Eléments de correction

Centrale - Statistiques avancées (première partie)

07 Mars 2011

A- Régression sans terme constant

On veut faire la régression d'un vecteur $Y \in \mathbb{R}^n$ sur les p régresseurs $X_1, \dots, X_p \in \mathbb{R}^n$ sans terme constant : autrement dit, on cherche à minimiser en $\theta \in \mathbb{R}^p$ la quantité

$$\|Y - \theta_1 X_1 - \cdots - \theta_p X_p\|^2_{\mathbb{R}^n} .$$

Montrer comment la régression de $Z = \begin{pmatrix} Y \\ -Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ *sur les régresseurs*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_p \\ -X_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$$

permet d'obtenir la solution.

Soit

$$\theta^* = \arg\min_{\theta \in \mathbb{R}^p} \|Y - \theta_1 X_1 - \cdots - \theta_p X_p\|^2 .$$

soit $X = (X_1, \dots, X_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, soit $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^n$ et soit

$$\tilde{X} = \left(\begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_p \\ -X_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} \right) \in \mathcal{M}_{2n,p}(\mathbb{R}) .$$

Pour tout $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}^{p+1}$, en notant $\theta = (\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_p)' \in \mathbb{R}^p$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| Z - \tilde{X}\tilde{\theta} \right\|^2 &= \left\| Y - X\theta - \tilde{\theta}_{p+1} \right\|^2 + \left\| -Y + X\theta + \tilde{\theta}_{p+1}\mathbb{1} \right\|^2 \\
&= \left\| Y - X\theta - \tilde{\theta}_{p+1} \right\|^2 + \left\| Y - X\theta - \tilde{\theta}_{p+1}\mathbb{1} \right\|^2 \\
&= \|Y - X\theta\|^2 + \left\| \tilde{\theta}_{p+1}\mathbb{1} \right\|^2 + 2(Y - X\theta)'\tilde{\theta}_{p+1}\mathbb{1} + \|Y - X\theta\|^2 + \left\| \tilde{\theta}_{p+1}\mathbb{1} \right\|^2 - 2(Y - X\theta)'\tilde{\theta}_{p+1}\mathbb{1} \\
&= 2\|Y - X\theta\|^2 + 2n\theta^2_{p+1} .
\end{aligned}$$

Donc, en notant

$$\tilde{\theta}^* = \arg\min_{\tilde{\theta} \in \mathbb{R}^{p+1}} \left\| Z - \tilde{X}\tilde{\theta} \right\|^2 ,$$

on a $\theta^* = (\tilde{\theta}^*_1, \dots, \tilde{\theta}^*_p)$.

B- Inégalités de traitement

Le fichier "salaires.csv" contient les salaires de quelques employés choisis au hasard dans une grande entreprise, en fonction de leur sexe. L'étude porte sur 15 *hommes et* 15 *femmes, et elle vise à mettre en évidence une éventuelle différence de traitement entre les deux sexes dans l'entreprise.*

```
    Hommes            Femmes
 Min.   :  3649   Min.   : 6031
 1st Qu.: 24350   1st Qu.:15221
 Median : 32925   Median :32359
 Mean   : 41805   Mean   :37618
 3rd Qu.: 56535   3rd Qu.:50074
 Max.   :107432   Max.   :95039
```

Quel type de test peut-on (ou ne peut-on pas) utiliser en pareil cas ? Justifiez votre réponse.

On cherche à faire un test de comparaison de deux lois, à partir de deux échantillons indépendants (non appariés) de petite taille. Il ne semble pas raisonnable ici de supposer la distribution des variables gaussienne : on peut remarquer en particulier que la distribution des salaires pour chaque sexe présente une torsion positive, avec une médiane significativement inférieure à la moyenne qui est beaucoup plus proche du troisième quartile que du premier. Un test de Student est donc exclu.

Le plus indiqué dans pareil cas est un test de Mann-Whitney. On peut aussi penser à un test de Kolmogorov, mais celui-ci est de faible puissance en pareil cas. Sinon, on peut aussi envisager des tests basés sur le principe du bootstrap.

C- Utilisation de R : la loi de Zipf

Le but de cet exercice est de vérifier la bonne compréhension de l'utilisation de R pour la régression linéaire : il ne s'agit en aucun cas de tester la connaissance exhaustive de toutes les commandes utilisées, mais plutôt de vérifier la bonne compréhension de la démarche globale mise en oeuvre et des résultats obtenus avec le logiciel.

Certains linguistes ont cherché à mettre une évidence une loi générale sur la fréquence d'utilisation des mots dans un texte. On associe à chaque mot un unique numéro $i \in \{1, \dots, n\}$, où n désigne le nombre de mots différents apparaissant dans le texte, et on note F_i le nombre d'occurrences du mot numéro i. On désigne par $R(i)$ désigne le rang du mot i dans le classement des mots par ordre décroissant de fréquence. La loi de Zipf (nommée d'après son auteur George Kingsley Zipf) veut que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad F_i = \frac{\beta}{(R_i)^\alpha}$$

où α est caractéristique du style de l'auteur et où β est un paramètre dépendant de la taille du texte.

On a relevé tous les mots de la pièce "Don Juan ou le Festin de Pierre", de Molière, ainsi que le nombre d'occurrences de chacun d'entre eux dans la pièce : voici les quelques premières lignes du fichier ainsi obtenu :

Freq	Mot
14	"TOUTE"
274	"LA"
1	"PHILOSOPHIE"
274	"IL"
186	"N"
295	"EST"
54	"RIEN"

Pour tester la validité de la loi de Zipf, et pour estimer le paramètre α, le code R suivant a été utilisé

```
donJuan <- read.table('donJuan.csv', header=T, sep=",")
nbWords <- dim(donJuan)[1]
n <- max(donJuan$Freq)
h <- hist(donJuan$Freq, breaks=seq(0,n))
# pour 1<=j<=n, h$counts[j] contient le nombre de mots apparaissant j fois dans le texte

rank <- c(1, 1 + cumsum(h$counts[seq(n,2,-1)]))
rank <- rank[seq(n,1,-1)];
donJuan$Rank <- rank[donJuan$Freq]

modeleZipf <- lm(log(Freq) ~ I(log(Rank)), data=donJuan)
summary(modeleZipf)
```

Le résultat renvoyé par R est le suivant :

```
Call:
lm(formula = log(Freq) ~ I(log(Rank)), data = donJuan)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.99572 -0.05173 -0.05173  0.07446  0.17798

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   9.362192   0.017980   520.7   <2e-16 ***
I(log(Rank)) -1.310719   0.002713  -483.2   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0  *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1   1

Residual standard error: 0.1164 on 2602 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.989,      Adjusted R-squared: 0.989
F-statistic: 2.335e+05 on 1 and 2602 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

1. *Expliquer comment le modèle linéaire a été utilisé ici.*

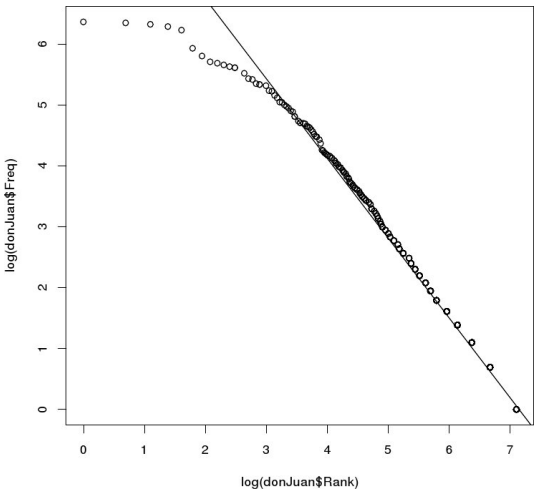
   En prenant les logarithmes, la relation de Zipf devient linéaire : $\log(F_i) = \log(\beta) - \alpha \log(R_i)$. On peut donc facilement estimer les coefficients $\log(\beta)$ et $-\alpha$ en utilisant la régression linéaire, puis en déduire des estimateurs de α et β.

2. *Interpréter le résultat renvoyé par R.*

   Les estimateurs trouvés sont $\widehat{\log(\beta)} = 9.36$ et $\hat{\alpha} = 1.31$. Les écarts-types associés permettent d'obtenir des intervalles de confiance si on croit au modèle gaussien. Toujours dans ce modèle, ces deux coefficients sont significativement non nuls (avec une p-valeur extrêmement faible). Le coefficient de détermination de la régression est 0.989 : il est très élèvé, ce qui se comprend bien sur la figu (presque tous les points sont très proches de la droite).

3. *La figure ci-dessous a été obtenue grâce aux commandes suivantes :*

```
plot(log(donJuan$Rank), log(donJuan$Freq))
abline(modeleZipf)
```



Expliquer et commenter la figure.

On a tracé le nuage des points de coordonnées $(\log(R_i), \log(F_i))$: la relation de Zipf voudrait qu'ils soient alignés. On a superposé à ce nuage de points la droite de régression linéaire simple. On observe qu'en effet presque tous les points sont très proches de la droite. Toutefois, il y a une nette inflexion pour les faibles valeurs des rangs (c'est-à-dire, pour les mots les plus souvent utilisés). La relation ne semble pas valable pour ceux-ci. Cela laisse toutefois clairement paraître que les résidus ne sont pas du tout iid (ni gaussiens d'ailleurs).

4. *Dans une version forte, la loi de Zipf stipule que $\alpha = 1$. Peut-on l'exclure dans le cas étudié ici ?*
   L'écart-type estimé pour $\hat{\alpha}$ est inférieur à 3.10^{-2}, mille fois inférieur à l'écart entre $\hat{\alpha}$ et 1 : même si le modèle gaussien n'est pas valable ici, on rejettera donc l'hypothèse selon laquelle $\alpha = 1$.

D- Un théorème de Doob élémentaire

On se propose dans cet exercice de montrer le théorème de Doob dans un cadre élémentaire. On rappelle l'inégalité de Jensen *: pour toute variable aléatoire réelle Z bornée et pour toute fonction h convexe sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}[h(Z)] \geq h(\mathbb{E}[Z])$.*

Soit Θ un ensemble fini, et soit π une loi de probabilité sur Θ. Soit $\mathcal{X}$ un autre ensemble fini, et pour chaque paramètre $\theta \in \Theta$ soit p_θ une loi de probabilité sur $\mathcal{X}$. On cherche à faire l'estimation bayésienne du paramètre θ, et on suppose que le modèle est identifiable : si $\theta \neq \theta'$, $p_\theta \neq p_{\theta'}$. Pour tout $\theta \in \Theta$, on note

$$H(\theta) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} p_\theta(x) \log p_\theta(x),$$

et

$$K(\theta, \theta') = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_\theta(x) \log \frac{p_\theta(x)}{p_{\theta'}(x)} \, .$$

Dans cette estimation bayésienne, l'expérience est la suivant suivante :

- *d'abord, une variable aléatoire T est tirée suivant la loi π ;*
- *ensuite, sont tirées des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ qui, conditionnellement à l'événement $\{T = \theta\}$, sont indépendantes et de même loi p_θ.*

Pour chaque valeur entière n, on apelle P^n la loi du $n+1$-uplet $(T, X_1, \ldots, X_n)$ sur l'ensemble $\Theta \times \mathcal{X}^n$, et pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}^n$ on note $\Pi^n(\cdot|x_1, \ldots, x_n)$ la loi conditionnelle de T sachant

$\{X_1 = x_1, \dots X_n = x_n\}$ *: on rappelle qu'elle est définie par*

$$\forall \theta \in \Theta, \quad \Pi^n(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{P^n(T = \theta, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{\sum_{\theta' \in \Theta} P^n(T = \theta', X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)} \ .$$

1. *Montrer :* $\forall \theta \in \Theta, H(\theta) \geq 0$.
   $H(\theta)$ est une somme de termes positifs ou nuls.
2. *Montrer :* $\forall \theta, \theta' \in \Theta, \quad \theta \neq \theta' \implies K(\theta, \theta') > 0$.
   Soient $\theta, \theta' \in \Theta$ tels que $\theta \neq \theta'$, et donc $p_\theta \neq p_{\theta'}$. On a d'après l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction $x \mapsto \log(x^{-1})$:

   $$K(\theta, \theta') = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_\theta(x) \log \left(\frac{p'_\theta(x)}{p_\theta(x)} \right)^{-1} \geq \log \left(\sum_{x \in \mathcal{X}} p_\theta(x) \frac{p'_\theta(x)}{p_\theta(x)} \right)^{-1} = \log(1) = 0 \ ,$$

   avec égalité si est seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\forall x \in \mathcal{X}, p_\theta(x) \neq 0 \implies \frac{p'_\theta(x)}{p_\theta(x)} = C \ ,$$

   ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.
3. *Montrer que, pour tout* $(\theta, x_1, \dots, x_n) \in \Theta \times \mathcal{X}^n$,

   $$P^n(T = \theta, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \pi(\theta) \prod_{k=1}^{n} p_\theta(x_i) \ .$$

   Il suffit d'écrire $P^n(T = \theta, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(T = \theta)\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | T = \theta)$, et d'utiliser la définition de T et des $(X_i)_{i \geq 1}$
4. *On note* $L_n(\theta, x_1, \dots, x_n) = \log P^n(T = \theta, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$*. Montrer que, conditionnellement à* $\{T = \theta_0\}$, $\frac{1}{n} L_n(\theta, X_1, \dots, X_n)$ *converge presque sûrement vers* $-H(\theta_0) - K(\theta_0, \theta)$ *pour tout* $\theta \in \Theta$.
   On a

   $$\frac{1}{n} L_n(\theta, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \log \pi(\theta) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log p_\theta(x_i) \ .$$

   Le premier terme tend vers 0, et d'après la loi forte des grands nombres le deuxième tend presque-sûrement vers

   $$\sum_{x \in X} p_{\theta_0}(x) \log p_\theta(x) = - \sum_{x \in X} p_{\theta_0}(x) \log p_{\theta_0}(x) - \sum_{x \in X} p_{\theta_0}(x) \log \frac{p_{\theta_0}(x)}{p_\theta(x)} = -H(\theta_0) - K(\theta_0, \theta) \ .$$

5. *Montrer que, quand* n *tend vers l'infini,* $\Pi^n(\theta | X_1, \dots, X_n)$ *converge presque-sûrement vers une variable aléatoire que l'on identifiera.*
   Pour tout $\theta \neq \theta_0$, on a conditionnellement à $T = \theta_0$ quand n tend vers l'infini

   $$\frac{P^n(T = \theta, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{P^n(T = \theta_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)} = \exp\left(L_n(\theta, X_1, \dots, X_n) - L_n(\theta_0, X_1, \dots, X_n) \right) \overset{ps}{\to} 0 \ ,$$

   et donc $\Pi^n(\theta | X_1, \dots, X_n) \overset{ps}{\to} 0$. On en déduit que $\Pi^n(\theta_0 | X_1, \dots, X_n) \overset{ps}{\to} 1$: la limite presque-sûre de la suite $\Pi^n(\theta | X_1, \dots, X_n)$ est donc la loi de Dirac en θ_0.
6. *Peut-on généraliser cette preuve à des hypothèses (sur* $\mathcal{X}$ *et* Θ*) moins restrictives ?*
   Il est facile de prendre un ensemble Θ dénombrable, et ça s'écrit avec des espérances conditionnelles pour des variables X_i pas nécessairement discrètes.