

**APPRENTISSAGE PAR RENFORCEMENT - PRÉDICTION DE SÉQUENCES
INDIVIDUELLES**

TRAVAUX PRATIQUES

- INÉGALITÉ DE Hoeffding -

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires iid à valeur dans l'intervalle $[0, 1]$. On note μ leur espérance commune, et $\bar{X}_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$ leur moyenne empirique. On définit la fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation

$$\phi(\lambda) = \ln \mathbb{E}[\exp(\lambda X_1)] .$$

On a vu, dans le TP sur les problèmes de bandits, la borne de Chernoff-Hoeffding :

$$P(\bar{X}_n \geq x) \leq \exp(-n \text{kl}(x, \mu)) \leq \exp(-2n(x - \mu)^2) .$$

Celle-ci peut être obtenue légèrement différemment, donnant ainsi un lemme qui est utile par ailleurs.

1. Montrer que $\phi''(\lambda) \leq 1/4$.
2. Montrer que $\phi(\lambda) \leq \lambda\mu + \lambda^2/8$. En déduire le lemme Hoeffding : pour une variable aléatoire Z presque-sûrement comprise entre 0 et $B > 0$, on a

$$\ln \mathbb{E}[\exp(\lambda Z)] \leq \lambda \mathbb{E}[Z] + \frac{B^2 \lambda^2}{8} .$$

3. En déduire directement l'inégalité de Hoeffding :

$$P(\bar{X}_n \geq x) \leq \exp(-2n(x - \mu)^2) .$$

- PRÉDICTION DE TAUX DE CHANGE -

Le jeu de données `change.txt`, disponible sur la page du cours et fournies par mon collègue Gilles Stoltz, contient les relevés mensuels des taux de change Euro-Dollar (USD/EUR) entre 1999 et début 2012, ainsi que les prédictions qui en ont été faites par "experts". Voici comment ces données sont présentées par un collègue macro-économiste :

Here are some primitive quick experts.

There are 6 of them, for 1, 3 and 6 month periods for the USD/EUR rate at the indicated date.

The names indicate the experts:

X1, X2, etc, for a given forward looking period 1M, 3M, 6M in each name.

So, for example, expert X3_RPPP_1M claims that 1 month from 03/2012, that is on 04/2012, the exchange rate will be 1.330492642.

The experts are as follows:

X1 - random walk

X2 - interest rate parity expert

X3 - relative PPP expert, adaptive inflation expectations from the past

x4 - relative PPP expert, ex-post true inflation (as if rational expectations...)

x5 - random walk with trend from last 30 trading days

x6 - random walk with trend from last 60 trading days

Given the specificity of the experts, for some some predictions are missing (at the beginning or at the end).

1. Quel est le meilleur expert ? Est-ce vraiment surprenant ?
2. Programmer l'algorithme d'agrégation HEDGE pour différentes valeurs du paramètre. Tracer le regret en fonction du paramètre.
3. Peut-on faire mieux en utilisant un algorithme du type "poursuite du meilleur expert" ? Faire des essais numériques sur le jeu de données, puis proposer un cadre de donner simulées permettant de mettre en évidence les propriétés de cet algorithme.

Références

- [1] P. Auer, N. Cesa-Bianchi, Y. Freund, and R.E. Schapire. The nonstochastic multiarmed bandit problem. *SIAM J. Comput.*, 32(1) :48–77 (electronic), 2002/03.
- [2] N. Cesa-Bianchi and G. Lugosi. *Prediction, Learning, and Games*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2006.
- [3] G. Stoltz. Préviation séquentielle avec avis d'experts. <http://www.math.ens.fr/cours-apprentissage/>.