Calcul numérique de sommes de séries

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\sum u_n$ converge. L'objectif de ce TP est d'obtenir une valeur approchée de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ avec une précision donnée.

1 Calcul approché de e^x uniformément sur [-5,5]

Quand la série converge suffisament rapidement, il suffit de calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour une valeur de n telle que la valeur absolue du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ soit inférieure à la précision souhaitée.

Exemple : Calcul de $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
On majore le reste $[R_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{(n+1)!(n+1)^{k-n-1}}$. Justifiez cette majoration, calculez un majorant de R_n et en déduire une valeur de n pour laquelle $S_n(x)$ est une approximation uniforme de e^x à 0.001 près sur $[-5, 5]$, c'est-à-dire $|e^x - S_n(x)| \leq 0.001$, pour tout $x \in [-5, 5]$. Vérifiez la qualité de cette approximation en traçant la courbe $x \to e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

2 Accélerations de convergence

Lorsque la série converge lentement, on procède à une accélération de convergence en construisant un suite $(u'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ déduite de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum u'_k$ converge, ait même somme (éventuellement à une constante additive K près) que $\sum u_k$ et converge plus vite, au sens suivant : $u'_k = o(u_k)$. On approche alors $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ par $K + \sum_{k=0}^{n} u'_k$ avec n assez grand.

2.1 Quand $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée

On considère $u_k = (-1)^k f(k)$ où $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$. Le critère des séries alternées assure que $\sum u_k$ converge, de plus $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est encadrée par $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\sum_{k=0}^{n+1} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On suppose que f est convexe sur $[0, +\infty[$. Alors $\sum u'_k$, définie par $u'_k = (-1)^k \frac{f(k)-f(k+1)}{2} = \frac{u_k+u_{k+1}}{2}$, vérifie aussi le critère des séries alternées donc converge et $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \frac{u_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} u'_k$.
On suppose de plus que $f'(x) = o(f(x))$ quand $x \to +\infty$, alors $u'_k = o(u_k)$.

Appliquez ceci pour calculer la somme de la série harmonique alternée $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = ln(2)$.

Calculez formellement l'expression explicite de la p-ième accélerée $u_k^{(p)}$ de (u_k) et de la constante K_p telle que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = K_p + \sum_{k=0}^{\infty} u'_k$. Ecrivez une procédure qui étant donnés une fonction f, et deux entiers n et p calcule $K_p + \sum_{k=0}^{n} u_k^p$. Testez-la sur la série harmonique alternée (pourquoi peut-elle être accélérée un nombre arbitraire de fois ?) Est ce que la suite (K_p) converge vers $ln(2)$?

2.2 Quand $u_k \sim \frac{a}{k^p}$

On considère maintenant une série $\sum u_k$ dont les termes ont tous le même signe et telle que $u_k \sim \frac{a}{k^p}$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$ et un certain $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$. Alors $u'_k = u_k - \frac{a}{(k+1)(k+2)...(k+p)}$ vérifie $u'_k = o(\frac{1}{k^p})$. Justifiez que $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \frac{a}{(p-1)(p-1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} u'_k$.

Appliquez cette méthode pour calculer une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$.

La constante d'Euler $\gamma = lim(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - ln(n))$ peut être définie comme la somme d'une série, la série télescopique associée. Vérifiez que cette série peut être accélérée et procédez au calcul approché de γ.

3 Convergence non commutative

Soit $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comparez, à l'aide de Maple, $\sum u_n$ et $\sum(u_{2n-1} + u_{4n-2} + u_{4n})$ Interprétez et justifiez mathématiquement ce résultat.
Cet exemple montre qu'on ne peut pas toujours modifier l'ordre des termes sans perturber la valeur de la somme. On dispose même d'un résultat plus frappant : soit $\sum u_k$ une série convergente mais non absolument convergente (série semi-convergente) ; par modification de l'ordre des termes, on peut obtenir une série convergente ayant une somme donnée quelconque.