Réalisabilité classique I

Premier contact

Aloïs Brunel

GDT Logique - 24 janvier 2011

Sommaire

1 Introduction

2 La réalisabilité classique

3 Modèles et vérité subjective

La **correction vis-à-vis du typage** assure certaines propriétés :

- La terminaison des programmes
- Des bornes sur la complexité des programmes (logiques allégées)
- ...

La **correction vis-à-vis du typage** assure certaines propriétés :

- La terminaison des programmes
- Des bornes sur la complexité des programmes (logiques allégées)
- ...

Certains programmes sans être typables sont **correcty vis-à-vis de l' exécution** :

```
let fonction = fun n =>
  if n+1=0 then 16
          else true
```

Le terme `fonction` a moralement le type $Nat \Rightarrow Bool$

La correspondance preuves-programmes

Logique implicative minimale	$\leftrightarrow$	λ-calcul simplement typé
Arithmétique d'ordre supérieur	$\leftrightarrow$	système F^ω
	$\dots$	

La correspondance preuves-programmes

Logique implicative minimale	$\leftrightarrow$	λ-calcul simplement typé
Arithmétique d'ordre supérieur	$\leftrightarrow$	système F^ω
	$\dots$	

Griffin, 90 : pour l'étendre à la logique classique (tiers exclu ou formule de Peirce), on a besoin d'une nouvelle instruction : call-cc.

La correspondance preuves-programmes

Logique implicative minimale	$\leftrightarrow$	λ-calcul simplement typé
Arithmétique d'ordre supérieur	$\leftrightarrow$	système F^ω
	$\dots$	

Griffin, 90 : pour l'étendre à la logique classique (tiers exclu ou formule de Peirce), on a besoin d'une nouvelle instruction : call-cc.

De manière générale, pour habiter de nouveaux axiomes il faut de **nouveaux programmes**.

Krivine introduit **la réalisabilité classique** (2000-2010), une méthode **sémantique** qui permet :

- de prouver des propriétés calculatoires des programmes typés
- d'étudier les extensions de la correspondance preuve/programme
- de fournir des **nouveaux modèles** de ZF+Axiomes variés

Les 3 sous-sols fondationnels de Girard

-1	**Aléthique**	Notion de vérité (vrai/faux), cohérence, ...
		Algèbres de Boole, Espaces de phase

Les 3 sous-sols fondationnels de Girard

-1	**Aléthique**	Notion de vérité (vrai/faux), cohérence, ... Algèbres de Boole, Espaces de phase
-2	**Catégorique**	Morphismes

Les 3 sous-sols fondationnels de Girard

-1	**Aléthique**	Notion de vérité (vrai/faux), cohérence, ... Algèbres de Boole, Espaces de phase
-2	**Catégorique**	Morphismes
-3	**Dynamique**	Notion d'interactivité, gagnants et perdants Jeux, vieille réalisabilité, dialectica de Gödel

Les 4 sous-sols fondationnels de Girard

-1	**Aléthique**	Notion de vérité (vrai/faux), cohérence, ... Algèbres de Boole, Espaces de phase
-2	**Catégorique**	Morphismes
-3	**Dynamique**	Notion d'interactivité, gagnants et perdants Jeux, vieille réalisabilité, dialectica de Gödel
-4	**Déontique**	De l'interaction, pas de règle du jeu à priori Ludique, GdI

Les 4 sous-sols fondationnels de Girard

-1 **Aléthique** Notion de vérité (vrai/faux), cohérence, ...

Algèbres de Boole, Espaces de phase

-2 **Catégorique** Morphismes

-3 **Dynamique** Notion d'interactivité, gagnants et perdants

Jeux, vieille réalisabilité, dialectica de Gödel

-4 **Déontique** De l'interaction, pas de règle du jeu à priori

Ludique, GdI

Réalisabilité classique

Sommaire

1 Introduction

2 **La réalisabilité classique**

3 Modèles et vérité subjective

le λ_c-calcul (1/2)

Syntaxe

$$
\begin{array}{llclclclclcl}
\textbf{Termes} & t, u & ::= & x & | & \lambda x.t & | & (t)u & | & \maltese & | & \ldots \\
\textbf{Piles} & \pi & ::= & \diamond & | & u.\pi & & & \multicolumn{4}{l}{\text{(avec } u \text{ clos)}} \\
\textbf{Processus} & p & ::= & t \star \pi & & & & & \multicolumn{4}{l}{\text{(avec } t \text{ clos)}}
\end{array}
$$

On peut (et on va) ajouter d'autres instructions.

le λ_c-calcul (1/2)

Syntaxe

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\textbf{Termes} & t,u & ::= & x & \mid & \lambda x.t & \mid & (t)u & \mid & \maltese & \mid & \ldots \\
\textbf{Piles} & \pi & ::= & \diamond & \mid & u.\pi & & \text{(avec } u \text{ clos)} & & & & \\
\textbf{Processus} & p & ::= & t \star \pi & & & & \text{(avec } t \text{ clos)} & & & &
\end{array}
$$

On peut (et on va) ajouter d'autres instructions.

Evaluation

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{(Push)} & (t)u \star \pi & \succ & t \star u.\pi \\
\textbf{(Grab)} & \lambda x.t \star u.\pi & \succ & t\{u/x\} \star \pi
\end{array}
$$

le λ_c-calcul (1/2)

Syntaxe

Termes	t, u	$::=$	$x \mid \lambda x.t \mid (t)u \mid \maltese \mid \ldots$
Piles	π	$::=$	$\diamond \mid u.\pi$ (avec u clos)
Processus	p	$::=$	$t \star \pi$ (avec t clos)

On peut (et on va) ajouter d'autres instructions.

Evaluation

(Push)	$(t)u \star \pi$	$\succ$	$t \star u.\pi$
(Grab)	$\lambda x.t \star u.\pi$	$\succ$	$t\{u/x\} \star \pi$
(Daimon)	$\maltese \star \pi$	$\succ$	$\maltese \star \diamond$
	$\ldots$		

le λ_c-calcul (2/2) - Extensions

On peut rajouter les **continuations**.

$$\textbf{Termes} \quad t, u \quad ::= \quad \ldots \quad | \quad cc \quad | \quad k_\pi$$

Les règles de réductions correspondantes :

$$\begin{array}{llll} \textbf{(Save)} & cc \star t.\pi & \succ & t \star k_\pi.\pi \\ \textbf{(Resume)} & k_\pi \star t.\pi' & \succ & t \star \pi \end{array}$$

le λ_c-calcul (2/2) - Extensions

Ou bien le **non-déterminisme**

$$\textbf{Termes} \quad t, u \quad ::= \quad \ldots \quad | \quad cc \quad | \quad k_\pi \quad | \quad \Psi$$

Les règles de réductions correspondantes :

$$\begin{array}{llll} (\Psi_0) & \Psi \star t.u.\pi & \succ & t \star \pi \\ (\Psi_1) & \Psi \star t.u.\pi & \succ & u \star \pi \end{array}$$

le λ_c-calcul (2/2) - Extensions

Ou encore l'instruction `quote`

$$\textbf{Termes} \quad t, u \quad ::= \quad \ldots \quad | \quad cc \quad | \quad k_\pi \quad | \quad \Psi \quad | \quad \chi$$

La règle de réduction (ici $t \mapsto n_t$ est une injection quelconque) :

$$\textbf{(Quote)} \quad \chi \star t.\pi \quad \succ \quad t \star \overline{n_t}.\pi$$

Point de vue, orthogonalité

On choisit $\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda \star \Pi$, appelé **point de vue** (ou pôle, ou observable), tel que :

$$t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp \wedge (t' \star \pi' \succ t \star \pi) \Rightarrow (t' \star \pi' \in \perp\!\!\!\perp)$$

Point de vue, orthogonalité

On choisit $\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda \star \Pi$, appelé **point de vue** (ou pôle, ou observable), tel que :

$$t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp \wedge (t' \star \pi' \succ t \star \pi) \Rightarrow (t' \star \pi' \in \perp\!\!\!\perp)$$

Le point de vue définit la *correction calculatoire*, par exemple :

- $\perp\!\!\!\perp = \{ p \mid p$ termine $\}$ (candidats de réductibilité)
- $\perp\!\!\!\perp = \{ p \mid p$ ne termine pas $\}$

Point de vue, orthogonalité

On choisit $\perp\!\!\!\perp \subset \Lambda \star \Pi$, appelé **point de vue** (ou pôle, ou observable), tel que :

$$t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp \wedge (t' \star \pi' \succ t \star \pi) \Rightarrow (t' \star \pi' \in \perp\!\!\!\perp)$$

Le point de vue définit la *correction calculatoire*, par exemple :

- $\perp\!\!\!\perp = \{\ p \mid p$ termine $\}$ (candidats de réductibilité)
- $\perp\!\!\!\perp = \{\ p \mid p$ ne termine pas $\}$

Un point de vue induit une notion d'**orthogonalité** :

$$t \perp \pi \text{ ssi } t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp \qquad X^{\perp} = \{\ \pi \in \Pi \mid \forall t \in X, t \perp \pi\ \}$$

On a les propriétés suivantes :

- $X \subseteq X^{\perp\perp}$
- $X \subseteq Y$ implique $Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$
- $X^{\perp} = X^{\perp\perp\perp}$

On a les propriétés suivantes :

- $X \subseteq X^{\perp\perp}$
- $X \subseteq Y$ implique $Y^{\perp} \subseteq X^{\perp}$
- $X^{\perp} = X^{\perp\perp\perp}$

Comportement

On dit qu'un ensemble X de termes ou de piles est un **comportement** si $X = X^{\perp\perp}$.

Si X est un comportement alors

$$t \in X \iff \forall \pi \in X^{\perp}, t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp$$

Les comportements sont clos par $\cap$ mais pas par $\cup$.

Interprétation

Une formule est un **type interactif**, c.a.d un comportement. On associe donc à A un comportement $|A|$.

Interprétation

Une formule est un **type interactif**, c.a.d un comportement. On associe donc à A un comportement $|A|$.

On dira que t **réalise** A et on note $t \Vdash A$ ssi $t \in |A|$, i.e :

$$\forall \pi, \pi \in |A|^{\perp} \Rightarrow t \perp \pi$$

Interprétation

Une formule est un **type interactif**, c.a.d un comportement. On associe donc à A un comportement $|A|$.

On dira que t **réalise** A et on note $t \Vdash A$ ssi $t \in |A|$, i.e :

$$\forall \pi, \pi \in |A|^{\perp} \Rightarrow t \perp \pi$$

Un type A vient avec les arguments $|A|$ et les tests $|A|^{\perp}$: les deux ensembles sont inséparables.

Interprétation

Une formule est un **type interactif**, c.a.d un comportement. On associe donc à A un comportement $|A|$.

On dira que t **réalise** A et on note $t \Vdash A$ ssi $t \in |A|$, i.e :

$$\forall \pi, \pi \in |A|^{\perp} \Rightarrow t \perp \pi$$

Un type A vient avec les arguments $|A|$ et les tests $|A|^{\perp}$: les deux ensembles sont inséparables.

Vision spécification.

Arithmétique du second ordre

Langage

$$\begin{array}{rcl} e & ::= & x \mid f(e_1, \ldots, e_n) \qquad (f \text{ primitive récursive}) \\ A, B & ::= & X(e_1, \ldots, e_k) \mid A \Rightarrow B \mid \forall x.A \mid \forall X.A \end{array}$$

On peut coder les autres formules à partir de ce langage :

$$\begin{array}{rcl} \bot & \equiv & \forall X.X \\ A \wedge B & \equiv & \forall X.(A \Rightarrow B \Rightarrow X) \Rightarrow X \\ \neg A & \equiv & A \Rightarrow \bot \\ \exists X.A(X) & \equiv & \forall Z(\forall X(A(X) \Rightarrow Z) \Rightarrow Z) \end{array}$$

On se donne :

- un point de vue $\perp\!\!\!\perp$
- un ensemble $\mathcal{D}$ de comportements
- un modèle $\mathcal{N}$ de départ (par exemple $\mathbb{N}$)
- une valuation ϕ

On se donne :

- un point de vue $\perp\!\!\!\perp$
- un ensemble $\mathcal{D}$ de comportements
- un modèle $\mathcal{N}$ de départ (par exemple $\mathbb{N}$)
- une valuation ϕ

$$\begin{aligned}
|X(e_1,\ldots,e_n)|_\phi &= \Phi(X)(\mathbf{Val}(e_1)_\phi,\ldots,\mathbf{Val}(e_n)_\phi) \\
|A \Rightarrow B|_\phi &= (|A|.|B|^\perp)^\perp \\
|\forall x.A|_\phi &= \bigcap_{n\in\mathcal{N}} |A|_{\phi[x\leftarrow n]} \\
|\forall X.A|_\phi &= \bigcap_{F:\mathcal{N}^k\longrightarrow\mathcal{D}} |A|_{\phi[X\leftarrow F]}
\end{aligned}$$

Remarques

- Si $t \Vdash A \Rightarrow B$ et $u \Vdash A$, alors $(t)u \Vdash B$ en effet si $\pi \in |B|^{\perp}$:

$$(t)u \star \pi \succ t \star u.\pi \text{ or } u.\pi \in (|A|.|B|^{\perp})$$

Remarques

- Si $t \Vdash A \Rightarrow B$ et $u \Vdash A$, alors $(t)u \Vdash B$ en effet si $\pi \in |B|^{\perp}$:

$$(t)u \star \pi \succ t \star u.\pi \text{ or } u.\pi \in (|A|.|B|^{\perp})$$

- $|\perp| = \Pi^{\perp}$

Remarques

- Si $t \Vdash A \Rightarrow B$ et $u \Vdash A$, alors $(t)u \Vdash B$ en effet si $\pi \in |B|^{\perp}$:

$$(t)u \star \pi \succ t \star u.\pi \text{ or } u.\pi \in (|A|.|B|^{\perp})$$

- $|\perp| = \Pi^{\perp}$
- $t \Vdash \neg A$ ssi pour tout π et $u \Vdash A$, $t \star u.\pi \in \perp\!\!\!\perp$.

Remarques

- Si $t \Vdash A \Rightarrow B$ et $u \Vdash A$, alors $(t)u \Vdash B$ en effet si $\pi \in |B|^{\perp}$:

$$(t)u \star \pi \succ t \star u.\pi \text{ or } u.\pi \in (|A|.|B|^{\perp})$$

- $|\perp| = \Pi^{\perp}$
- $t \Vdash \neg A$ ssi pour tout π et $u \Vdash A$, $t \star u.\pi \in \perp\!\!\!\perp$.
- Il y a des **tricheurs** :

$$\text{si } t \star \pi \in \perp\!\!\!\perp \text{ alors } (k_\pi)t \star \pi' \succ^* t \star \pi \text{ et donc } (k_\pi)t \Vdash \perp$$

On dira que t est une quasi-preuve (QP) si t ne contient aucun k_π.

Adéquation

Si $\vdash t : A$ alors pour tout point de vue $\perp\!\!\!\perp$ on a $t \Vdash A$.

Lien typage $\Longrightarrow$ calcul

Remarque 1 (importante) : ce théorème reste vrai même si on ajoute de nouvelles instructions au langage.

Remarque 2 (très importante) : si pour tout $\perp\!\!\!\perp$, $t \Vdash A$, alors du point de vue calculatoire $\vdash t : A$ est un axiome valable !

Adéquation : applications

Spécification 1

Si $\vdash t : \forall X.(X \Rightarrow X)$ alors $t \approx \lambda x.x$.

Adéquation : applications

Spécification 1

Si $\vdash t : \forall X.(X \Rightarrow X)$ alors $t \approx \lambda x.x$.

$$Bool(x) \equiv \forall P.(P(0) \Rightarrow P(1) \Rightarrow P(x))$$

Spécification 2

Supposons que $\vdash b : Bool(x)$ alors :

- Si $x = 0$, pour tous t, u et π on a $b \star t.u.\pi \succ^* t \star \pi$.
- Si $x = 1$, pour tous t, u et π on a $b \star t.u.\pi \succ^* u \star \pi$.

On n'a pas $b \Vdash Bool(0)$ **et** $b \Vdash Bool(1)$ sans le non-déterminisme (Ψ)

Adéquation : applications

Normalisation

Les termes typables terminent.

$$⫫ = \{\ t \star \pi \mid t \star \pi \text{ termine}\ \}$$

X est un **candidat de réductibilité** ssi

- $X \subseteq \{\diamond\}^{\perp}$
- $X^{\perp} \subseteq \{\maltese\}^{\perp}$

$\mathcal{D}$ est l'ensemble des candidats de réductibilité.

On peut montrer que $|A| \in \mathcal{D}$ pour toute formule A

Etendre Curry-Howard (1)

call-cc est la seule possibilité d'obtenir la logique classique.

On dit que

- $K \approx k_\pi$ ssi $K \star t.\pi' \succ^* t \star \pi$
- $C \approx cc$ ssi $C \star u.\pi \succ^* u \star K.\pi$ avec $K \approx k_\pi$

Etendre Curry-Howard (1)

call-cc est la seule possibilité d'obtenir la logique classique.

On dit que

- $K \approx k_\pi$ ssi $K \star t.\pi' \succ^* t \star \pi$
- $C \approx cc$ ssi $C \star u.\pi \succ^* u \star K.\pi$ avec $K \approx k_\pi$

$t \Vdash ((A \Rightarrow \bot) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ ssi $t \approx cc$.

Etendre Curry-Howard (1)

call-cc est la seule possibilité d'obtenir la logique classique.

On dit que

- $K \approx k_\pi$ ssi $K \star t.\pi' \succ^* t \star \pi$
- $C \approx cc$ ssi $C \star u.\pi \succ^* u \star K.\pi$ avec $K \approx k_\pi$

$t \Vdash ((A \Rightarrow \bot) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ ssi $t \approx cc$.

On peut rajouter à la logique la règle

$$\frac{}{\vdash cc : ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\ (cc)$$

Etendre Curry-Howard (2)

Et l'arithmétique ?

- $\forall y\,(y + 0 = y)$
- $\forall y\,\neg(s(y) = 0)$
- $\forall y \forall x\,(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
- $\ldots$

Etendre Curry-Howard (2)

Et l'arithmétique ?

- $\forall y\,(y + 0 = y)$
- $\forall y\,\neg(s(y) = 0)$
- $\forall y \forall x\,(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
- ...

Tout ça c'est trivial (réalisateurs : $\lambda x.x$ ou bien $\lambda z.(z)u$).

Etendre Curry-Howard (2)

Et l'arithmétique ?

- $\forall y\,(y + 0 = y)$
- $\forall y\,\neg(s(y) = 0)$
- $\forall y \forall x\,(s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$
- $\ldots$

Tout ça c'est trivial (réalisateurs : $\lambda x.x$ ou bien $\lambda z.(z)u$).

Le dernier principe : la récurrence, s'exprime

$$\forall x\,\underbrace{(\forall P(P0 \Rightarrow (\forall n(Pn \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow Px)}_{nat(x)}$$

n'est pas toujours vrai.

Etendre Curry-Howard (3)

Axiome du choix dénombrable

Soit $G \neq \emptyset$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous ensembles de G alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists y \in G \text{ t.q } y \in A_n \quad \Rightarrow \quad \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}\; u_n \in A_n$$

- Toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Un ensemble est infini ssi il est en bijection avec une partie propre.
- Si x est adhérent à U alors il existe une suite de u_n de limite x.

L'axiome du choix dénombrable est impliqué par le principe de **sélection dénombrable** :

Pour toute suite $A_n \subseteq G$, il existe $u_{n,m}$ t.q :

$$\forall m \in \mathbb{N}(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n,m} \in A_m) \quad \Rightarrow \quad \forall y \in G, y \in A_m$$

L'axiome du choix dénombrable est impliqué par le principe de **sélection dénombrable** :

Pour toute suite $A_n \subseteq G$, il existe $u_{n,m}$ t.q :

$$\forall m \in \mathbb{N}(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n,m} \in A_m) \quad \Rightarrow \quad \forall y \in G, y \in A_m$$

$$\chi \star t.\pi \succ t \star n_\pi.\pi$$

On a $\chi \Vdash SD$ et donc un réalisateur pour l'axiome du choix dénombrable.

Sommaire

1 Introduction

2 La réalisabilité classique

3 **Modèles et vérité subjective**

Vérité subjective

À chaque point de vue correspond une notion de vérité différente : c'est la **subjectivité** :

$$A \text{ est vraie par rapport à } \perp\!\!\!\perp \text{ ssi } \exists t \in QP, t \Vdash_{\perp\!\!\!\perp} A$$

Vérité subjective

À chaque point de vue correspond une notion de vérité différente : c'est la **subjectivité** :

$$A \text{ est vraie par rapport à } \perp\!\!\!\perp \text{ ssi } \exists t \in QP, t \Vdash_{\perp\!\!\!\perp} A$$

Un point de vue est **cohérent** si

$$\forall t \in QP, \exists \pi \in \Pi \text{ t.q } t \star \pi \notin \perp\!\!\!\perp$$

Consistance subjective

Si $\perp\!\!\!\perp$ est cohérent alors aucune formule A n'est à la fois vraie et fausse par rapport à $\perp\!\!\!\perp$.

- Exemple incohérent : $\perp\!\!\!\perp = \{\ p \mid p \text{ ne termine pas }\}$
  - $\Omega \Vdash \bot$
  - $\mathbf{Y} \Vdash (A \Rightarrow A) \Rightarrow A$

- Exemple incohérent : $\perp\!\!\!\perp = \{ \, p \mid p \text{ ne termine pas } \}$
  - $\Omega \Vdash \bot$
  - $\mathbf{Y} \Vdash (A \Rightarrow A) \Rightarrow A$

- Exemple cohérent : $\perp\!\!\!\perp = \emptyset$
  - Pour tout A, on a soit $|A| = \emptyset$ soit $|A|^{\perp} = \emptyset$.
  - A est vraie ssi A est vraie dans le modèle standard.

- Exemple incohérent : $\perp\!\!\!\perp = \{\ p \mid p$ ne termine pas $\}$
  - $\Omega \Vdash \bot$
  - $\mathbf{Y} \Vdash (A \Rightarrow A) \Rightarrow A$

- Exemple cohérent : $\perp\!\!\!\perp = \emptyset$
  - Pour tout A, on a soit $|A| = \emptyset$ soit $|A|^{\perp} = \emptyset$.
  - A est vraie ssi A est vraie dans le modèle standard.

Le paradoxe subjectif

Il existe deux points de vue consistants $\perp\!\!\!\perp_1$ et $\perp\!\!\!\perp_2$ et une formule A telle que A est vraie par rapport à $\perp\!\!\!\perp_1$ et $\neg A$ est vraie par rapport à $\perp\!\!\!\perp_2$.

Structure des modèles

La formule $\forall x\ nat(x)$ est fausse en général si on $\succ$ est déterministe (réduction à $Bool(x)$) .

En fait il existe :

Structure des modèles

La formule $\forall x \; nat(x)$ est fausse en général si on $\succ$ est déterministe (réduction à $Bool(x)$) .

En fait il existe :

- Les entiers "standard"

Structure des modèles

La formule $\forall x \; nat(x)$ est fausse en général si on $\succ$ est déterministe (réduction à $Bool(x)$) .

En fait il existe :

- Les entiers "standard"
- Des non-entiers

Structure des modèles

La formule $\forall x \ nat(x)$ est fausse en général si on $\succ$ est déterministe (réduction à $Bool(x)$) .

En fait il existe :

- Les entiers "standard"
- Des non-entiers
- Des entiers "non standard"

On définit $\approx$:

$$x \approx 0 \equiv \forall y(x \neq s(y))$$

Pseudo-zéros

Dans le modèle, le seul pseudo-zéro x vérifiant $nat(x)$ est le "vrai" $0 \in \mathbb{N}$.

On définit $\approx$:

$$x \approx 0 \equiv \forall y (x \neq s(y))$$

Pseudo-zéros

Dans le modèle, le seul pseudo-zéro x vérifiant $nat(x)$ est le "vrai" $0 \in \mathbb{N}$.

Cela permet de décomposer tous les individus :

Décomposition

$$\Vdash \forall x \exists ! n \exists ! z (z \approx 0 \wedge nat(n) \wedge x = y + z)$$

Sous certaines bonnes conditions le prédicat unaire G défini par $G(n) = \{\pi_n\}$ (l'inverse de la bijection introduite pour χ)est tel que :

Sous certaines bonnes conditions le prédicat unaire G défini par $G(n) = \{\pi_n\}$ (l'inverse de la bijection introduite pour χ)est tel que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t \Vdash G(n)$

Sous certaines bonnes conditions le prédicat unaire G défini par $G(n) = \{\pi_n\}$ (l'inverse de la bijection introduite pour χ)est tel que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t \Vdash G(n)$
- $\lambda z.z \Vdash \neg(\forall x\, G(x))$

Sous certaines bonnes conditions le prédicat unaire G défini par $G(n) = \{\pi_n\}$ (l'inverse de la bijection introduite pour χ)est tel que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t \Vdash G(n)$
- $\lambda z.z \Vdash \neg(\forall x\, G(x))$
- $\chi \Vdash \neg(\forall^{\mathbb{N}} x\, G(x))$

Point de vue maximal

On peut construire le "plus incohérent" des points de vue cohérents.

$t \mapsto \pi_t$ est une bijection entre les quasi-preuves et les piles. On pose

$$\perp\!\!\!\perp_g = C(\bigcup_t fil(t \star \pi_t))$$

On pose l'ensemble $B(x) \equiv x^2 = x$.

Dans le modèle maximal, B est une algèbre de Boole.

On pose l'ensemble $B(x) \equiv x^2 = x$.

Dans le modèle maximal, B est une algèbre de Boole.

Dans le modèle maximal, la formule suivante est vraie :

$$\exists x \; B(x) \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 1)$$

On pose l'ensemble $B(x) \equiv x^2 = x$.

Dans le modèle maximal, B est une algèbre de Boole.

Dans le modèle maximal, la formule suivante est vraie :

$$\exists x \; B(x) \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 1)$$

Ok on a compris : le modèle est assez étrange. Mais il y a pire.

En fait Krivine (2010) a montré qu'on peut obtenir un modèle de ZF+DC tel que :

- L'axiome du choix est faux !

En fait Krivine (2010) a montré qu'on peut obtenir un modèle de ZF+DC tel que :

- L'axiome du choix est faux !
- L'hypothèse du continu est fausse !

En fait Krivine (2010) a montré qu'on peut obtenir un modèle de ZF+DC tel que :

- L'axiome du choix est faux !
- L'hypothèse du continu est fausse !
- En fait, $\mathbb{R}$ n'est pas bien ordonné !

En fait Krivine (2010) a montré qu'on peut obtenir un modèle de ZF+DC tel que :

- L'axiome du choix est faux !
- L'hypothèse du continu est fausse !
- En fait, $\mathbb{R}$ n'est pas bien ordonné !
- On a carrément une séquence X_n de sous ensembles non dénombrables de $\mathbb{R}$ dont les cardinaux sont strictement croissants.

Conclusion

On a vu aujourd'hui :

- Les bases permettant l'extension de Curry-Howard
- ZF+DC
- Construction de modèles bizarres

Conclusion

On a vu aujourd'hui :

- Les bases permettant l'extension de Curry-Howard
- ZF+DC
- Construction de modèles bizarres

On verra la prochaine fois : **la réalisabilité et le forcing** !

- Forcing de Cohen : un programme pour l'hypothèse du continu
- Forcing pour les logiques linéaires
- Effets de bord et forcing