Modèle d'accrochage de Polymère

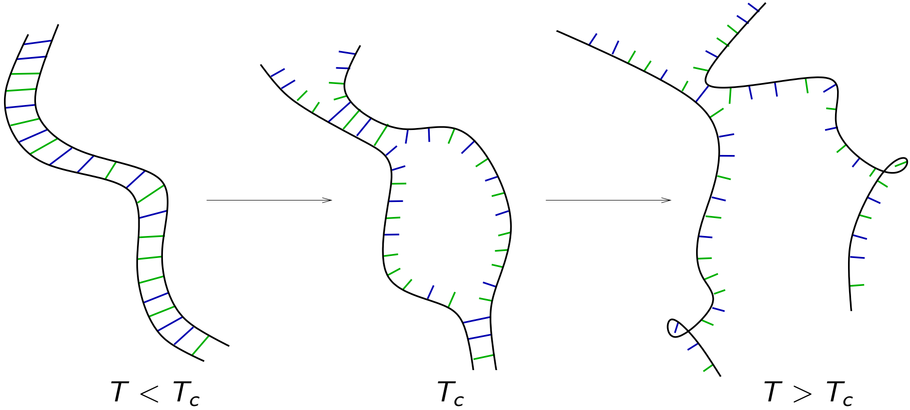
Influence du désordre sur la transition de phase

Quentin Berger

University of Southern California (& Paris 6)

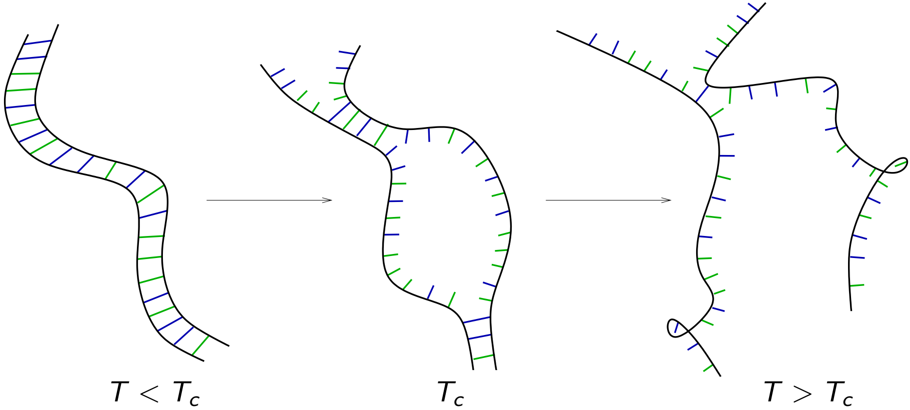
Journées MAS 2014, Toulouse

Motivations physiques : la dénaturation de l'ADN



Augmentation de la température $\rightarrow$ séparation des brins d'ADN

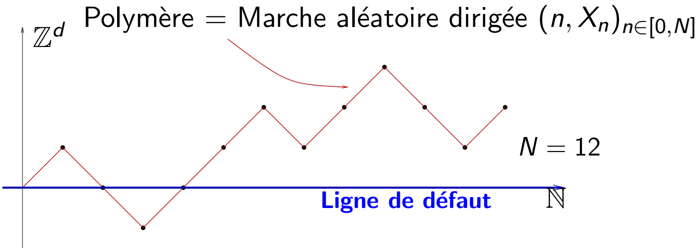
Motivations physiques : la dénaturation de l'ADN



Augmentation de la température $\rightarrow$ séparation des brins d'ADN

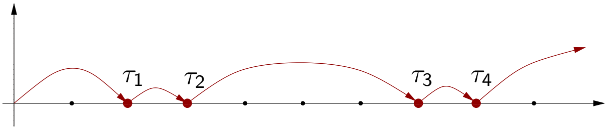
Influence des inhomogénéités ?

Un polymère dirigé



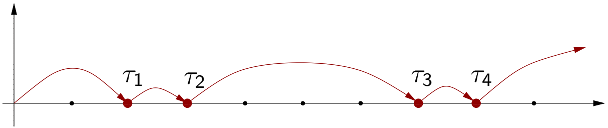
Un polymère dirigé

Modèle général : processus de renouvellement τ, de loi $\mathbf{P}$.



Un polymère dirigé

Modèle général : processus de renouvellement τ, de loi $\mathbf{P}$.



Hypothèse :

$$\mathbf{P}(\tau_1 = n) = \varphi(n) n^{-(1+\alpha)}$$

où φ est une fonction à variation lente, $\alpha \geqslant 0$.

Des interactions inhomogènes

Soit $\omega := (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de v.a. aléatoire de loi $\mathbb{P}$ (inhomogénéités) : ergodique et $\mathbb{E}[\omega_1] = 0$, $\mathbb{E}[\omega_1^2] = 1$ (et $\mathbb{E}[e^{t\omega_1}] < +\infty$ pour t petit).

Des interactions inhomogènes

Soit $\omega := (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de v.a. aléatoire de loi $\mathbb{P}$ (inhomogénéités) : ergodique et $\mathbb{E}[\omega_1] = 0$, $\mathbb{E}[\omega_1^2] = 1$ (et $\mathbb{E}[e^{t\omega_1}] < +\infty$ pour t petit).
paramètres $\beta \geqslant 0$ et $h \in \mathbb{R}$
$\rightsquigarrow$ récompense/pénalité $\beta\omega_n + h$ si le polymère touche la ligne de défaut au site n (notation : $\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}$)

Des interactions inhomogènes

Soit $\omega := (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de v.a. aléatoire de loi $\mathbb{P}$ (inhomogénéités) : ergodique et $\mathbb{E}[\omega_1] = 0$, $\mathbb{E}[\omega_1^2] = 1$ (et $\mathbb{E}[e^{t\omega_1}] < +\infty$ pour t petit).
paramètres $\beta \geqslant 0$ et $h \in \mathbb{R}$
$\rightsquigarrow$ récompense/pénalité $\beta\omega_n + h$ si le polymère touche la ligne de défaut au site n (notation : $\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}$)

Pour une réalisation de ω fixée (désodre gelé/*quenched*), on définit

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,h}^{\omega,\beta}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(\tau) := \frac{1}{Z_{N,h}^{\omega,\beta}} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} (\beta\omega_n + h)\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}\right),$$

où $Z_{N,h}^{\omega,\beta}$ est la *fonction de partition*

$$Z_{N,h}^{\omega,\beta} = \mathbf{E}\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{N} (\beta\omega_n + h)\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}\right)\right].$$

Des interactions inhomogènes

Soit $\omega := (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de v.a. aléatoire de loi $\mathbb{P}$ (inhomogénéités) : ergodique et $\mathbb{E}[\omega_1] = 0$, $\mathbb{E}[\omega_1^2] = 1$ (et $\mathbb{E}[e^{t\omega_1}] < +\infty$ pour t petit).
paramètres $\beta \geqslant 0$ et $h \in \mathbb{R}$
$\rightsquigarrow$ récompense/pénalité $\beta\omega_n + h$ si le polymère touche la ligne de défaut au site n (notation : $\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}$)

Pour une réalisation de ω fixée (désodre gelé/*quenched*), on définit

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{N,h}^{\omega,\beta}}{\mathrm{d}\mathbf{P}}(\tau) := \frac{1}{Z_{N,h}^{\omega,\beta}} \exp\left(\sum_{n=1}^{N} (\beta\omega_n + h)\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}\right),$$

où $Z_{N,h}^{\omega,\beta}$ est la *fonction de partition*

$$Z_{N,h}^{\omega,\beta} = \mathbf{E}\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{N} (\beta\omega_n + h)\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}\right)\right].$$

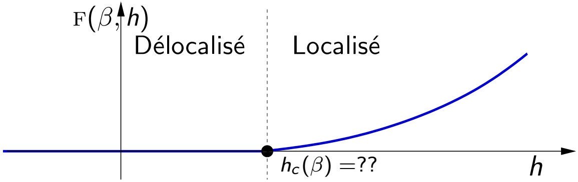
But : comprendre les trajectoires de τ sous la loi $\mathbf{P}_{N,h}^{\omega,\beta}$, lorsque $N \to \infty$.

Énergie libre et transition de phase

On définit l'énergie libre *quenched*

$$\mathrm{F}(\beta, h) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,h}^{\omega,\beta} \overset{\mathbb{P}-a.s.}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}\left[\log Z_{N,h}^{\omega,\beta}\right].$$

La fonction $h \mapsto \mathrm{F}(\beta, h)$ est convexe, positive, croissante :

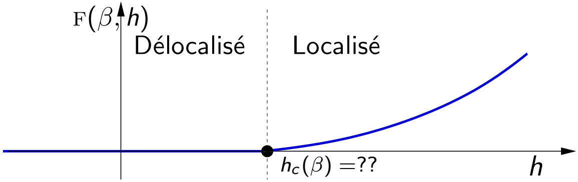


Énergie libre et transition de phase

On définit l'énergie libre *quenched*

$$\mathrm{F}(\beta, h) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log Z_{N,h}^{\omega,\beta} \overset{\mathbb{P}-a.s.}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}\left[\log Z_{N,h}^{\omega,\beta}\right].$$

La fonction $h \mapsto \mathrm{F}(\beta, h)$ est convexe, positive, croissante :

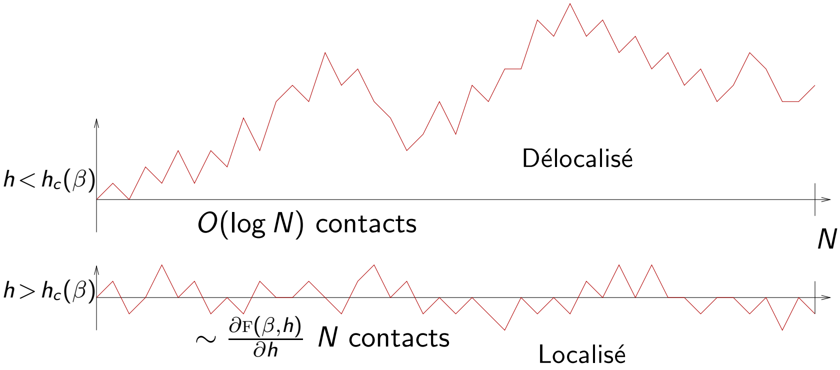


Un petit calcul donne

$$\frac{\partial}{\partial h}\mathrm{F}(\beta, h) = \lim_{N\mapsto\infty} \mathbf{E}_{N,h}^{\omega,\beta}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{\{n\in\tau\}}\right].$$

Transition de phase

Trajectoires typiques sous $\mathbf{P}_{N,h}^{\omega,\beta}$:



Le modèle homogène $\rightsquigarrow \omega \equiv 0$ (ou bien $\beta = 0$)

Le modèle homogène $\rightsquigarrow \omega \equiv 0$ (ou bien $\beta = 0$)

Le modèle homogène est exactement résoluble !

Théorème (Cas homogène)

Le point critique est $h_c(0) = -\log \mathbf{P}(\tau_1 < +\infty)$. *Le comportement critique de l'énergie libre est :*

$$\mathrm{F}(0, h_c(0) + u) \overset{u \downarrow 0^+}{\sim} \tilde{\varphi}(u)\, u^{\nu^{\mathrm{pur}}}, \tag{1}$$

avec $\nu^{\mathrm{pur}} = \max(1, 1/\alpha)$.

ν^{pur} est l'*exposant critique* (ou ordre) de la transition de phase.

Le modèle recuit/*annealed*

La fonction de partition est $\mathbb{E}\big[Z_{N,h}^{\omega,\beta}\big]$. L'énergie libre *recuite* est

$$\mathrm{F}^{\mathrm{ann}}(\beta,h)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\mathbb{E}\big[Z_{N,h}^{\omega,\beta}\big]$$

Le modèle recuit/*annealed*

La fonction de partition est $\mathbb{E}\big[Z_{N,h}^{\omega,\beta}\big]$. L'énergie libre *recuite* est

$$\mathrm{F}^{\mathrm{ann}}(\beta,h)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\mathbb{E}\big[Z_{N,h}^{\omega,\beta}\big]$$

L'inégalité de Jensen donne

$$\mathrm{F}(\beta,h)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathbb{E}\big[\log Z_{N,h}^{\omega,\beta}\big]\leqslant\mathrm{F}^{\mathrm{ann}}(\beta,h),$$

et $h_c(\beta)\geqslant h_c^{\mathrm{ann}}(\beta)$.

Le modèle recuit/*annealed*

La fonction de partition est $\mathbb{E}\big[Z_{N,h}^{\omega,\beta}\big]$. L'énergie libre *recuite* est

$$\mathrm{F}^{\mathrm{ann}}(\beta,h) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E}\big[Z_{N,h}^{\omega,\beta}\big]$$

L'inégalité de Jensen donne

$$\mathrm{F}(\beta,h) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\mathbb{E}\big[\log Z_{N,h}^{\omega,\beta}\big] \leqslant \mathrm{F}^{\mathrm{ann}}(\beta,h),$$

et $h_c(\beta) \geqslant h_c^{\mathrm{ann}}(\beta)$.

Pertinence du désordre ?

- Points critiques : $h_c(\beta) = h_c^{\mathrm{ann}}(\beta)$?
- Exposants critiques : $\nu = \nu^{\mathrm{pur}} \quad (= \max(1, 1/\alpha))$?

Résultats dans le cas d'un désordre IID : critère de Harris

Théorème (Alexander '08, F. Toninelli '08, Lacoin '10)

Si $\alpha < 1/2$, ou bien si $\alpha = 1/2$ et $\sum \frac{1}{\varphi(n)^2 n} < +\infty$ (i.e. $\tau \cap \tau'$ transient), le désordre est **non-pertinent**.

Résultats dans le cas d'un désordre IID : critère de Harris

Théorème (Alexander '08, F. Toninelli '08, Lacoin '10)

Si $\alpha < 1/2$, ou bien si $\alpha = 1/2$ et $\sum \frac{1}{\varphi(n)^2 n} < +\infty$ (i.e. $\tau \cap \tau'$ transient), le désordre est ***non-pertinent****.*
Pour β suffisament petit

$$h_c(\beta) = h_c^{\mathrm{ann}}(\beta),$$
$$\mathrm{F}(\beta, h_c(\beta) + u) \asymp \mathrm{F}^{\mathrm{ann}}(\beta, h_c(\beta) + u).$$

Résultats dans le cas d'un désordre IID : critère de Harris

Théorème (Alexander '08, F. Toninelli '08, Lacoin '10)

Si $\alpha < 1/2$, ou bien si $\alpha = 1/2$ et $\sum \frac{1}{\varphi(n)^2 n} < +\infty$ (i.e. $\tau \cap \tau'$ transient), le désordre est **non-pertinent***.*
Pour β suffisament petit

$$h_c(\beta) = h_c^{\mathrm{ann}}(\beta),$$
$$\mathrm{F}(\beta, h_c(\beta) + u) \asymp \mathrm{F}^{\mathrm{ann}}(\beta, h_c(\beta) + u).$$

Théorème (Giacomin, Toninelli '06, Derrida, Giacomin, Lacoin, F. Toninelli '09, Alexander, Zygouras '09, Giacomin, Lacoin, F.Toninelli '10, Cheliotis, den Hollander '11)

Si $\alpha > 1/2$, ou $\alpha = 1/2$ et $\varphi(n) \leqslant (\log n)^{\frac{1}{2} - \varepsilon}$, le désordre est **pertinent***.*

Résultats dans le cas d'un désordre IID : critère de Harris

Théorème (Alexander '08, F. Toninelli '08, Lacoin '10)

Si $\alpha < 1/2$, ou bien si $\alpha = 1/2$ et $\sum \frac{1}{\varphi(n)^2 n} < +\infty$ (i.e. $\tau \cap \tau'$ transient), le désordre est **non-pertinent**.
Pour β suffisament petit

$$h_c(\beta) = h_c^{\mathrm{ann}}(\beta),$$
$$\mathrm{F}(\beta, h_c(\beta) + u) \asymp \mathrm{F}^{\mathrm{ann}}(\beta, h_c(\beta) + u).$$

Théorème (Giacomin, Toninelli '06, Derrida, Giacomin, Lacoin, F. Toninelli '09, Alexander, Zygouras '09, Giacomin, Lacoin, F.Toninelli '10, Cheliotis, den Hollander '11)

Si $\alpha > 1/2$, ou $\alpha = 1/2$ et $\varphi(n) \leqslant (\log n)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, le désordre est **pertinent**.
Pour tout $\beta > 0$

$$h_c(\beta) > h_c^{\mathrm{ann}}(\beta),$$
$$\mathrm{F}(\beta, h_c(\beta) + u) \leq \mathit{cste.}\ u^2.$$

Cas d'un désordre corrélé : quelques résultats

Exemple d'une séquence Gaussienne stationnaire $\omega = \{\omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.
Fonction de corrélation $(\rho_k)_{k\geqslant 0}$, $\rho_k = \mathbb{E}[\omega_i\omega_{i+k}] \geqslant 0$

$$\rho_k \overset{k\to\infty}{\sim} c_0 k^{-a}$$

Critère de Weinrib-Halperin prédit :
pour $a > 1$: critère de Harris,
pour $a < 1$: critère de Harris modifié.

Cas d'un désordre corrélé : quelques résultats

Exemple d'une séquence Gaussienne stationnaire $\omega = \{\omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.
Fonction de corrélation $(\rho_k)_{k\geqslant 0}$, $\rho_k = \mathbb{E}[\omega_i\omega_{i+k}] \geqslant 0$

$$\rho_k \overset{k\to\infty}{\sim} c_0 k^{-a}$$

Critère de Weinrib-Halperin prédit :

pour $a > 1$: critère de Harris,

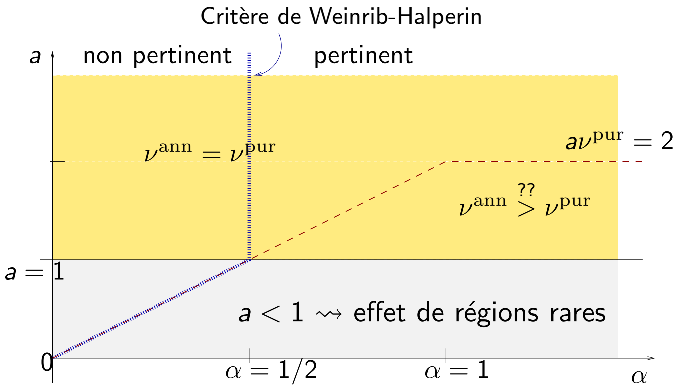
pour $a < 1$: critère de Harris modifié.

Difficulté : la fonction de partition *recuite* est

$$\mathbb{E}[Z_{N,h}^{\omega,\beta}] = \mathbf{E}\left[\exp\left(h\sum_{n=1}^{N}\mathbf{1}_{\{n\in\tau\}} + \beta^2/2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\rho_{|j-i|}\mathbf{1}_{\{i\in\tau\}}\mathbf{1}_{\{j\in\tau\}}\right)\right]$$

Théorème (Q. B., F. Toninelli '12, Poisat '13, Q. B. '13, Q. B. '13 ; $\rho_k \sim k^{-a}$)

- *$a > 2$, modèles recuits et homogènes ont les mêmes comportements critiques ;*
- *$a > 1$, pertinence du désordre si $\alpha > 1/2$ et non-pertinence si $\alpha < 1/2$ (cadre hiérarchique) ;*
- *$a < 1$, "désordre infini" : le désordre est pertinent pour tout $\alpha \geqslant 0$.*



Une question liée ?

Peut-on construire une limite d'échelle (*non triviale*) du modèle ?

Une question liée ?

Peut-on construire une limite d'échelle (*non triviale*) du modèle ?

Limite d'échelle du processus de renouvellement $\tau/N \rightsquigarrow$ ensemble des zéros d'un Bessel$(2(1-\alpha))$.

Une question liée ?

Peut-on construire une limite d'échelle (*non triviale*) du modèle ?

Limite d'échelle du processus de renouvellement $\tau/N \rightsquigarrow$ ensemble des zéros d'un Bessel$(2(1-\alpha))$.

Comment prendre

$$\beta_N = \hat{\beta} N^{-\gamma}, \quad h_N = -\beta^2/2 + \hat{h} N^{-\gamma'}$$

pour avoir une limite *non-triviale* de la fonction de partition $Z_{N,h_N}^{\omega,\beta_N}$?

Une question liée ?

Peut-on construire une limite d'échelle (*non triviale*) du modèle ?

Limite d'échelle du processus de renouvellement $\tau/N \rightsquigarrow$ ensemble des zéros d'un Bessel$(2(1-\alpha))$.

Comment prendre

$$\beta_N = \hat{\beta} N^{-\gamma}, \quad h_N = -\beta^2/2 + \hat{h} N^{-\gamma'}$$

pour avoir une limite *non-triviale* de la fonction de partition $Z_{N,h_N}^{\omega,\beta_N}$?

Caravenna, Sun, Zygouras '14 : "Chaos Expansion"

$$\text{si } \gamma = \alpha - 1/2 > 0,\ \gamma' = \alpha > 0, \quad \text{alors} \quad Z_{N,h_N}^{\omega,\beta_N} \stackrel{\text{dist}, L^2}{\to} \mathbf{Z}_{\hat{h},\hat{\beta}}^{\mathrm{W}}\,.$$

Si $\alpha < 1/2$, la limite est triviale (i.e. non-aléatoire). Le cas $\alpha = 1/2$ est marginal (non-résolu)

Une question liée ?

Peut-on construire une limite d'échelle (*non triviale*) du modèle ?

Limite d'échelle du processus de renouvellement $\tau/N \rightsquigarrow$ ensemble des zéros d'un Bessel($2(1-\alpha)$).

Comment prendre

$$\beta_N = \hat{\beta} N^{-\gamma}, \quad h_N = -\beta^2/2 + \hat{h} N^{-\gamma'}$$

pour avoir une limite *non-triviale* de la fonction de partition $Z_{N,h_N}^{\omega,\beta_N}$?

Caravenna, Sun, Zygouras '14 : "Chaos Expansion"

$$\text{si } \gamma = \alpha - 1/2 > 0,\ \gamma' = \alpha > 0, \quad \text{alors} \quad Z_{N,h_N}^{\omega,\beta_N} \overset{\text{dist}, L^2}{\to} \mathbf{Z}_{\hat{h},\hat{\beta}}^{\mathrm{W}}\,.$$

Si $\alpha < 1/2$, la limite est triviale (i.e. non-aléatoire). Le cas $\alpha = 1/2$ est marginal (non-résolu) $\rightsquigarrow$ ressemble à la pertinence/non pertinence du désordre.

Conclusion ?

La question de la pertinence du désordre/limite d'échelle est centrale dans de nombreux systèmes physiques.

Quelques questions ouvertes :

- pertinence du désordre $\Leftrightarrow \sum \frac{1}{\varphi(n)^2 n} = +\infty$?
- limite d'échelle non triviale $\Leftrightarrow$ pertinence du désordre ?
- description quantitative de l'effet du désordre lorsqu'il est pertinent ?

Conclusion ?

La question de la pertinence du désordre/limite d'échelle est centrale dans de nombreux systèmes physiques.

Quelques questions ouvertes :

- pertinence du désordre $\Leftrightarrow \sum \frac{1}{\varphi(n)^2 n} = +\infty$?
- limite d'échelle non triviale $\Leftrightarrow$ pertinence du désordre ?
- description quantitative de l'effet du désordre lorsqu'il est pertinent ?

Merci !