1 Développements en série entière et combinatoire

1.1 Série

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$$

Justifiez que cette fonction est développable en série entière en zéro avec un rayon de convergence égal à 1. Montrer que l'on peut écrire f sous la forme :

$$f(x) = \frac{a}{(1-x)^3} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1+x} + \frac{P(x)}{1-x^5}$$

où a, b, c sont des réels et $P(x)$ un polynôme à déterminer.
A partir de cette formule, écrire une procédure permettant de calculer le n-ième coefficient du développement en série entière de f.

1.2 Combinatoire

Déduire de ce qui précède le nombre de facons de payer 1000 euros avec des pièces de 1 et 2 euros et des billets de 5 euros.

2 Ensemble de Mandelbrot

On construit l'ensemble de Mandelbrot grâce à des itérations dans le plan complexe. On étudie le comportement de la suite récurrente définie par $z_0 = 0$, $z_{n+1} = z_n^2 + c$ où c est le paramètre. L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble des complexes c pour lesquels (z_n) est borné. On le visualise en coloriant en noir les points c du plan complexe pour lesquels la suite (z_n) est bornée et en blanc les points c du plan complexe pour lesquels la suite (z_n) est non bornée.

Ecrire une procédure Mandelbrot qui, étant donnés deux réels x et y, calcule le plus petit indice m pour lequel le terme de la suite récurrente définie avec $c = x + iy$ vérifie $|z_m| > 2$ (pour éviter de faire trop de calculs on forcera $m < 30$).

Représenter l'ensemble de Mandelbrot en utilisant la commande plot3d et l'option color=Mandelbrot.