les algèbres de Boole) se définit de manière analogue dans n'importe quel ensemble de conditions (\mathbb{P}, \leq) à partir de la relation d'incompatibilité $p \perp q \equiv \neg \exists r \in \mathbb{P} \quad (r \leq p \wedge r \leq q)$. Formellement, on dit qu'un ensemble de conditions $A \subseteq \mathbb{P}$ est une antichaîne si pour tous $p, q \in A$ tels que $p \neq q$ on a $p \perp q$. On notera qu'un ensemble de conditions $A \subseteq \mathbb{P}$ est une antichaîne si et seulement si l'ensemble

$$A' = \{p^{\perp\perp} : p \in A\}$$

est une antichaîne dans l'algèbre de Boole engendrée. Comme pour les algèbres de Boole, on dit qu'un ensemble de conditions (\mathbb{P}, \leq) satisfait la *condition de chaîne dénombrable* si toute antichaîne de \mathbb{P} est finie ou dénombrable.

On vérifie alors (en utilisant l'axiome du choix) que

Proposition 33 — *Un ensemble de conditions (\mathbb{P}, \leq) satisfait la condition de chaîne dénombrable si et seulement si l'algèbre de Boole engendrée $\mathbb{B} = \mathcal{B}(\mathbb{P})$ satisfait la condition de chaîne dénombrable (au sens des algèbres de Boole).*

Preuve. La condition sur \mathbb{P} entraîne celle sur \mathbb{B} . Supposons que \mathbb{P} satisfait la condition de chaîne dénombrable, et considérons une antichaîne $A \subseteq \mathbb{B}$ (au sens des algèbres de Boole). Sans perte de généralité, on peut supposer que $\emptyset \notin A$. Soit $h : A \rightarrow \mathbb{P}$ une fonction de choix qui à tout $X \in A$ associe une condition $h(X) \in X$. Comme les éléments de A sont des ensembles de conditions deux à deux disjoints, la fonction h est une injection de A dans \mathbb{P} . Soit A' l'image de l'antichaîne A par h dans \mathbb{P} . On vérifie aisément que A' est une antichaîne de \mathbb{P} (au sens de \mathbb{P}). Donc A' est au plus dénombrable, de même que A .

La condition sur \mathbb{B} entraîne celle sur \mathbb{P} . Supposons que \mathbb{B} satisfait la condition de chaîne dénombrable, et considérons une antichaîne $A \subseteq \mathbb{P}$ (au sens des ensembles de conditions). L'ensemble $A' = \{p^{\perp\perp} : p \in A\}$ est une antichaîne de \mathbb{B} de même cardinal que A . Donc A' et A sont au plus dénombrables. \square

L'axiome du choix permet également de démontrer un résultat très utile :

Lemme 9 — *Tout ensemble de conditions (P, \leq) admet une antichaîne maximale au sens de l'inclusion.*

Preuve. On applique le lemme de Zorn à l'ensemble des antichaînes de \mathbb{P} . \square

Lemme 10 — *Soit \mathbb{P} un ensemble infini de conditions et \mathbb{B} l'algèbre de Boole engendrée. Si \mathbb{P} satisfait la condition de chaîne dénombrable, alors $|\mathbb{B}| \leq |\mathbb{P}|^{\aleph_0}$.*

Preuve. Soit \mathcal{A} l'ensemble des antichaînes de \mathbb{P} . D'après la condition de chaîne dénombrable, on a $|\mathcal{A}| \leq |\mathbb{P}|^{\aleph_0}$. D'après l'axiome du choix et le lemme de Zorn, il existe une fonction $F : \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{A}$ qui à tout élément $X \subseteq \mathbb{B}$ associe une antichaîne $F(X) \subseteq X$ qui est maximale dans X . Montrons à présent que pour tout $X \in \mathbb{B}$ on a $F(X)^\perp = X^\perp$, c'est-à-dire : $F(X)^\perp \subseteq X^\perp$ (l'autre inclusion est immédiate). Soit $q \in F(X)^\perp$ et $p \in X$. Pour montrer que $p \perp q$, on suppose qu'il existe $r \in \mathbb{P}$ tel que $r \leq p$ et $r \leq q$. On vérifie aisément que

1. $r \in X$ (car X est clos inférieurement)
2. $r \notin F(X)$ (sinon on aurait $r \perp q$, ce qui est impossible)
3. $r \in F(X)^\perp$ (car $F(X)^\perp$ est clos inférieurement)

Par conséquent, $F(X) \cup \{r\}$ est une antichaîne de X , ce qui contredit la maximalité de $F(X)$. Donc $p \perp q$, et $F(X)^\perp = X^\perp$. D'où $X = F(X)^{\perp\perp}$, ce qui entraîne que $F : \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{A}$ est injective, et que $|\mathbb{B}| \leq |\mathcal{A}| \leq |\mathbb{P}|^{\aleph_0}$. \square

6.4 L'algèbre des ouverts réguliers

La construction esquissée dans les sections 6.1 et 6.2 est une instance particulière d'une construction plus générale où l'ensemble de conditions est remplacé par un espace topologique quelconque. Si P est un espace topologique, on dit qu'un ouvert $U \subseteq P$ est *régulier* si

$$U = \overset{\circ}{\overline{U}}.$$

L'ensemble des ouverts réguliers de P est noté $\text{RO}(P)$. On vérifie alors que :

Proposition 34 (Algèbre des ouverts réguliers) — *L'ensemble $\text{RO}(P)$ muni de l'ordre de l'inclusion est une algèbre de Boole complète, où*

1. $0 = \emptyset$ et $1 = P$
2. $U \wedge V = U \cap V$ et $U \vee V = \overset{\circ}{\overline{U \cup V}}$
3. $\neg U = X \setminus \overline{U}$

Plus généralement, si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts réguliers de P , on a

$$\bigwedge_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} U_i \quad \text{et} \quad \bigvee_{i \in I} U_i = \overset{\circ}{\bigcup_{i \in I} U_i}.$$

En particulier, tout ensemble de conditions (\mathbb{P}, \leq) peut être muni de la topologie induite par son ordre, c'est-à-dire de la topologie dont les ouverts sont les ensembles clos inférieurement et dont les fermés sont les ensembles clos supérieurement (par complémentation). On vérifie alors que :

Proposition 35 — *Pour tout préordre (\mathbb{P}, \leq) on a*

$$\mathcal{B}(\mathbb{P}) = \text{RO}(\mathbb{P}),$$

en munissant \mathbb{P} de la topologie de l'ordre.

Pour tout ensemble $X \subseteq \mathbb{P}$ on a alors

$$\uparrow X = \overline{X}, \quad X^\perp = \mathbb{P} \setminus \downarrow X = \mathbb{P} \setminus \overline{\downarrow X} \quad \text{et} \quad X^{\perp\perp} = \overset{\circ}{\downarrow X}.$$

(On fera attention au fait que $\downarrow X \neq \overset{\circ}{\downarrow X}$, bien que $\downarrow X$ soit un ouvert.)

7 Négation de l'hypothèse du continu

Dans toute cette section on suppose l'axiome du choix (i.e. $\mathcal{U} \models \text{AC}$).

7.1 L'ensemble de conditions $\mathbb{P} = \text{Fin}(I, 2)$

Soit I un ensemble quelconque. On s'intéresse à l'ensemble de conditions $\mathbb{P} = \text{Fin}(I, 2)$ formé par toutes les fonctions partielles de I dans $2 = \{0, 1\}$ à domaine fini. On munit cet ensemble de l'ordre défini par

$$f \leq g \equiv f \supseteq g \quad (\text{inclusion inverse})$$

pour tous $f, g \in \mathbb{P}$. Dans cet ensemble, deux fonctions f et g sont compatibles si et seulement si leur union est encore une fonction, que l'on note fg (produit des conditions f et g). On vérifie alors que :

Lemme 11 — (\mathbb{P}, \leq) *satisfait la condition de chaîne dénombrable.*

Preuve. On démontre d'abord par récurrence sur $n \in \omega$ que si $A \subseteq \mathbb{P}$ est une antichaîne telle que $|\text{dom}(f)| = n$ pour tout $f \in A$, alors A est finie.

- Cas de base : $n = 0$. Évident car $A = \emptyset$ ou $A = \{\emptyset\}$.
- Cas inductif. Supposons la propriété vraie pour n , et considérons une antichaîne $A \subseteq \mathbb{P}$ telle que $|\text{dom}(f)| = n + 1$ pour tout $f \in A$. Si $A = \emptyset$, l'antichaîne A est finie. Sinon, on considère un élément $f_0 \in A$ et on note i_1, \dots, i_{n+1} les éléments de $\text{dom}(f_0)$. Pour tout entier $k \in \{1; \dots; n + 1\}$ on note $A_k = \{f \in A : f(i_k) \neq f_0(i_k)\}$. Comme A est une antichaîne, on a $A = \{f_0\} \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}$, et il suffit pour conclure de montrer que chacun des ensembles A_k est fini. Soit $k \in \{1; \dots; n + 1\}$. Comme $f(i_k) = 1 - f_0(i_k)$ pour tout $f \in A_k$, tous les éléments de A_k prennent la même valeur au point i_k . Par conséquent, l'ensemble $A'_k \subseteq \mathbb{P}$ défini par

$$A'_k = \{f|_{\text{dom}(f) \setminus \{i_k\}} : f \in A_k\}$$

est une antichaîne de \mathbb{P} , dont tous les éléments ont un domaine de cardinal n . L'antichaîne A'_k est donc finie (par hypothèse de récurrence), de même que l'antichaîne A_k qui a le même cardinal.

On considère à présent une antichaîne $A \subseteq \mathbb{P}$ quelconque, et pour tout $n \in \omega$ on pose $A_n = \{f \in A : |\text{dom}(f)| = n\}$. D'après ce qui précède, A_n est fini pour tout $n \in \omega$. Par conséquent, $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$ est fini ou dénombrable. \square

On note $\mathbb{B} = \mathcal{B}(\mathbb{P})$ l'algèbre de Boole engendrée par l'ensemble de conditions (\mathbb{P}, \leq) . D'après la Prop. 33, l'algèbre de Boole \mathbb{B} satisfait la condition de chaîne dénombrable (au sens des algèbres de Boole), ce qui permet d'encadrer le cardinal de \mathbb{B} de la manière suivante :

Lemme 12 — *Si l'ensemble I est infini, alors $|I| \leq |\mathbb{B}| \leq |I|^{\aleph_0}$.*

Preuve. Si I est infini, alors $|\mathbb{P}| = |\text{Fin}(I, 2)| = |I|$, d'où $|\mathbb{B}| \leq |I|^{\aleph_0}$ d'après le lemme 10. Pour montrer que $|I| \leq |\mathbb{B}|$, on associe à tout $i \in I$ la fonction $f_i = \{(i, 0)\} \in \mathbb{P}$, et on vérifie que la fonction $i \mapsto f_i^{\perp\perp}$ est injective. \square

7.2 Construction des réels de Cohen

Il s'agit à présent de construire dans $V^{(\mathbb{B})}$ un ensemble de parties de ω de cardinal arbitrairement élevé (au sens de \mathcal{U}). Pour cela on se fixe un cardinal infini \aleph_α et on pose $\mathbb{P} = \text{Fin}(\omega \times \aleph_\alpha, 2)$. À chaque ordinal $\beta \in \aleph_\alpha$ on associe un \mathbb{B} -ensemble u_β défini par

1. $\text{dom}(u_\beta) = \text{dom}(\hat{\omega}) = \{\hat{n} : n \in \omega\}$
2. $u_\beta(\hat{n}) = \{f \in \mathbb{P} : f(n, \beta) = 1\}$ pour tout $n \in \omega$,

en remarquant que $\{f \in \mathbb{P} : f(n, \beta) = 1\} = \{f \in \mathbb{P} : f(n, \beta) = 0\}^\perp$.

Lemme 13 — *Pour tous $\beta, \beta' \in \aleph_\alpha$:*

1. $V^{(\mathbb{B})} \models u_\beta \subseteq \hat{\omega}$
2. Si $\beta \neq \beta'$, alors $\llbracket u_\beta = u_{\beta'} \rrbracket = 0$.

Preuve. 1. $\llbracket u_\beta \subseteq \hat{\omega} \rrbracket = \bigwedge_{n \in \omega} (u_\beta(\hat{n}) \Rightarrow \llbracket \hat{n} \in \hat{\omega} \rrbracket) = 1$.

2. On commence par remarquer que pour tous $\beta \in \aleph_\alpha$ et $n \in \omega$ on a

$$\llbracket \hat{n} \in u_\beta \rrbracket = \bigvee_{m \in \omega} (u_\beta(\hat{m}) \wedge \llbracket \hat{n} = \hat{m} \rrbracket) = u_\beta(\hat{n}).$$

Pour tout $\beta' \neq \beta$ on a alors

$$\begin{aligned} \llbracket \hat{n} \in u_\beta \Rightarrow \hat{n} \in u_{\beta'} \rrbracket &= \{f \in \mathbb{P} : f(n, \beta) = 1\} \Rightarrow \{f \in \mathbb{P} : f(n, \beta') = 1\} \\ &= \{f \in \mathbb{P} : f(n, \beta) = 0\} \vee \{f \in \mathbb{P} : f(n, \beta') = 1\} \\ &= \{f \in \mathbb{P} : f(n, \beta) = 0 \vee f(n, \beta') = 1\} \end{aligned}$$

en remarquant que

$$\{f \in \mathbb{P} : f(n, \beta) = 0 \vee f(n, \beta') = 1\} = \{f \in \mathbb{P} : f(n, \beta) = 1 \wedge f(n, \beta') = 0\}^\perp$$

(car $\beta \neq \beta'$). De ceci on tire

$$\begin{aligned} \llbracket u_\beta \subseteq u_{\beta'} \rrbracket &= \bigwedge_{n \in \omega} (u_\beta(\hat{n}) \Rightarrow u_{\beta'}(\hat{n})) \\ &= \{f \in \mathbb{P} : \forall n \in \omega (f(n, \beta) = 0 \vee f(n, \beta') = 1)\} = \emptyset \end{aligned}$$

(car les éléments de \mathbb{P} sont à domaine fini). D'où $\llbracket u_\beta = u_{\beta'} \rrbracket = 0$. \square

Théorème 2 — Soit α un ordinal tel que $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$. Si $\mathbb{P} = \text{Fin}(\omega \times \aleph_\alpha)$ et $\mathbb{B} = \mathcal{B}(\mathbb{P})$, alors

$$V^{(\mathbb{B})} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_{\hat{\alpha}}.$$

Preuve. Soit $p = \mathfrak{P}^{(\mathbb{B})}(\hat{\omega})$ le \mathbb{B} -ensemble représentant l'ensemble des parties de ω dans $V^{(\mathbb{B})}$. On a $|\omega \times \aleph_\alpha| = \aleph_\alpha$ d'où $|\mathbb{P}| = \aleph_\alpha$ et $|\mathbb{B}| = \aleph_\alpha$ d'après le Lemme 12 puisque $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$. Par conséquent, on a

$$|\text{dom}(p)| = |\mathbb{B}^{\text{dom}(\hat{\omega})}| = \aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha,$$

d'où l'on tire que

$$V^{(\mathbb{B})} \models 2^{\aleph_0} = |p| \leq |\widehat{\text{dom}(p)}| = |\widehat{\aleph_\alpha}| = \aleph_{\hat{\alpha}}$$

en combinant (dans cet ordre) le Lemme 7, la Prop. 27 et la Prop. 30. Réciproquement, on considère le \mathbb{B} -ensemble h défini par

$$h = \{(\langle \hat{\beta}, u_\beta \rangle^{(\mathbb{B})}, 1) : \beta \in \aleph_\alpha\}$$

et on vérifie que $V^{(\mathbb{B})} \models \ll f \text{ est une injection de } \widehat{\aleph_\alpha} \text{ dans } p \gg$. Par conséquent : $V^{(\mathbb{B})} \models \aleph_{\hat{\alpha}} = |\widehat{\aleph_\alpha}| \leq |p| = 2^{\aleph_0}$, d'où $V^{(\mathbb{B})} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_{\hat{\alpha}}$. \square

7.3 Conclusion

Le théorème 2 repose très fortement sur l'hypothèse que $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ dans l'univers \mathcal{U} de départ. On notera que cette hypothèse est automatiquement satisfaite pour tout cardinal de la forme $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_\beta}$ (avec $\beta < \alpha$) puisque

$$\aleph_\alpha^{\aleph_0} = (2^{\aleph_\beta})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_\beta \times \aleph_0} = 2^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha.$$

Quitte à remplacer \mathcal{U} par \mathcal{U}^L (où L désigne la classe des ensembles constructibles⁶), on peut supposer que l'hypothèse généralisée du continu (HGC) est vraie dans l'univers \mathcal{U} , auquel cas on a automatiquement $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+1}$ pour tout ordinal α (car $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$). Le théorème 2 devient alors :

Théorème 3 — Si $\mathcal{U} \models \text{HGC}$, alors pour tout ordinal $\alpha \in \text{Ord}$ il existe une algèbre de Boole complète \mathbb{B} (non dégénérée) telle que $V^{(\mathbb{B})} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_{\hat{\alpha}+1}$.

Preuve. Il suffit de prendre $\mathbb{B} = \mathcal{B}(\text{Fin}(\omega \times \aleph_{\alpha+1}, 2))$. \square

Par conséquent :

Corollaire 6 — Si ZF est cohérent, alors $\text{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ est cohérent.

Preuve. Si ZF est cohérent, alors $\text{ZFC} + \text{HGC}$ l'est aussi. Soit \mathcal{U} un modèle de $\text{ZFC} + \text{HGC}$. D'après le théorème 3 il existe dans \mathcal{U} une algèbre de Boole complète \mathbb{B} (non dégénérée) telle que $V^{(\mathbb{B})} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_{\hat{1}+1}$, soit $V^{(\mathbb{B})} \models 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ (car $V^{(\mathbb{B})} \models \hat{1} = 1$). Ainsi, $V^{(\mathbb{B})}$ est un modèle booléen de $\text{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$, qui est donc une théorie cohérente. \square

Dans le résultat précédent, on peut évidemment remplacer \aleph_2 par \aleph_3 , \aleph_{42} , etc., mais aussi par $\aleph_{\omega+1}$, \aleph_{\aleph_0+1} , $\aleph_{\aleph_{\aleph_0}+1}$, etc.

⁶Rappelons que si $\mathcal{U} \models \text{ZF}$, alors $\mathcal{U}^L \models \text{ZFC} + \text{HGC}$ [4, 6].

Références

- [1] J. L. Bell. *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory*. Oxford, 1985.
- [2] P. J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 50(6) :1143–1148, December 1963.
- [3] P. J. Cohen. The independence of the continuum hypothesis II. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 51(1) :105–110, January 1964.
- [4] K. Gödel. Consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 24(12), 1938.
- [5] T. Jech. *Set theory, third millennium edition (revised and expanded)*. Springer, 2002.
- [6] J.-L. Krivine. *Théorie des ensembles*. Cassini, 1998.