Etude d'une fonction définie par une série

On pose pour x réel, sous réserve de convergence : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$. L'objectif du TP est de décrire le comportement de f (monotonie, limites, équivalents aux bornes). On utilisera maple pour visualiser les sommes partielles, effectuer des calculs approchés et les calculs formels nécessaires aux justifications mathématiques.

1 Visualisation

Déterminer (à la main) le domaine de définition de f. Tracer les courbes de quelques sommes partielles sur ce domaine.

2 Monotonie

Justifier la dérivation terme à terme. En déduire le sens de variation de f sur [0,1[.

Sur]-1,0], le signe de f' n'est pas évident. Soient $g(x)$ et $h(x)$ les sommes des termes négatifs et positifs dans $f'(x)$. On veut prouver que $f'(x) = g(x) + h(x) > 0$ sur]-1,0[. Tracer les courbes de $-g$ et h (en fait celle d'une de leurs sommes partielles) et chercher une courbe simple les séparant. Prouver ensuite qu'il y a bien séparation.

3 Etude en 1^-

Par monotonie, f admet une limite finie ou infinie en 1^-. On cherche un équivalent de $f(x)$ en 1^-. Ce type de problème se résoud souvent par comparaison série-intégrale. Procéder (avec maple) aux justifications qui s'imposent, encadrer $f(x)$ et en déduire l'équivalent cherché.

Vérification expérimentale : calculer numériquement $(1-x)f(x)$ pour un x proche de 1 et vérifier que le résultat est proche de la limite théorique. Pour calculer numériquement $f(x)$, prendre une somme partielle d'indice suffisamment grand, cet indice étant déterminé par la majoration du reste à l'aide de la comparaison série-intégrale précédente.

4 Etude en $(-1)^+$

Mêmes questions : limite, équivalent au voisinage de -1. Pour déterminer l'équivalent, on séparera encore les termes pairs et impairs. Vérifier numériquement ces résultats.