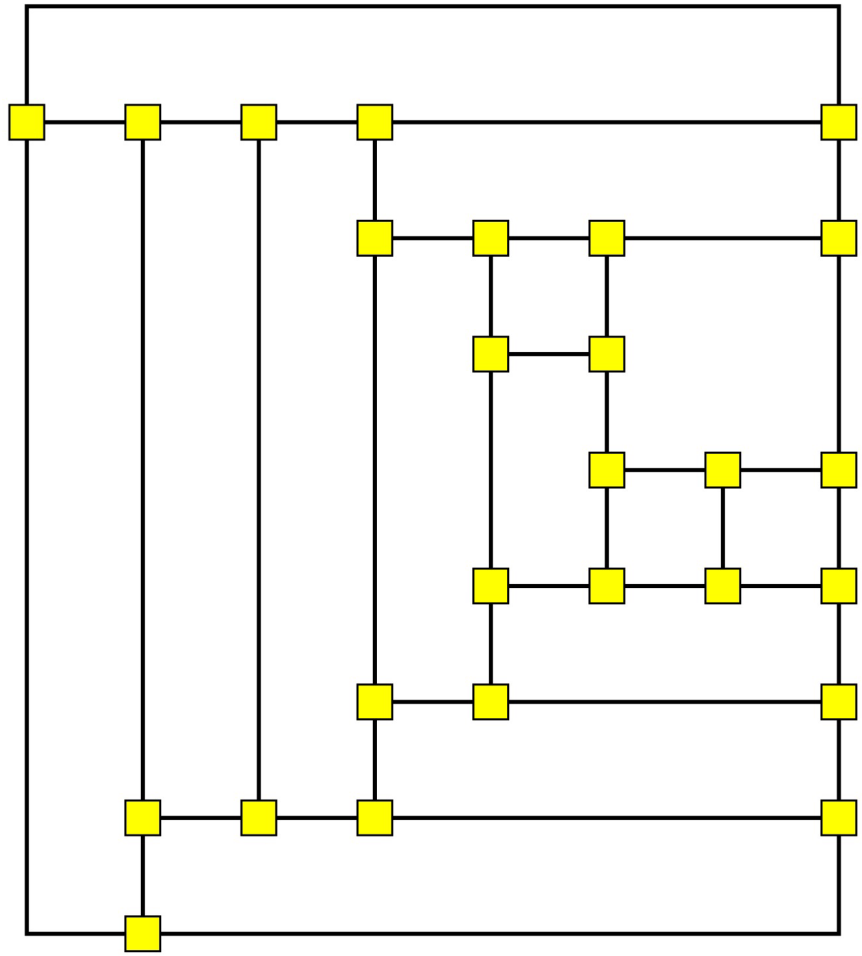
Asymptotique des cartes aléatoires un aperçu

Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

une carte cubique

(ie régulière, de degré 3)



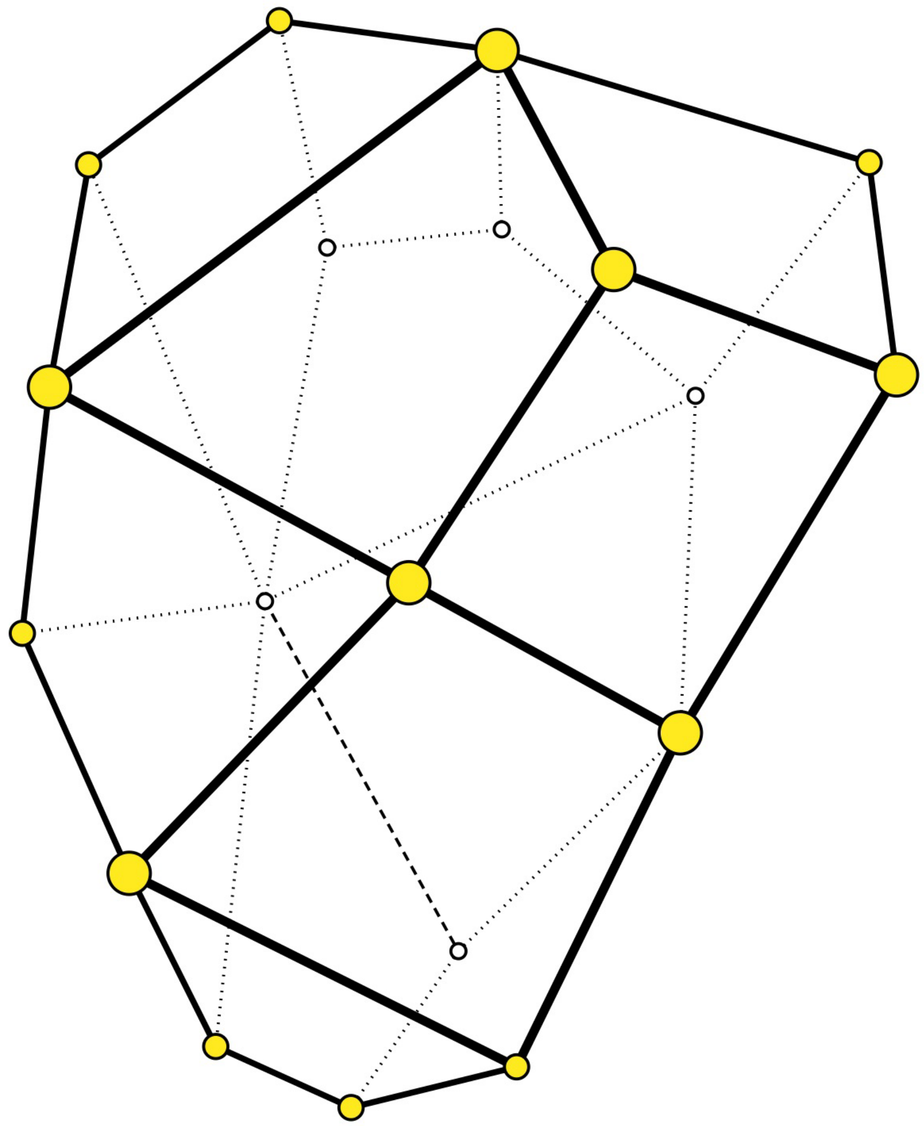
Journées Mas 2014, Toulouse

Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

une quadrangulation

(i.e une carte à faces de d° 4)

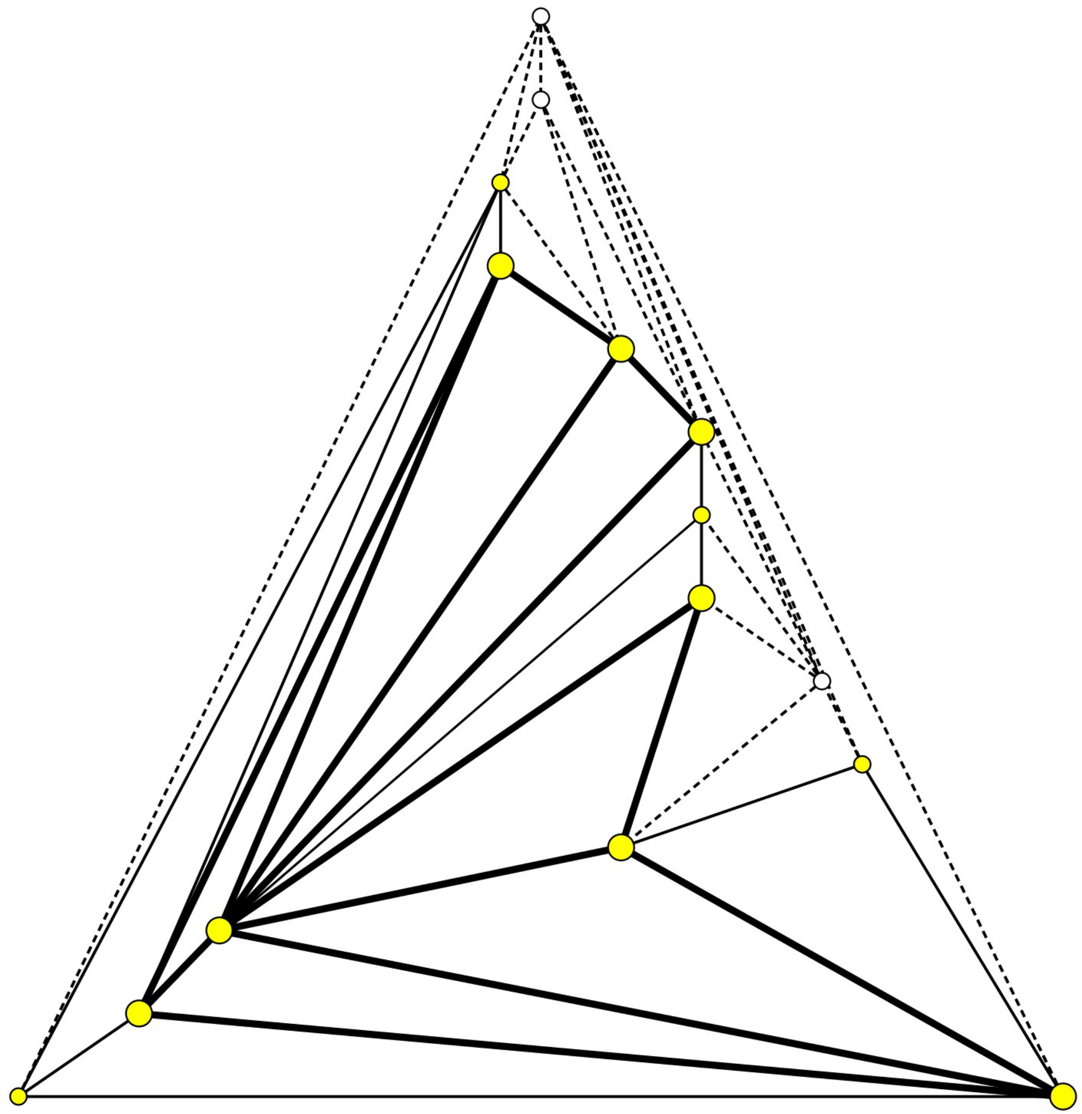
notée dans la suite $\square^n$



Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

une triangulation

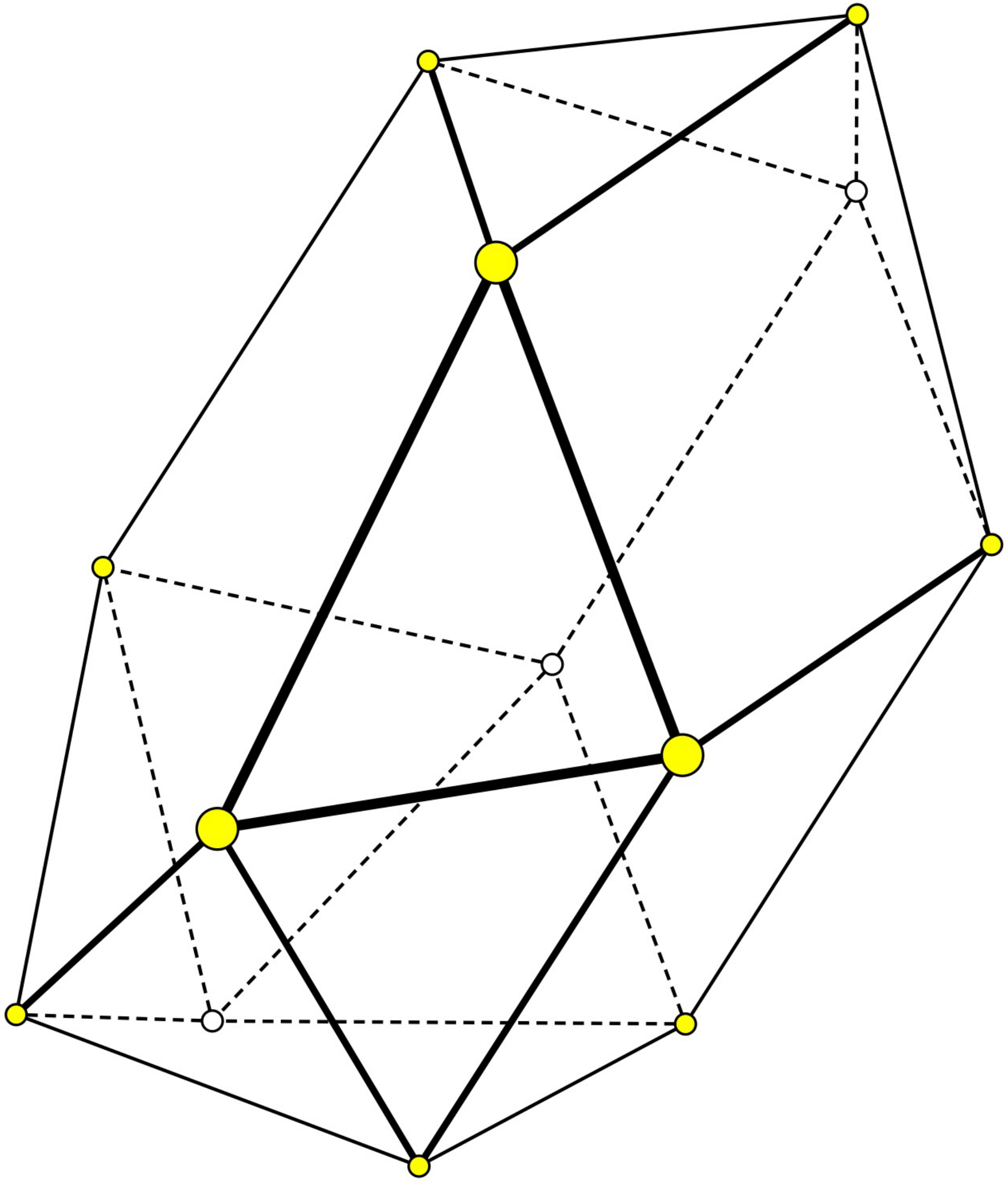
notée plus loin Δ^n



Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

faces de d° variables

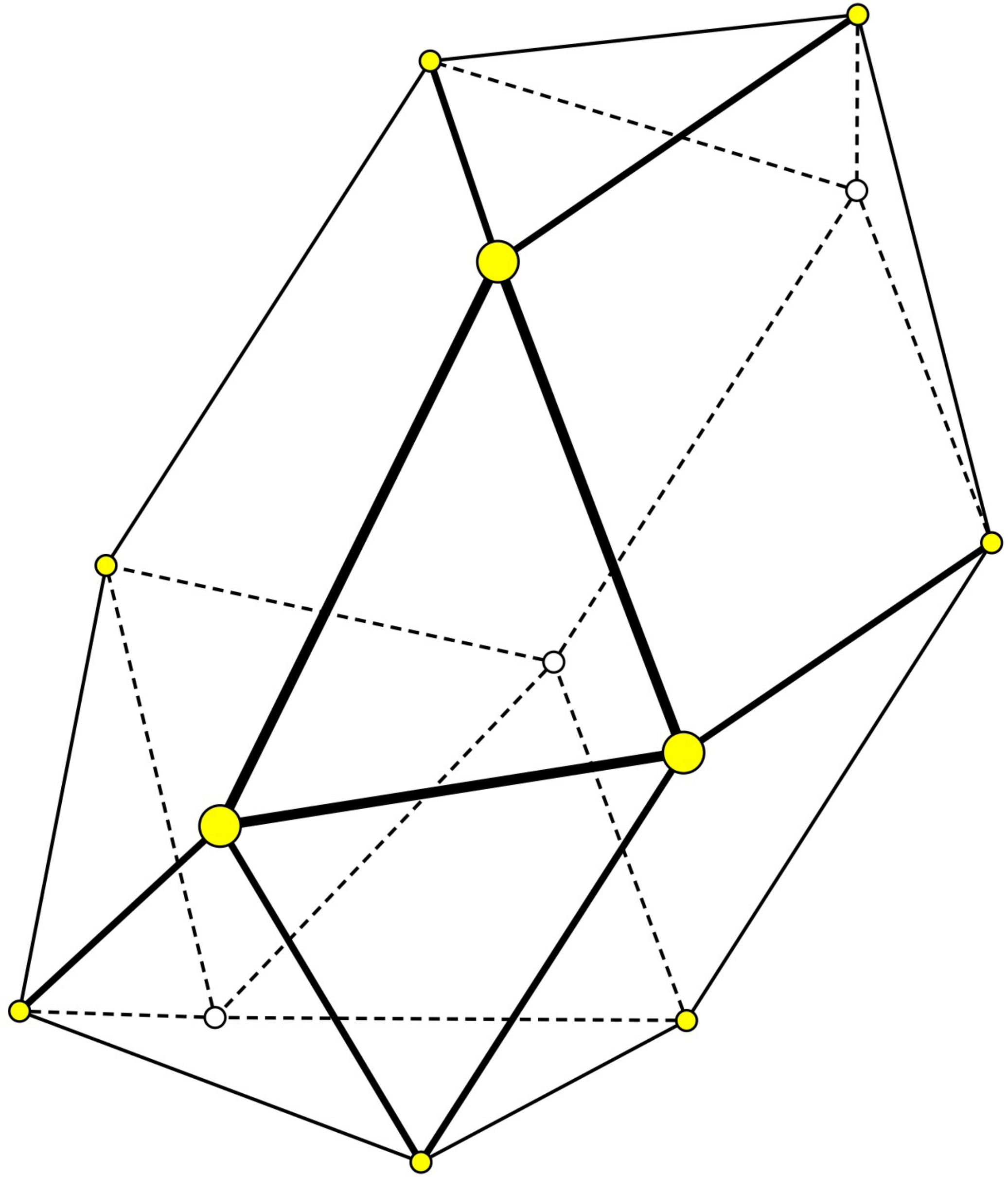
sommets de d° variables



Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

faces de d° variables

sommets de d° va~~ria~~bles
4



Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

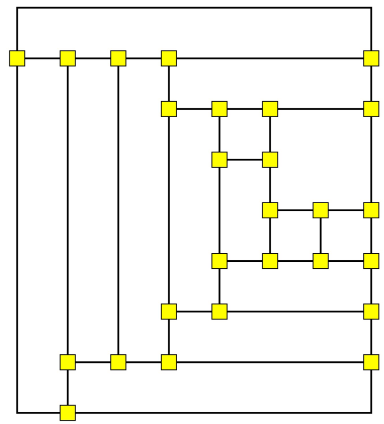
Définition: graphe [dessiné sur / plongé dans] la sphère

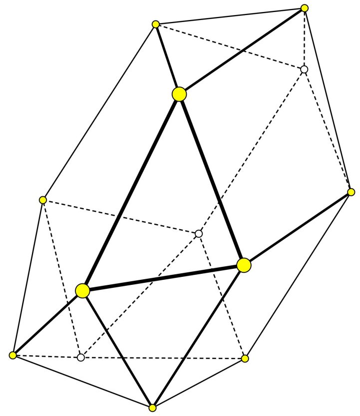
Si l'un est image de l'autre via un homéom

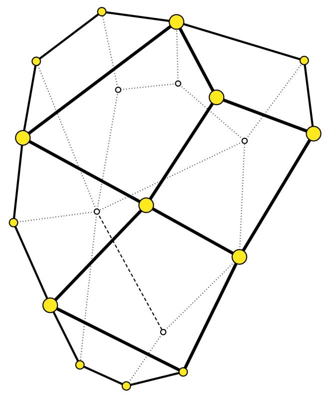
préservant l'orientation de la sphère,

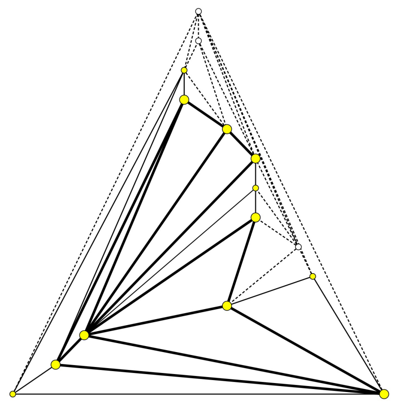
on les considère identiques, i.e **équivalents**

On aime bien distinguer un sommet, la **racine**









Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

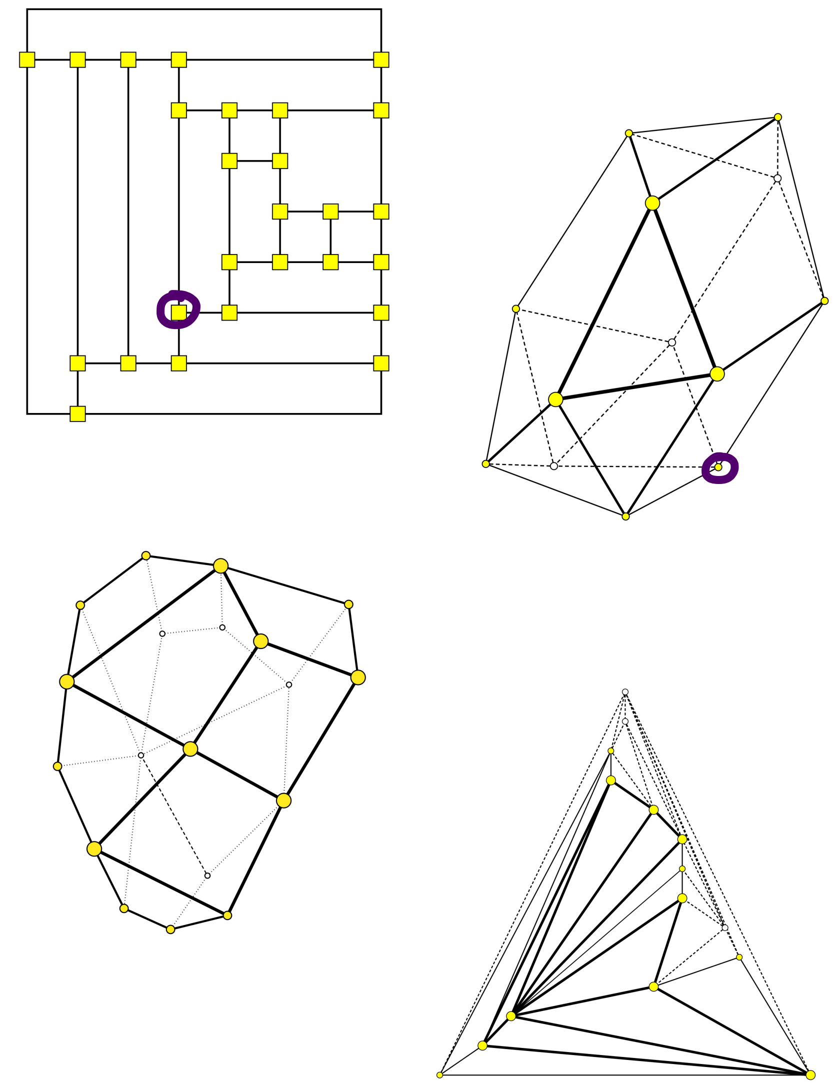
Définition: graphe [dessiné sur / plongé dans] la sphère

Si l'un est image de l'autre via un homéom

préservant l'orientation de la sphère,

on les considère identiques, i e équivalents

On aime bien distinguer un sommet, la racine



Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

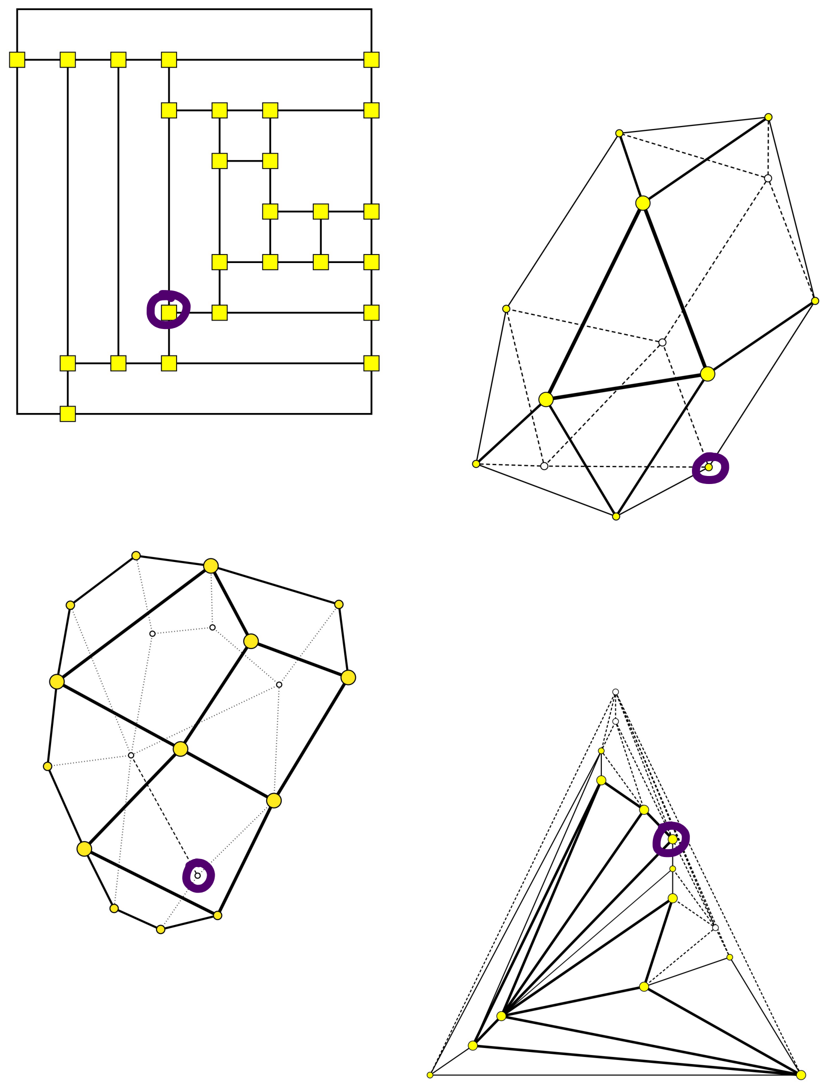
Définition: graphe [dessiné sur / plongé dans] la sphère

Si l'un est image de l'autre via un homéom

préservant l'orientation de la sphère,

on les considère identiques, i.e. équivalents

On aime bien distinguer un sommet, la racine



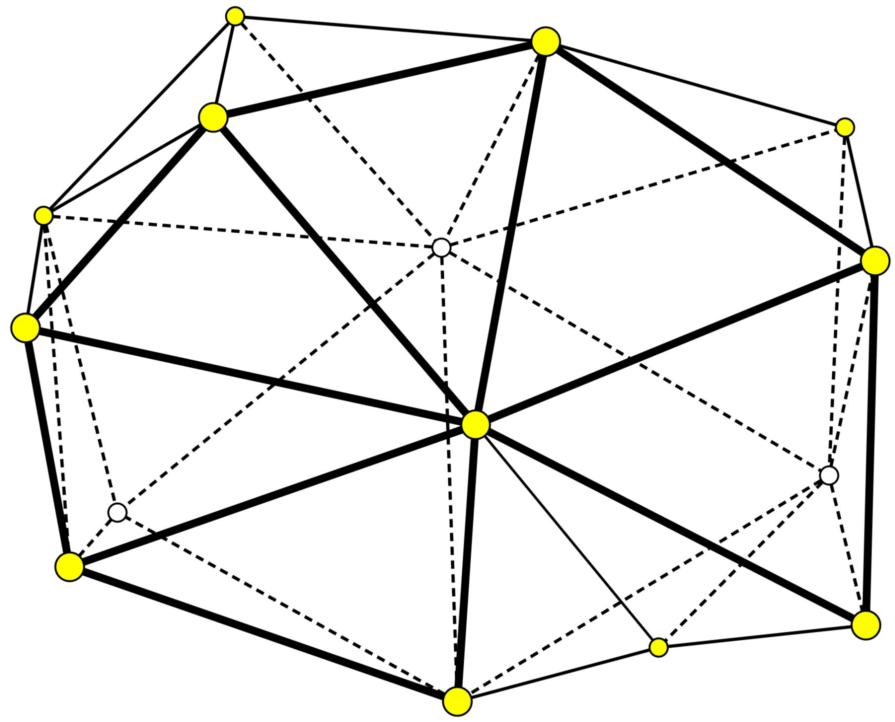
Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Énumération

Tutte (1960's)

$$\Delta_n = \#\{\Delta^{ns} \text{ avec } 2n \text{ faces}\}$$

$$= \frac{2}{2n+2}\,\frac{2^n}{2n+1}\binom{3n}{n}$$



Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

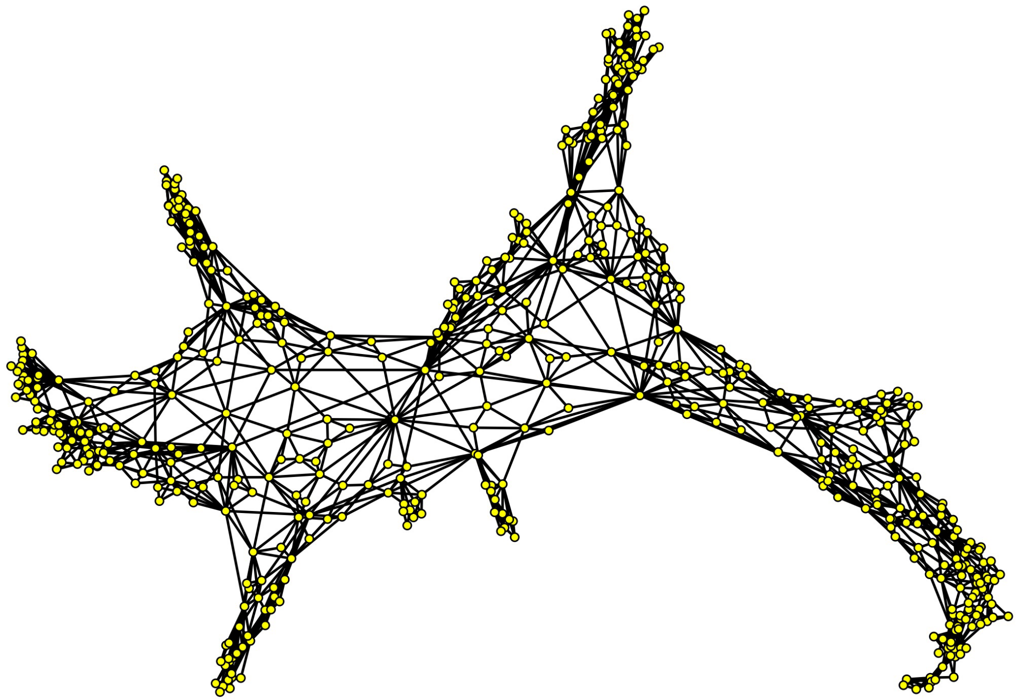
Énumération

Tutte (1960's)

$$\Delta_n = \#\{\Delta^{ns} \text{ avec } 2n \text{ faces}\}$$

$$= \frac{2}{2n+2}\,\frac{2^n}{2n+1}\binom{3n}{n}$$

$$\sim \frac{a}{n^{5/2}}\,(27/2)^n$$



Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Énumération

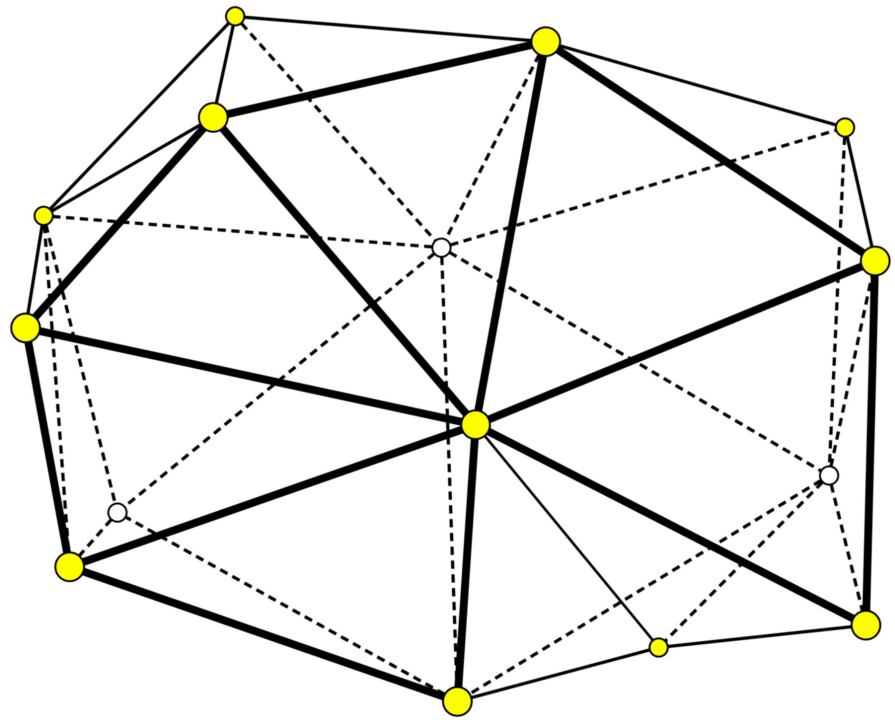
Tulte (1960's)

$$\Delta_n = \#\{\Delta^{ns} \text{ avec } 2n \text{ faces}\}$$

$$= \frac{2}{2n+2}\,\frac{2^n}{2n+1}\binom{3n}{n}$$

$$\sim \frac{a}{n^{5/2}}\,(27/2)^n$$

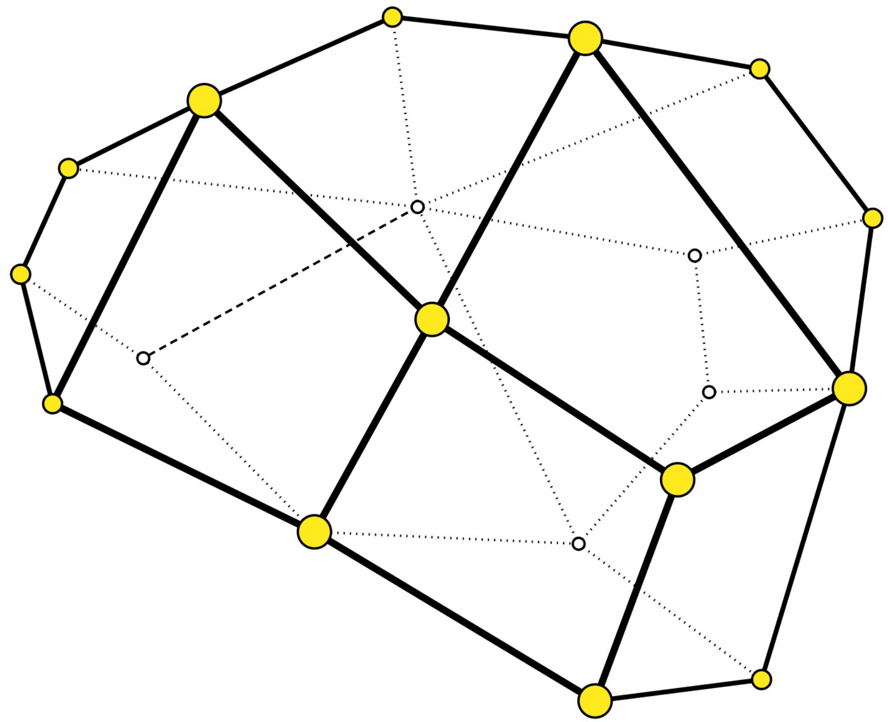
$$= \#\{\text{cubiques à } 2n \text{ sommets}\}$$



Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Énumération

Tutte (1960's)



$\Delta_n = \#\{\Delta^{ns}$ avec $2n$ faces$\}$

$= \frac{2}{2n+2}\,\frac{2^n}{2n+1}\binom{3n}{n}$

$\sim \frac{a}{n^{5/2}}\,(27/2)^n$

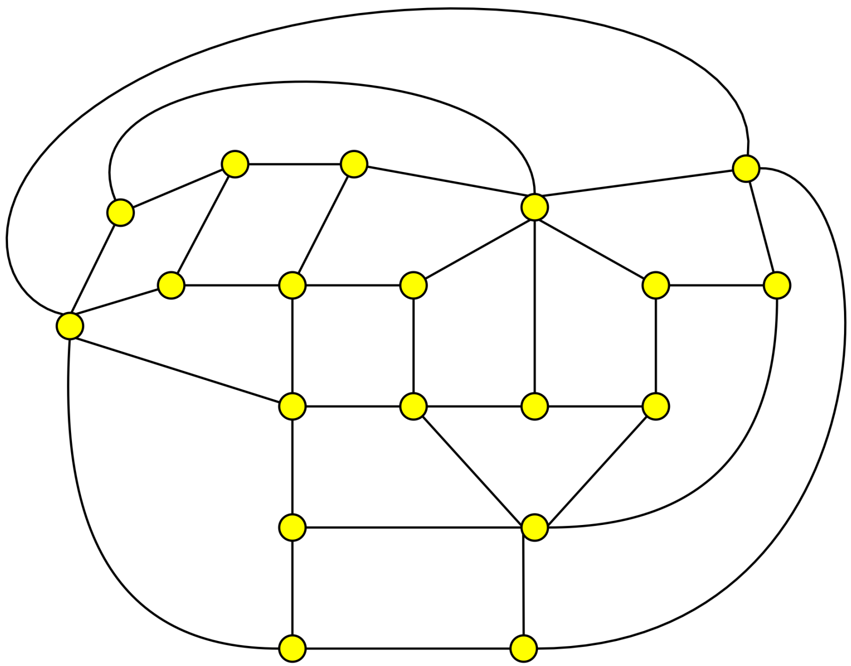
$= \#\{$cubiques à $2n$ sommets$\}$

$\square_n = \#\{\square^{ns}$ avec n faces$\} = \frac{2}{n+2}\,\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n} \sim \frac{b}{n^{5/2}}\,12^n$

Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Énumération

Tutte (1960's)



$$\Delta_n = \#\{\Delta^{ns} \text{ avec } 2n \text{ faces}\}$$

$$= \frac{2}{2n+2}\,\frac{2^n}{2n+1}\binom{3n}{n}$$

$$\sim \frac{a}{n^{5/2}}\,(27/2)^n$$

$$= \#\{\text{cubiques à } 2n \text{ sommets}\}$$

$$\square_n = \#\{\square^{ns} \text{ avec } n \text{ faces}\} = \frac{2}{n+2}\,\frac{3^n}{n+1}\binom{2n}{n} \sim \frac{b}{n^{5/2}}\,12^n$$

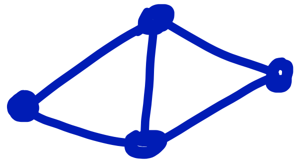
Comment choisir a_n pour que $\#\{\square^{ns} \text{ à } n \text{ faces et diamètre} \leq a_n\}$

et $\#\{\cdot \quad > a_n\}$ soient tous deux $\Theta(\square_n)$?

Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Bijections

* Bijection associant à une carte sa duale



* Bijection entre $\square^n$ et carte quelconque

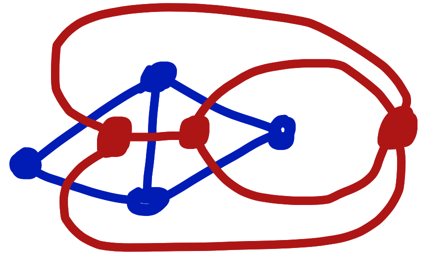
* Bijection de Cori Vauquelin Schaeffer CVS

* Bijection de Bouttier Di Francesco Guitter

* etc cf récemment bij^n d'Ambjørn-Budd, Bettinelli et al

Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Bijections



* Bijection associant à une carte sa duale

* Bijection entre $\square^n$ et carte quelconque

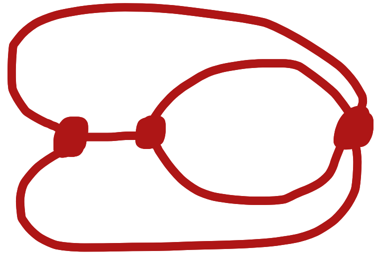
* Bijection de Cori Vauquelin Schaeffer CVS

* Bijection de Bouttier Di Francesco Guitter

* etc cf récemment bij^n d'Ambjørn-Budd, Bettinelli et al

Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Bijections



* Bijection associant à une carte sa duale

* Bijection entre $\square^n$ et carte quelconque

* Bijection de Cori Vauquelin Schaeffer CVS

* Bijection de Bouttier Di Francesco Guitter

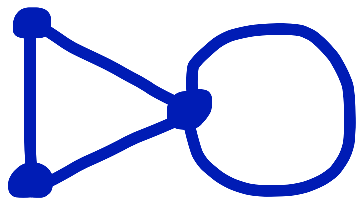
* etc cf récemment bij^n d'Ambjørn-Budd, Bettinelli et al

Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Bijections

* Bijection associant à une carte sa duale

* Bijection entre $\square^n$ et carte quelconque



* Bijection de Cori Vauquelin Schaeffer CVS

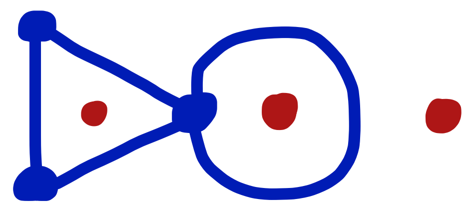
* Bijection de Bouttier Di Francesco Guitter

* etc cf récemment bij^n d'Ambjørn-Budd, Bettinelli et al

Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Bijections

* Bijection associant à une carte sa duale

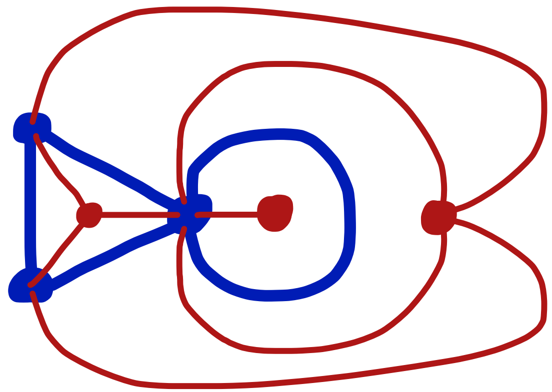


* Bijection entre $\square^n$ et carte quelconque
* Bijection de Cori Vauquelin Schaeffer CVS
* Bijection de Bouttier Di Francesco Guitter
* etc cf récemment bij^n d'Ambjørn-Budd, Bettinelli et al

 Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Byections

* Bijection associant à une carte sa duale



* Bijection entre $\square^n$ et carte quelconque

* Bijection de Cori Vauquelin Schaeffer CVS

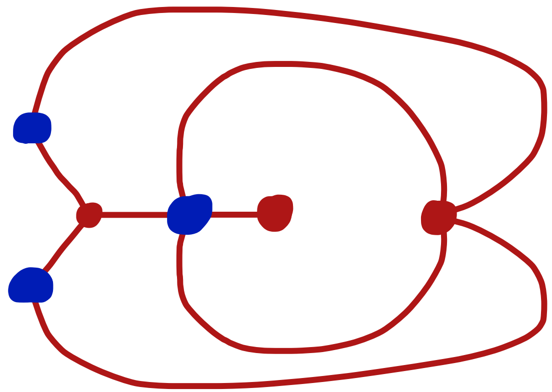
* Bijection de Bouttier Di Francesco Guitter

* etc cf récemment bijn d'Ambjørn-Budd, Bettinelli et al

Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Bijections

* Bijection associant à une carte sa duale

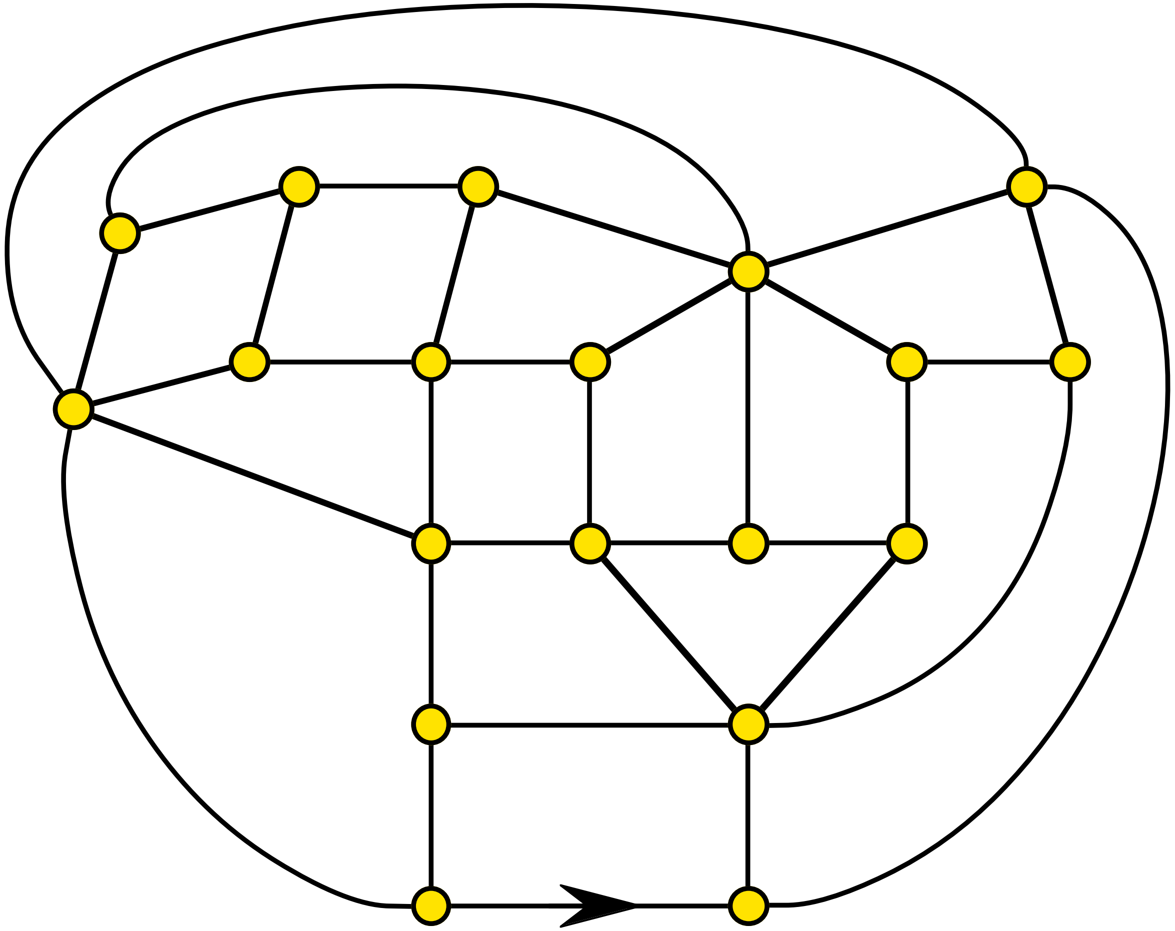


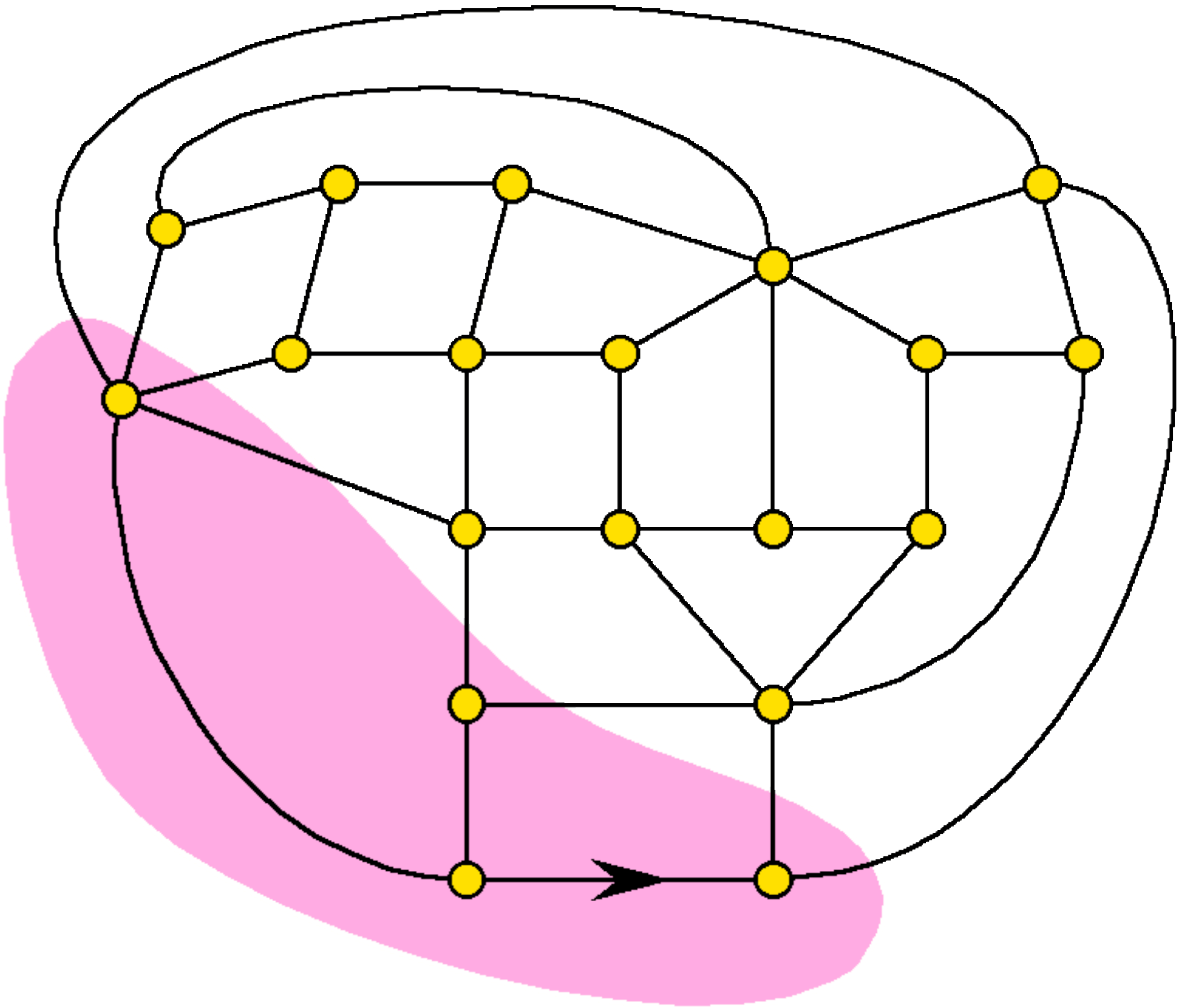
* Bijection entre $\square^n$ et carte quelconque

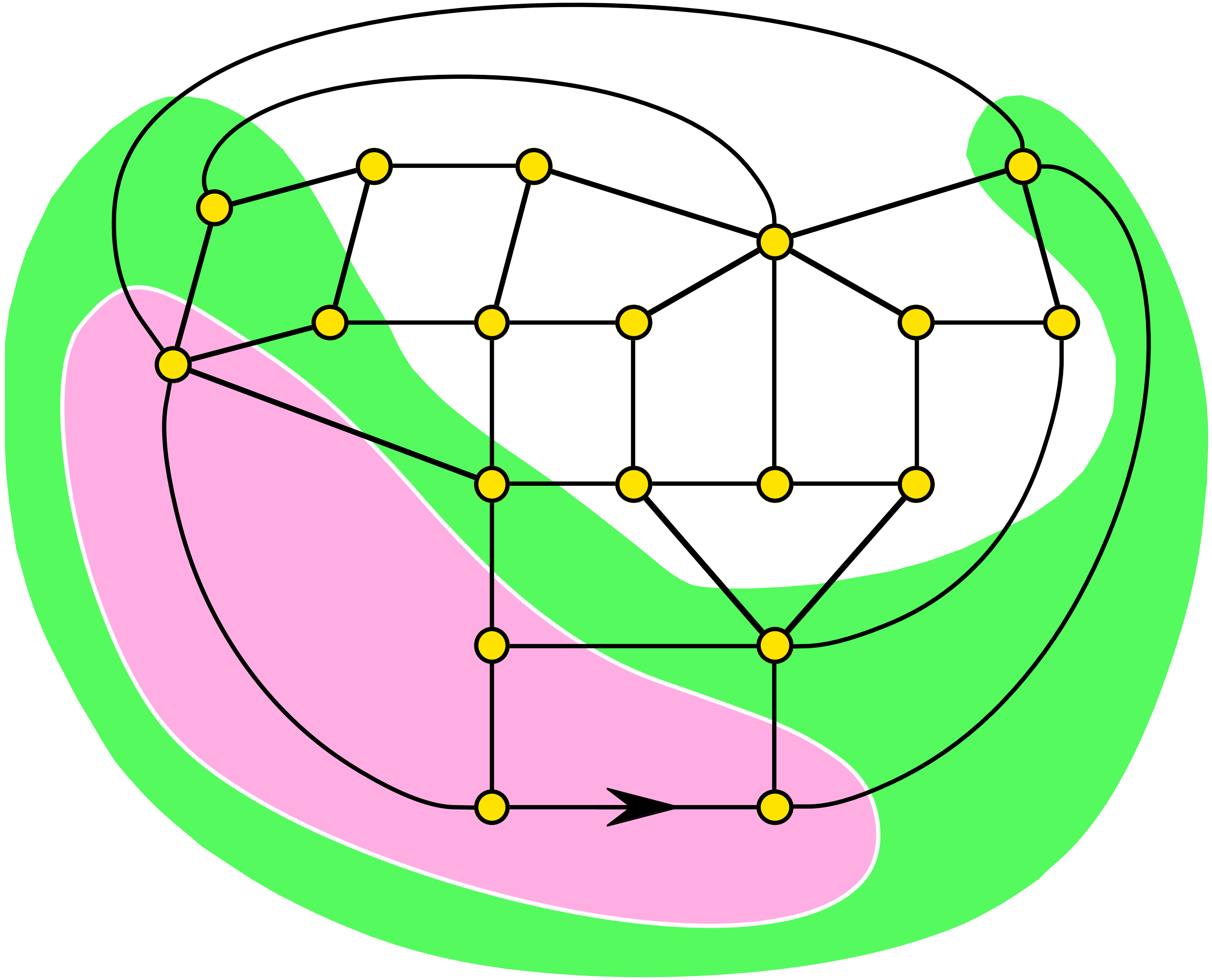
* Bijection de Cori Vauquelin Schaeffer CVS

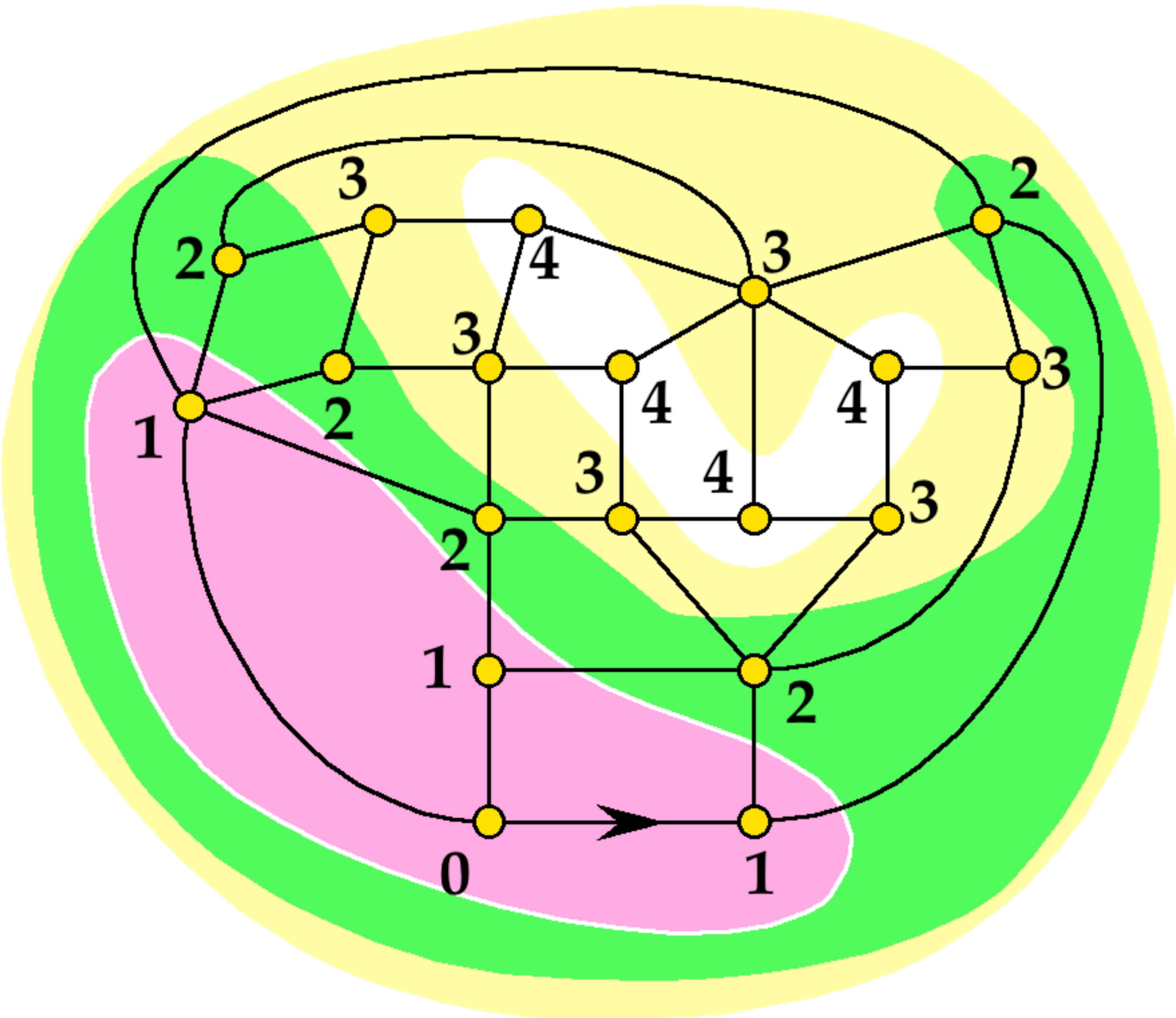
* Bijection de Bouttier Di Francesco Guitter

* etc cf récemment bij^n d'Ambjorn-Budd, Bettinelli et al

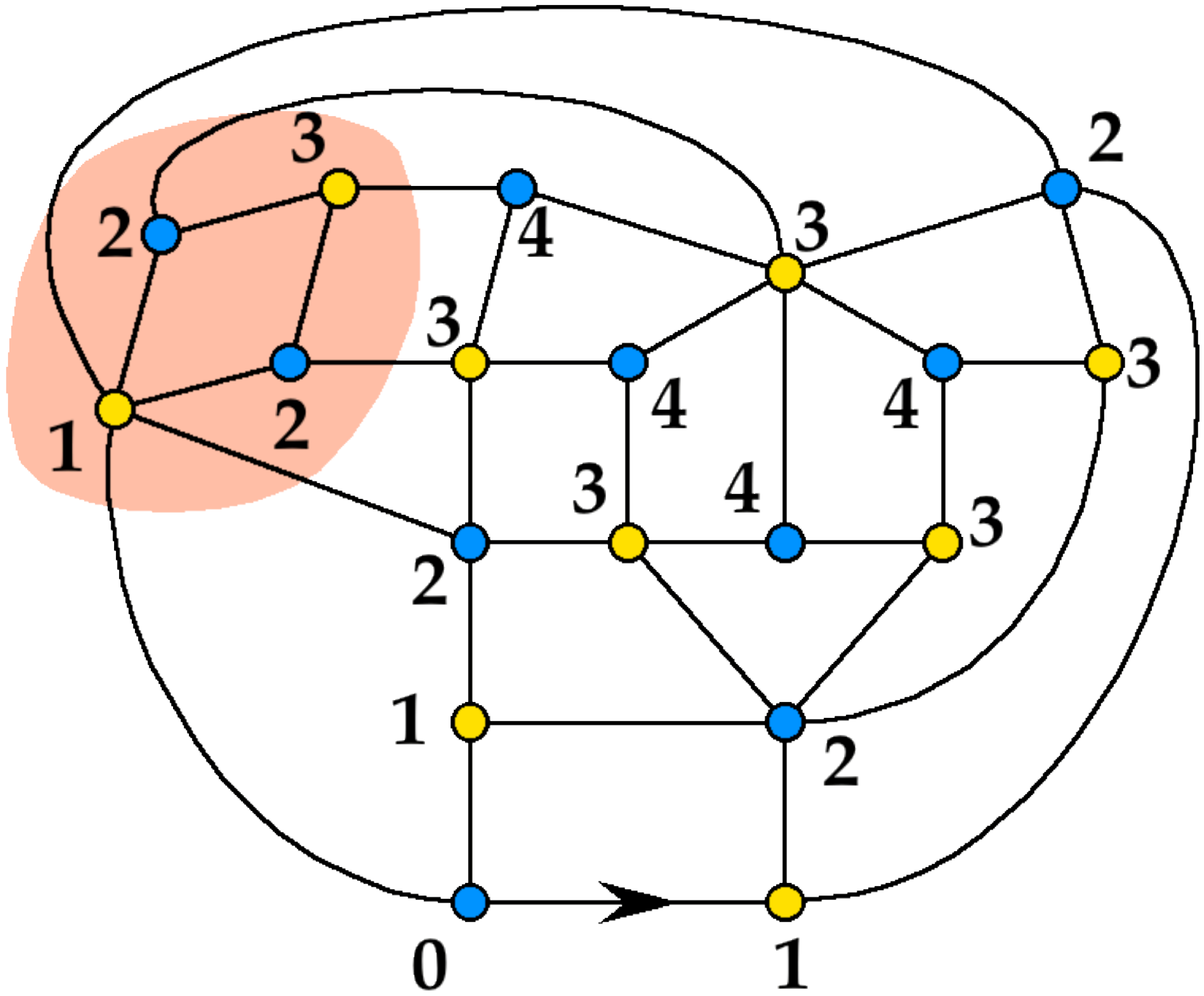




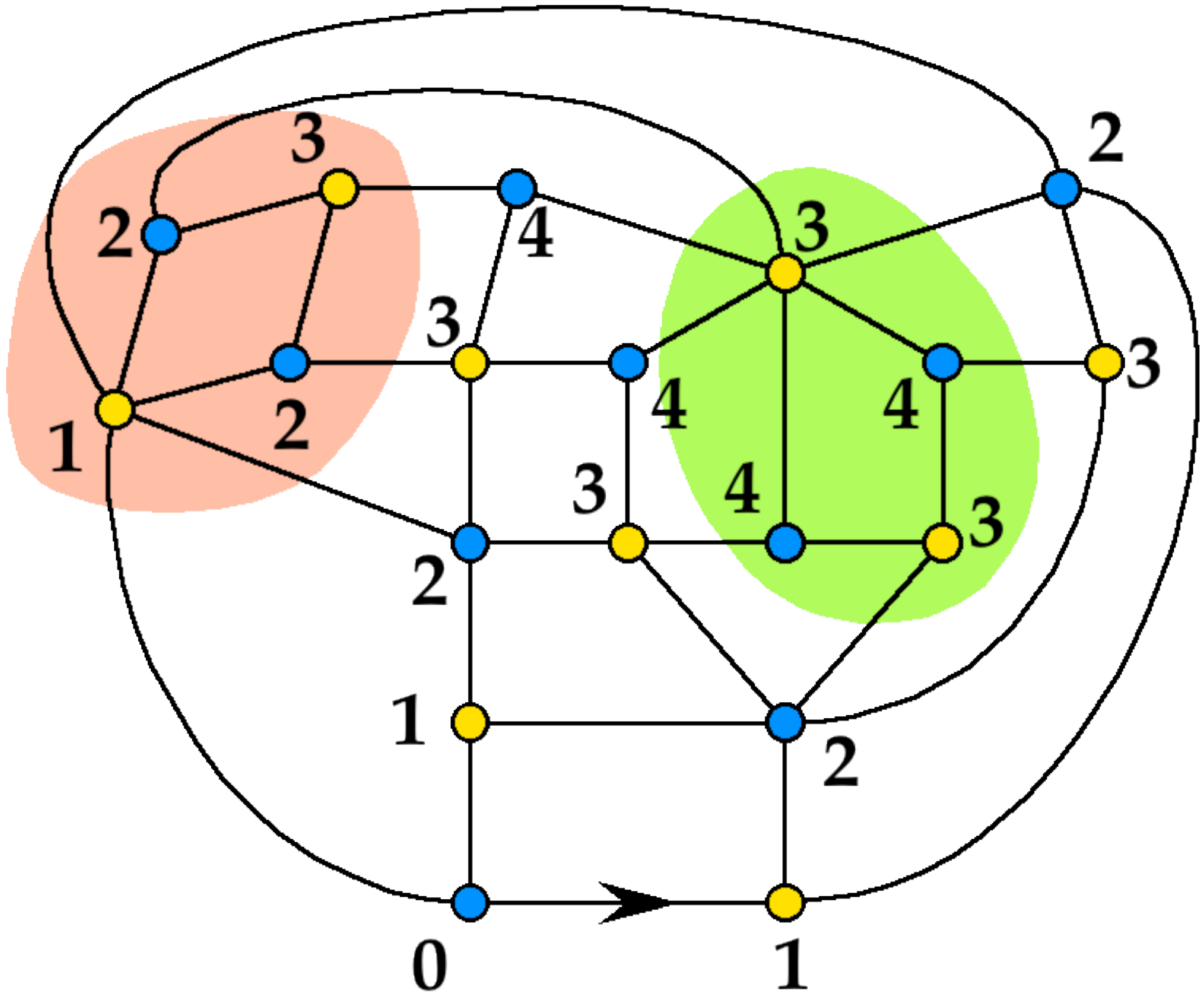


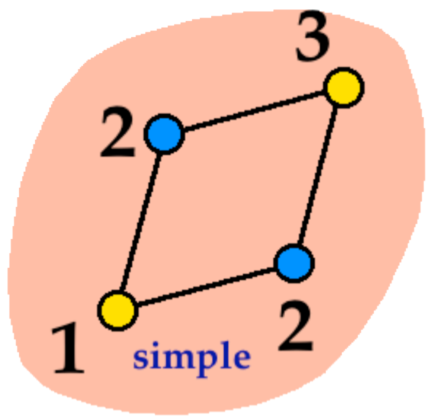


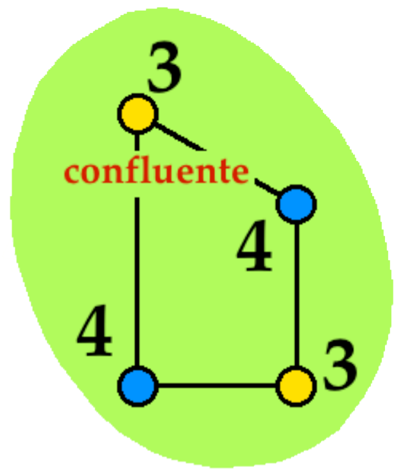
3
2
2
4
3
3
3
1
2
4
4
3
4
3
2
1
2
0
1

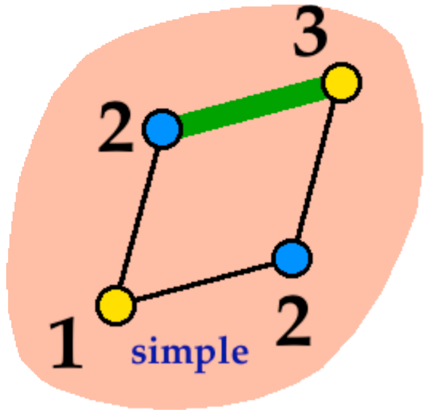


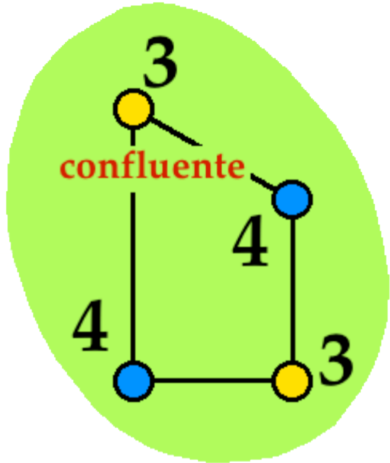
3
2
2
4
3
3
3
2
1
2
4
4
3
4
3
2
1
2
0
1

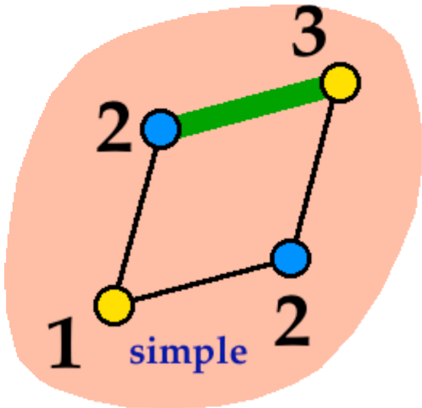

3
2
2
4
3
3
1
2
4
4
3
3
4
3
2
1
2
0
1

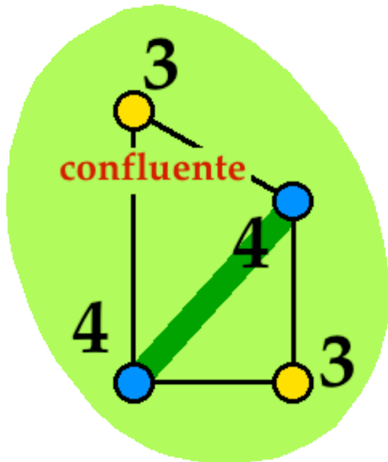

3
2
2
1
simple

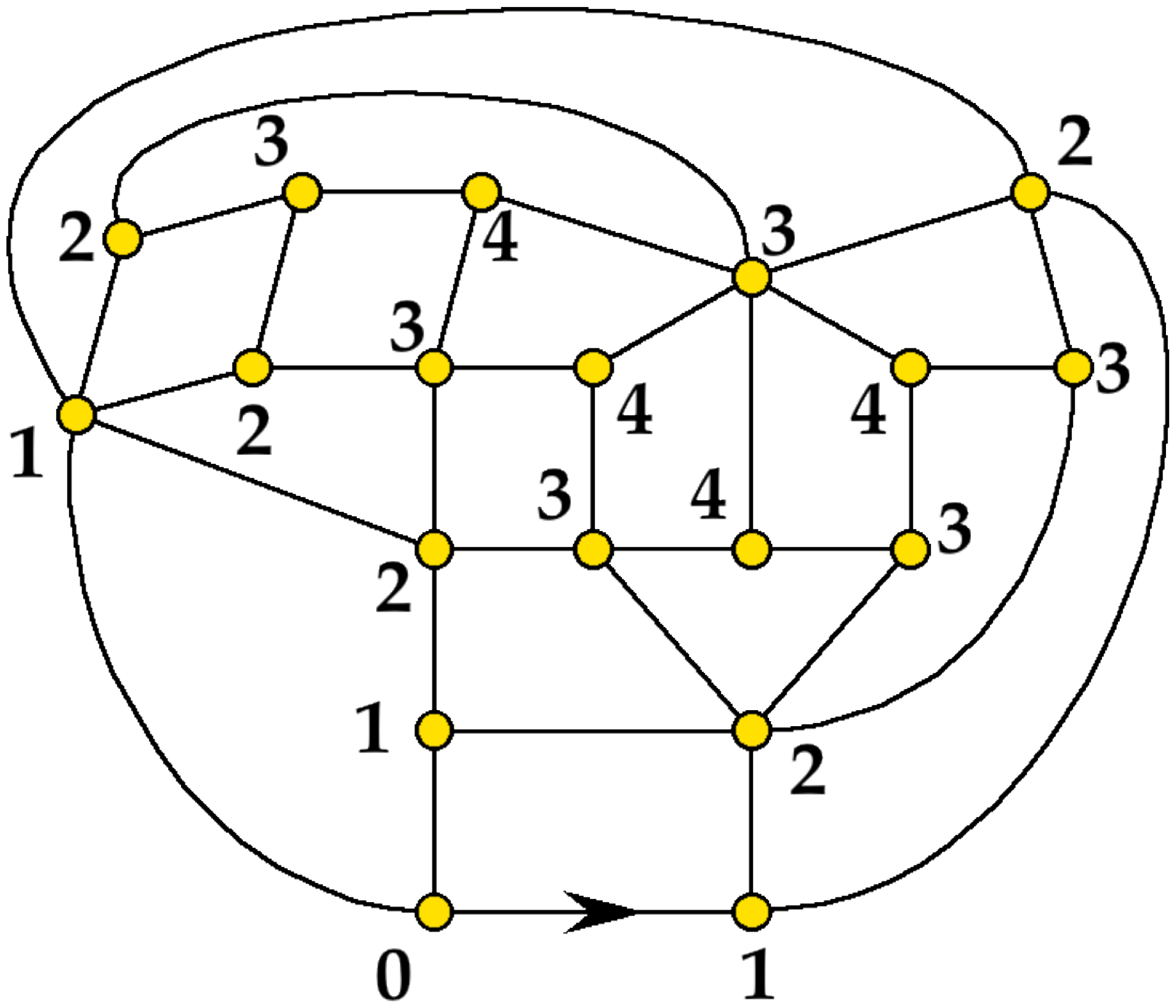

3
confluente
4
4
3

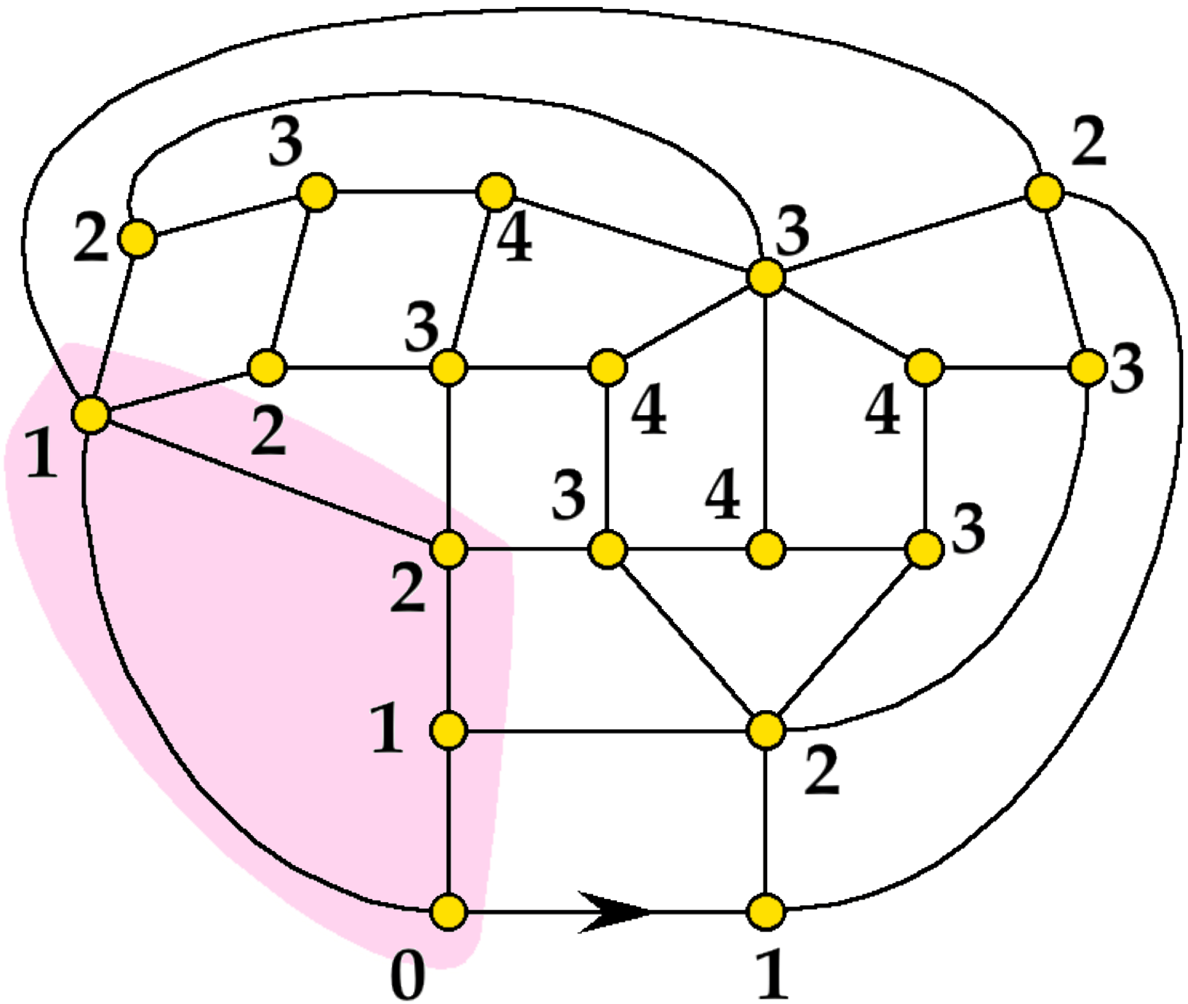

3
2
1
simple
2

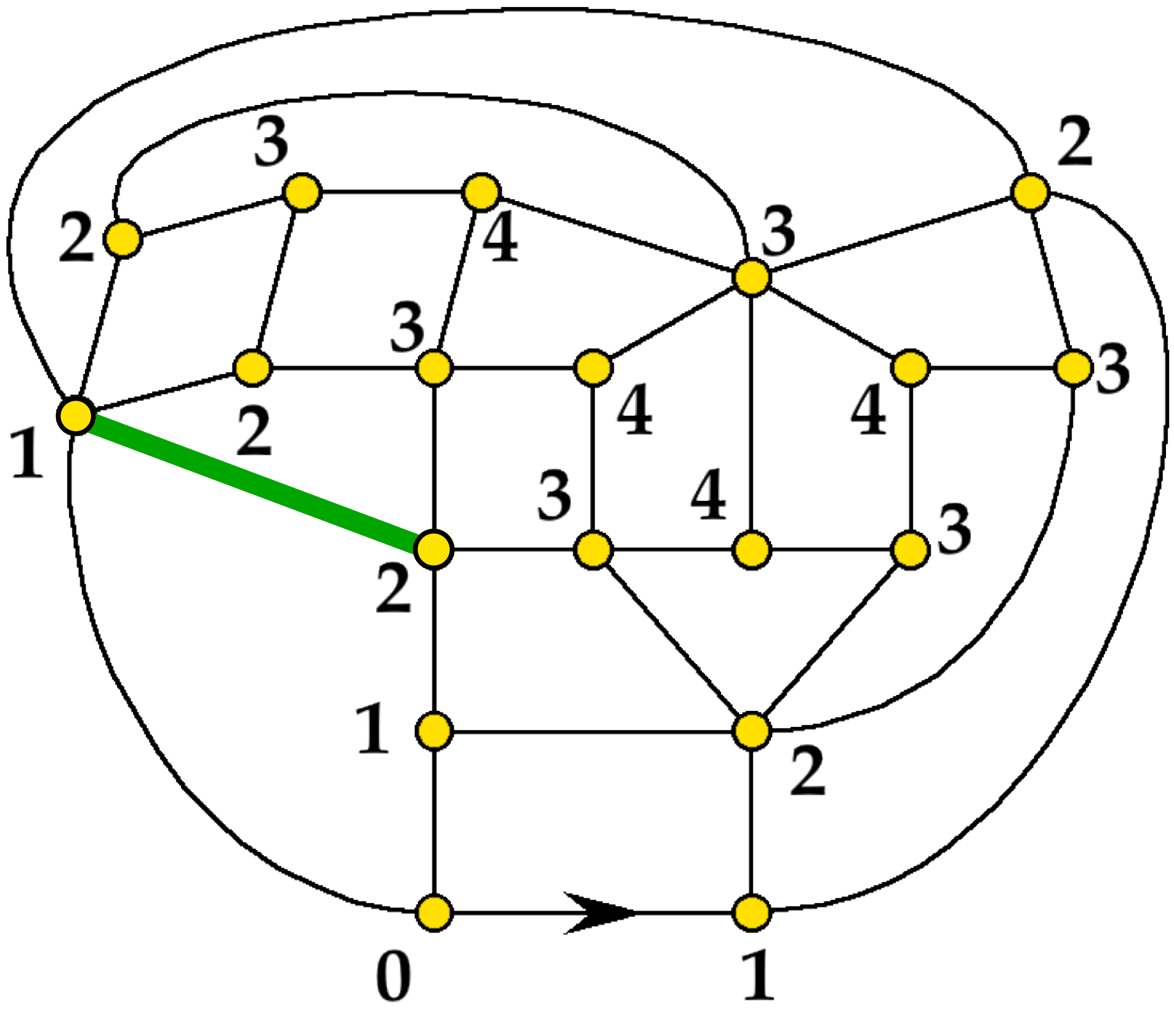

3
confluente
4
4
3

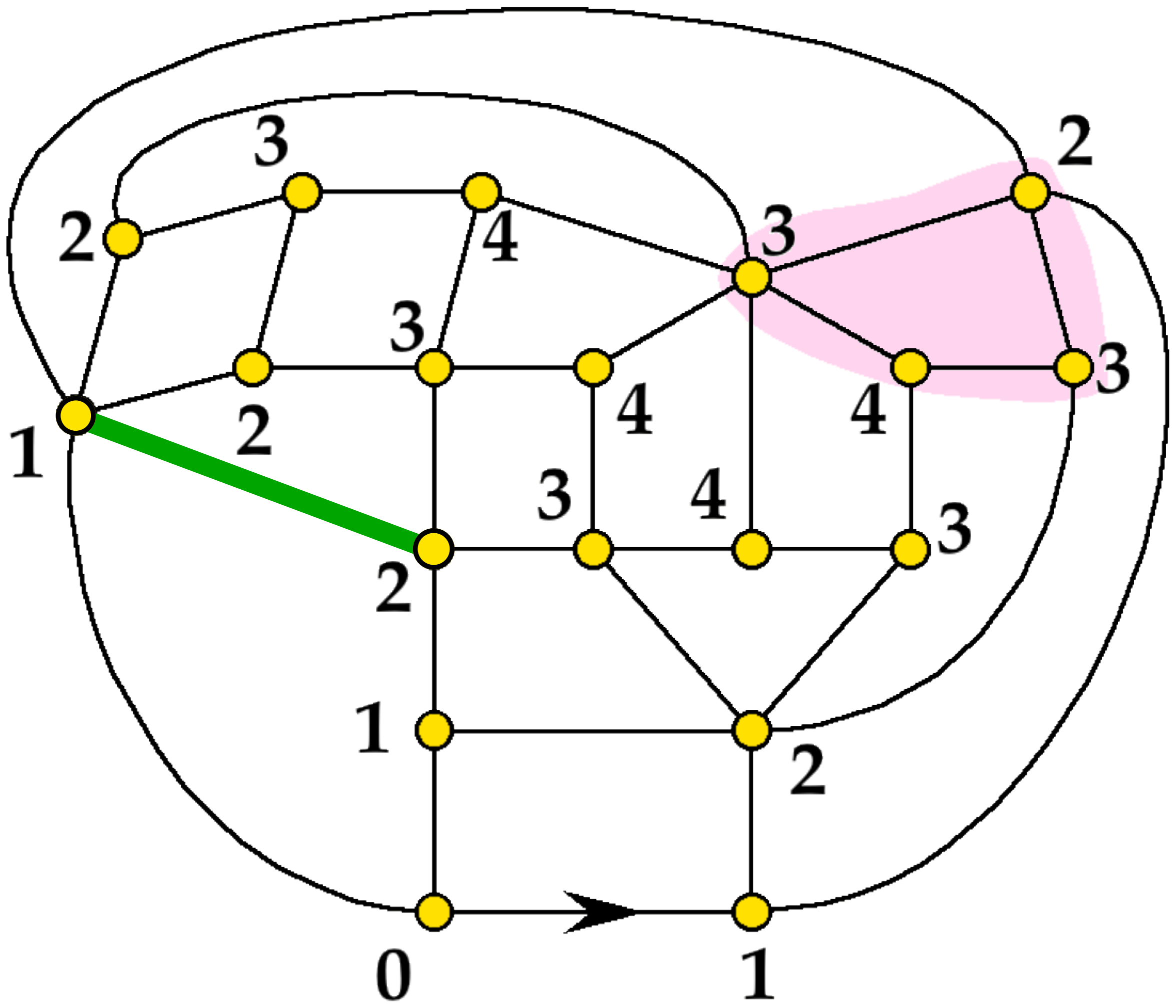

3
2
1
simple
2


3
confluente
4
4
3

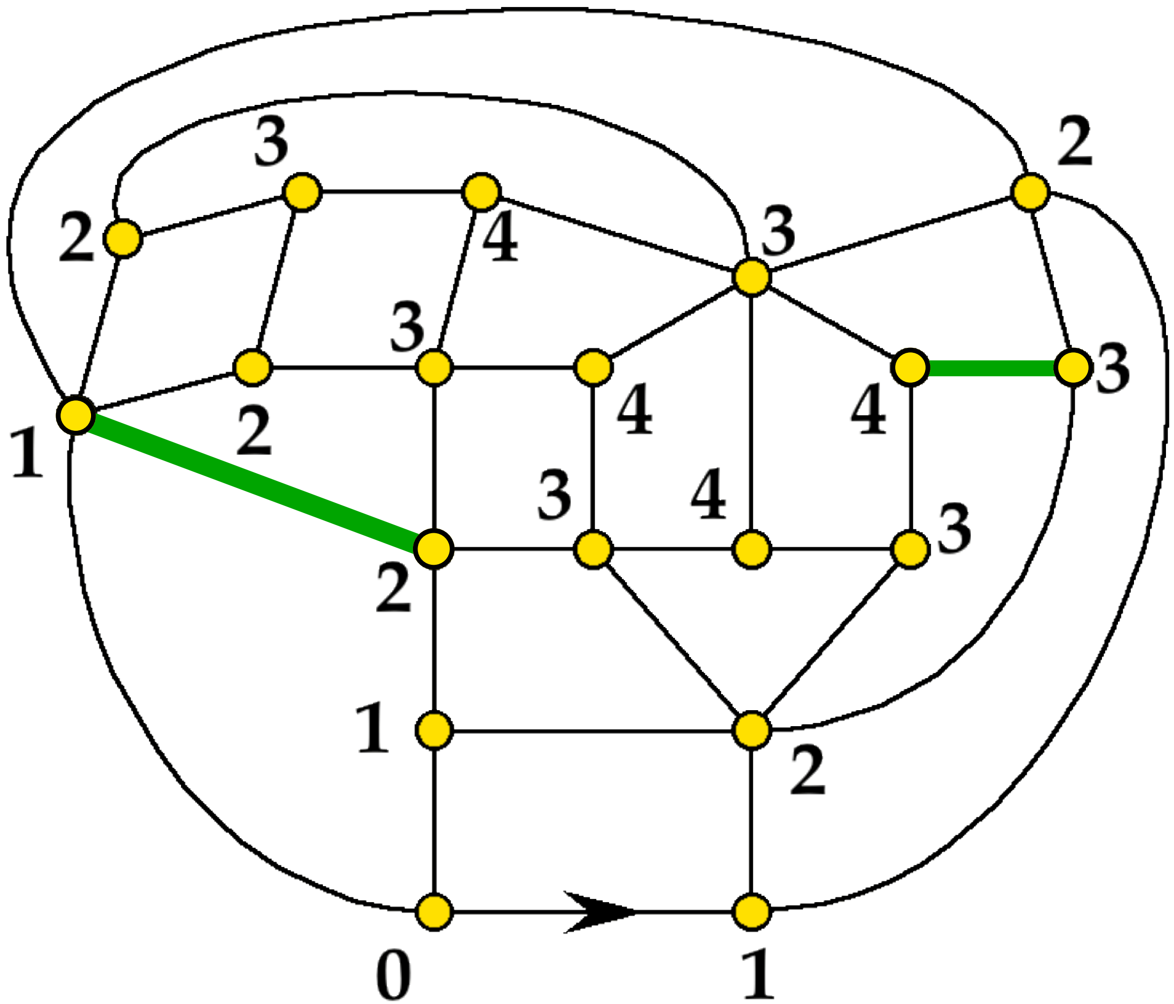

3
4
2
3
2
3
4
3
3
4
4
3
2
1
4
3
3
2
1
2
0
1


3
2
2
4
3
3
3
2
3
1
2
4
4
3
4
3
2
1
2
0
1

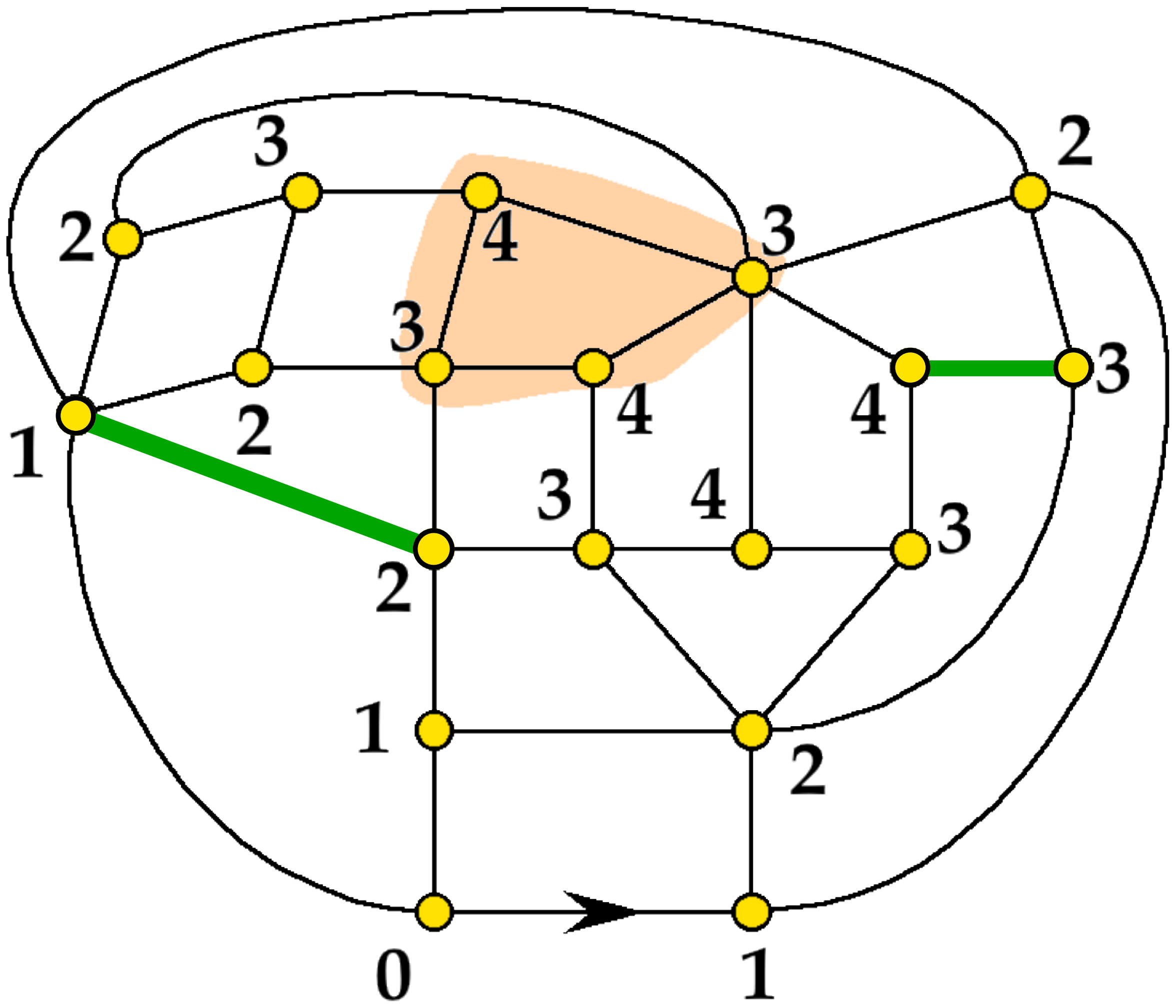

3
2
2
4
3
3
3
2
4
4
1
3
4
3
2
1
2
0
1

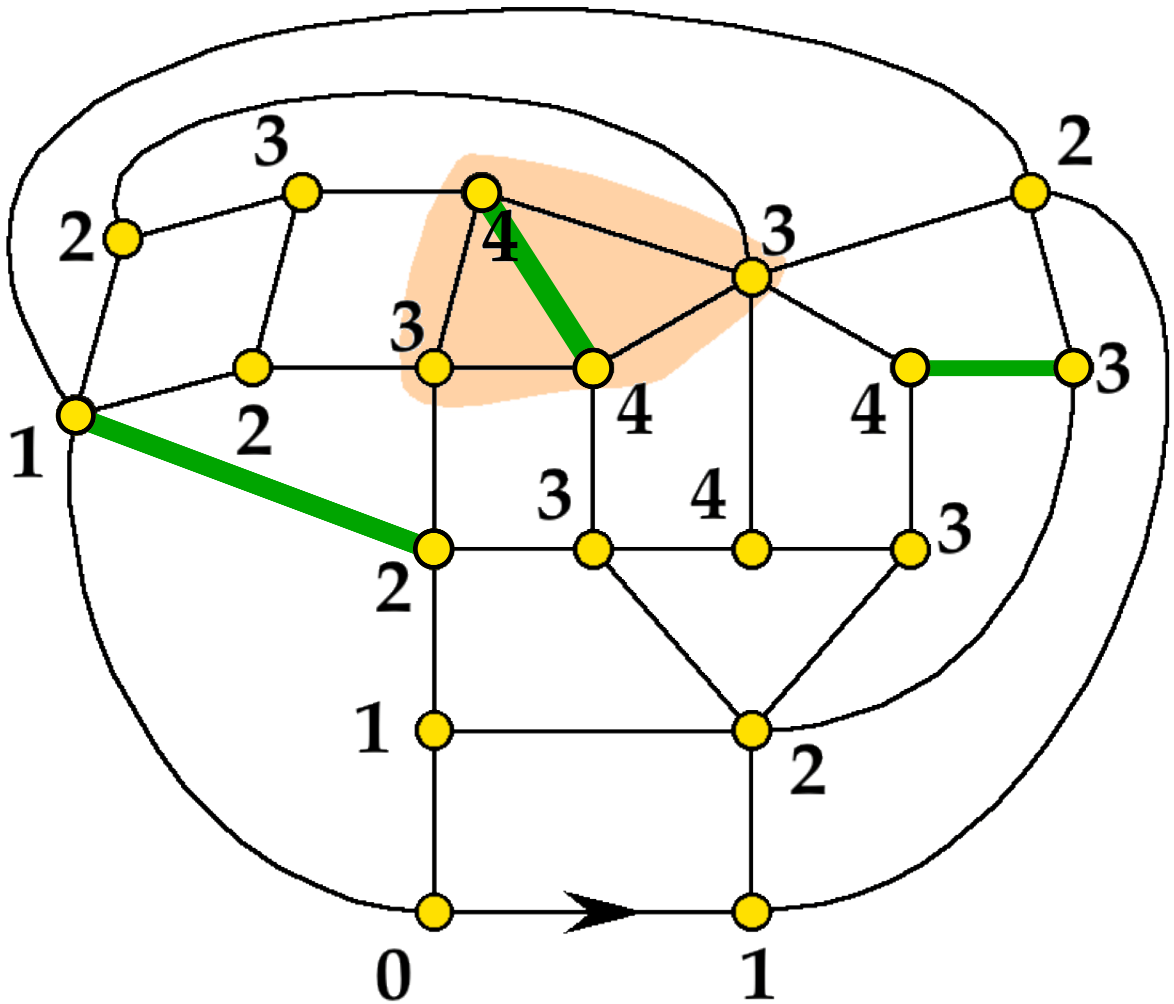


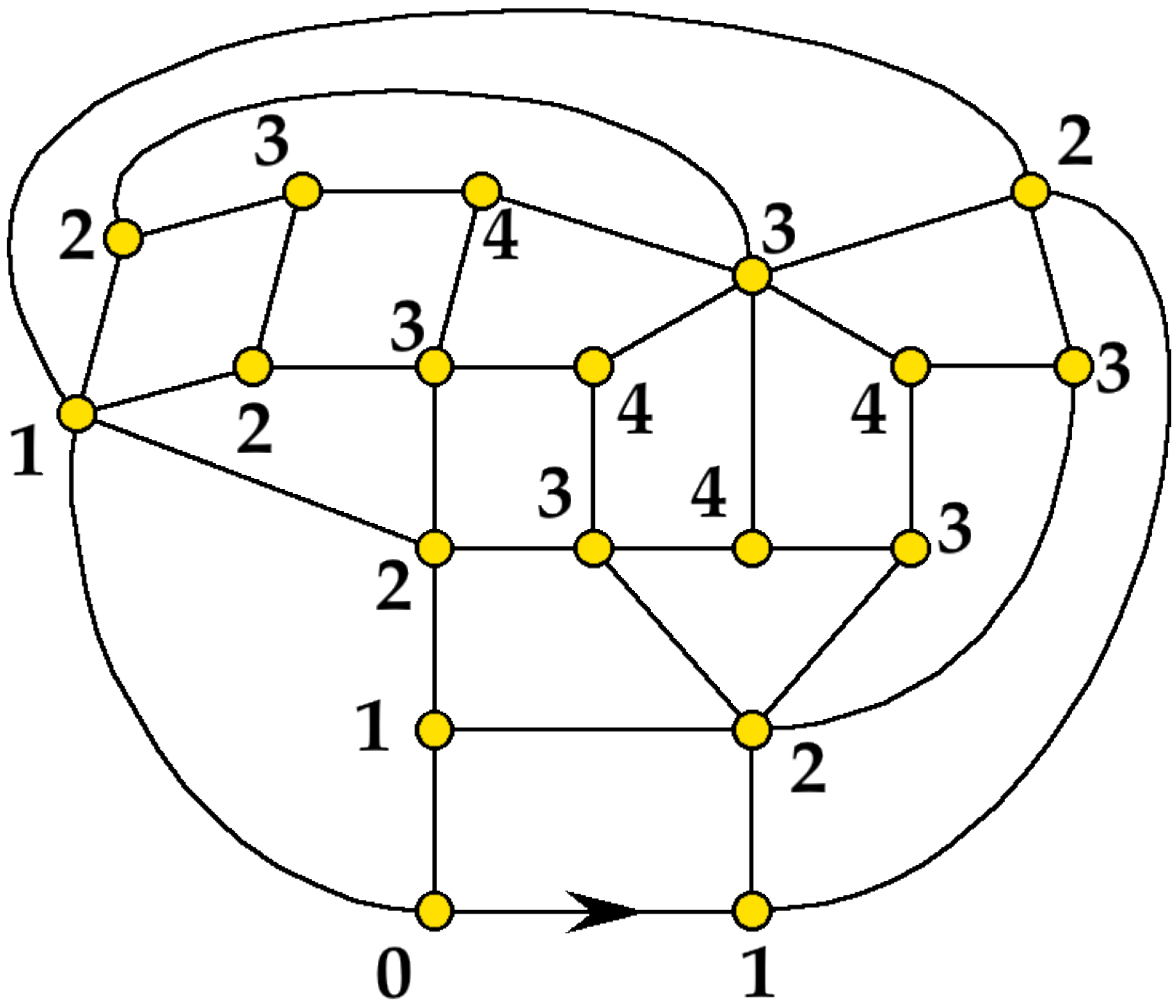
3
2
2
4
3
3
2
1
4
3
4
4
3
4
2
1
2
0
1



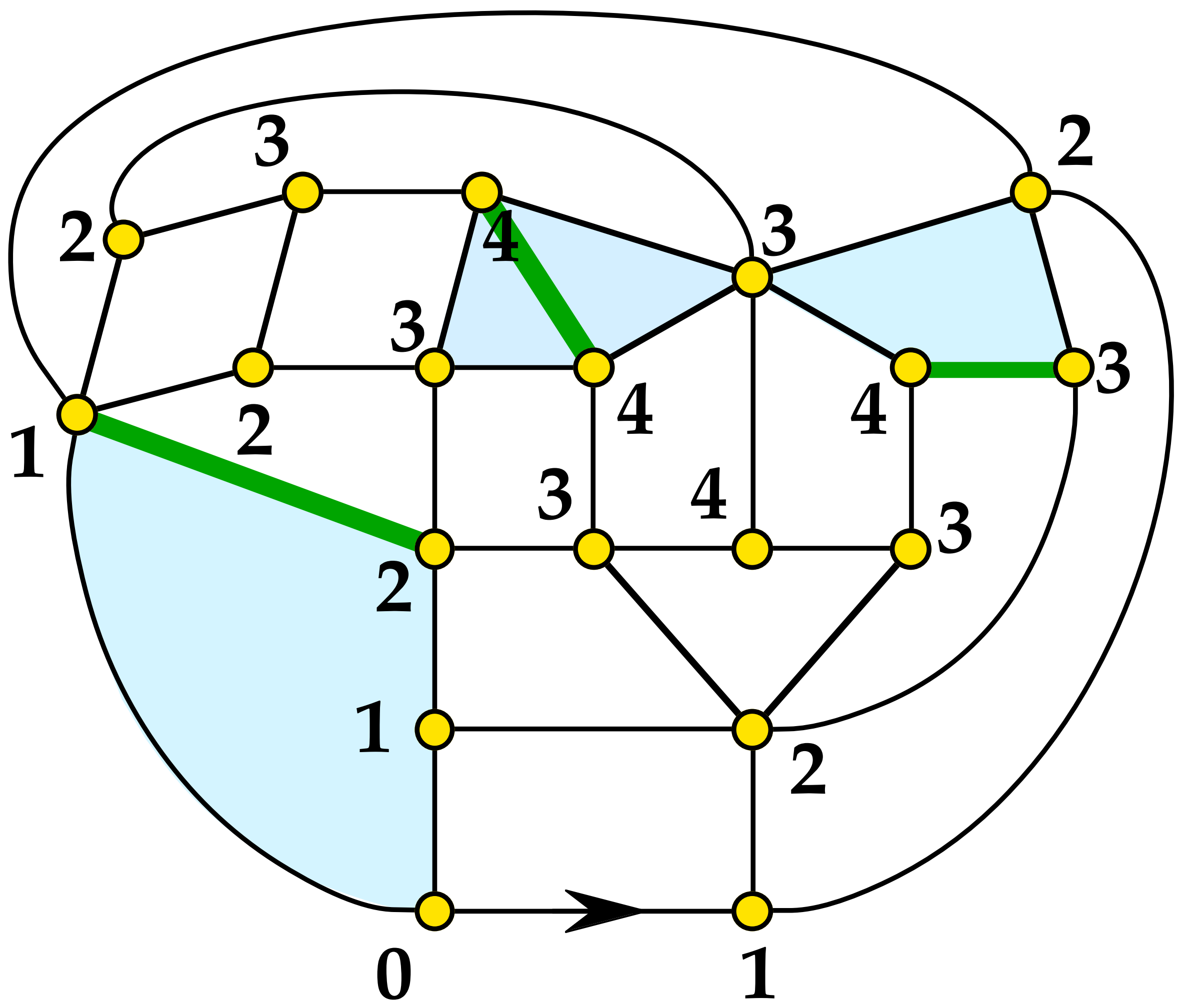
3
2
2
3
4
3
3
2
4
4
1
2
3
4
3
2
1
2
0
1


3
2
2
4
3
3
3
1
2
4
4
4
3
3
4
3
2
1
2
0
1

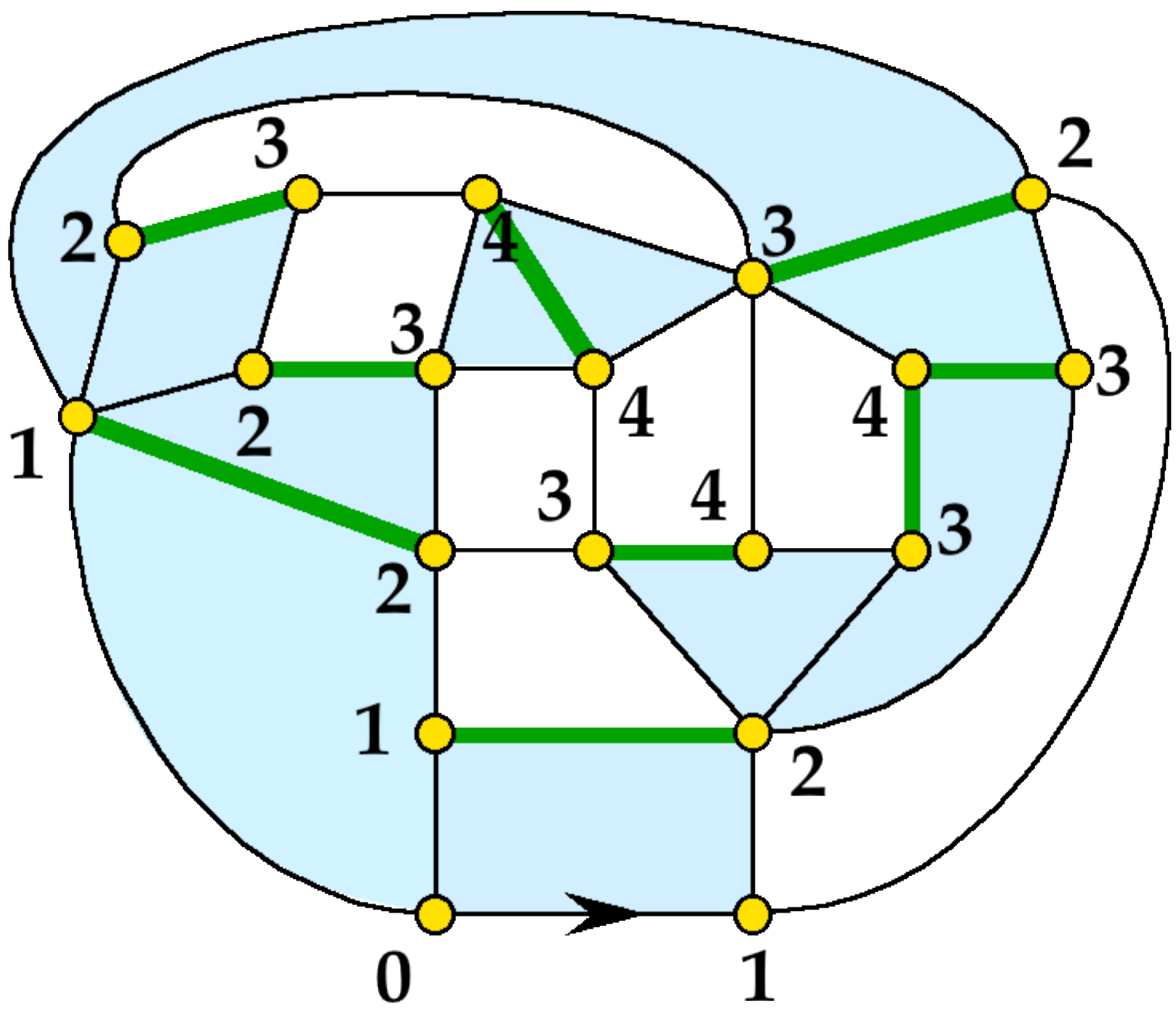

3
2
2
4
3
3
3
2
4
3
1
2
4
4
3
3
4
3
2
1
2
0
1

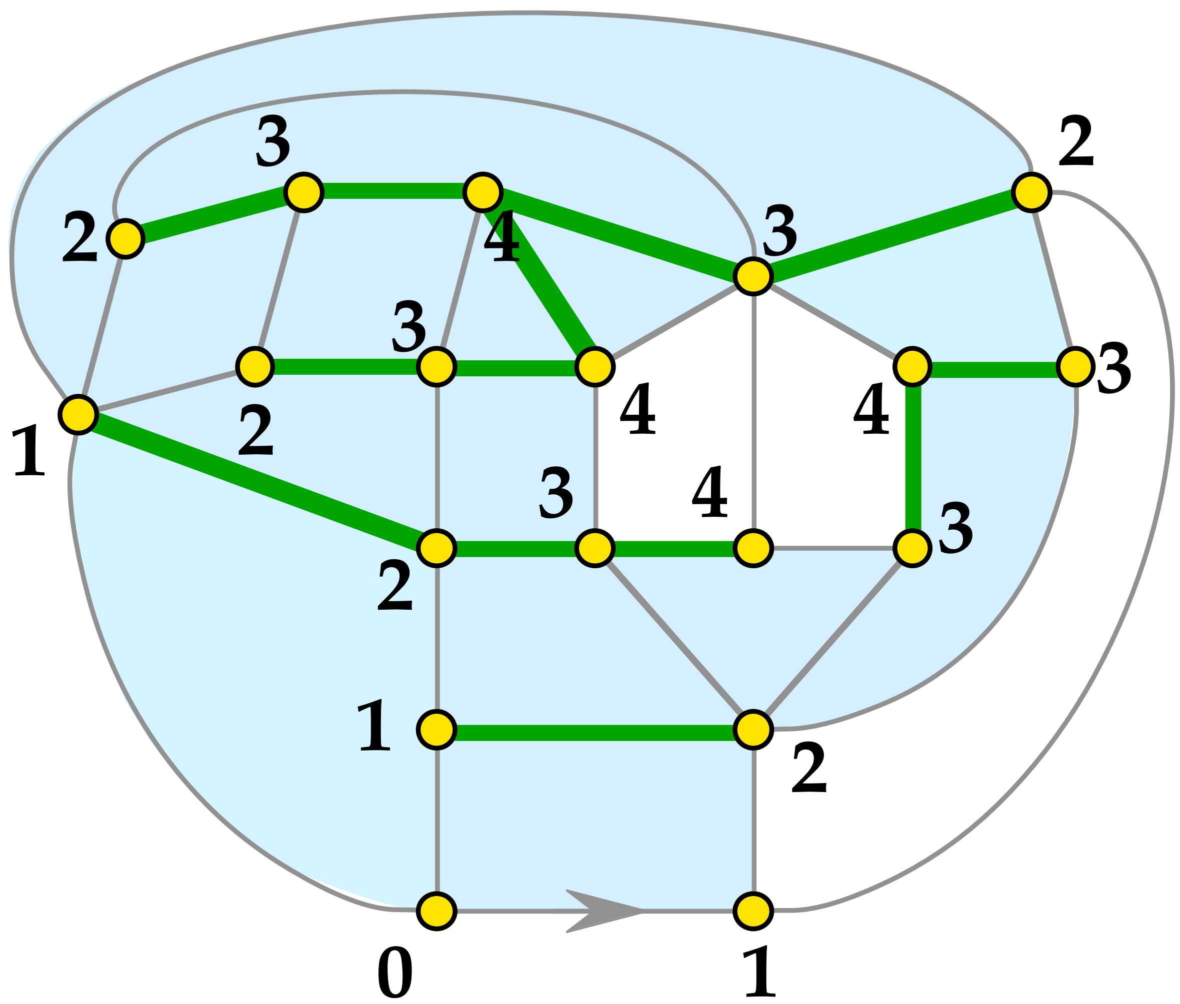


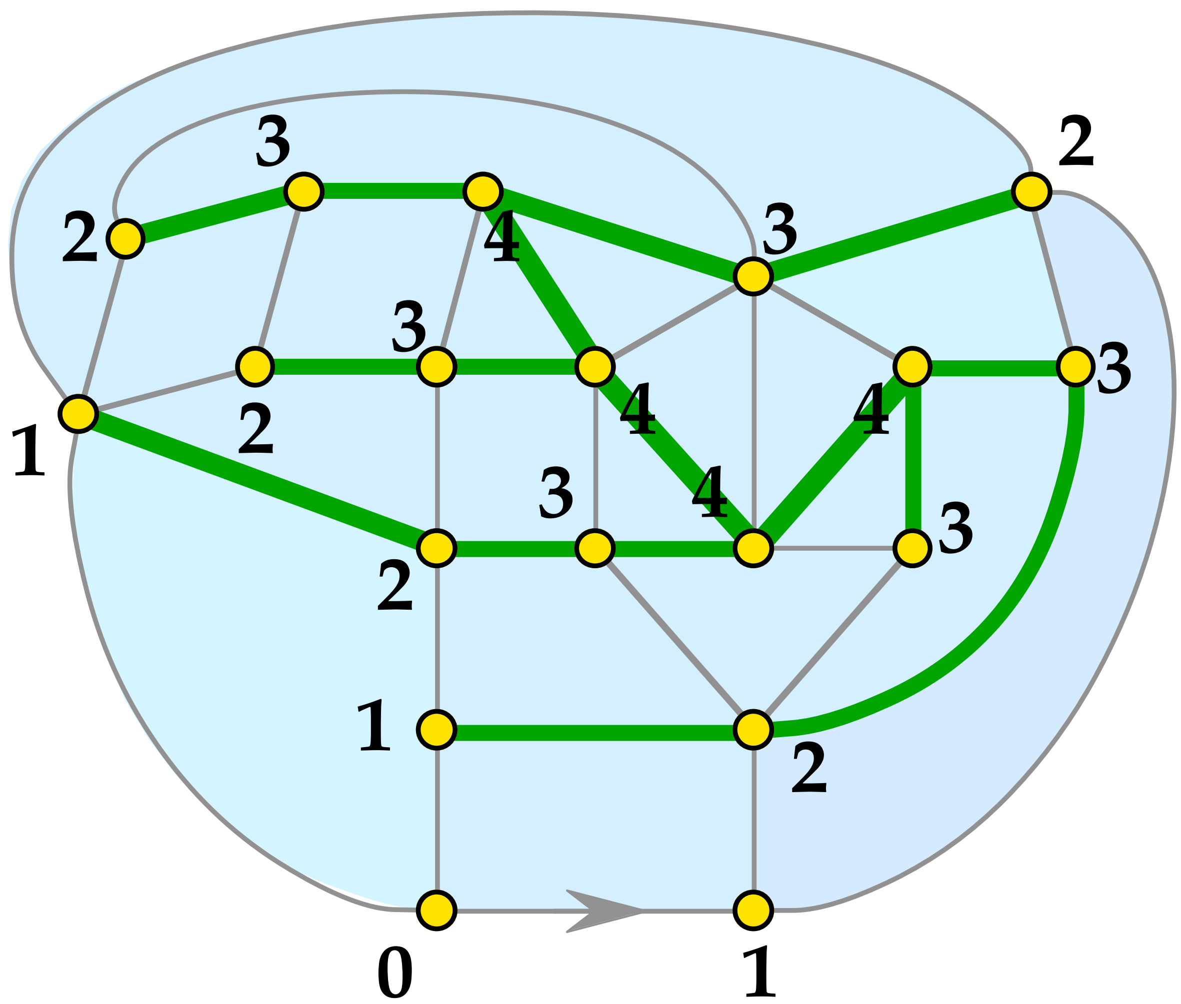
3
2
3
4
2
3
3
3
4
4
1
2
4
3
4
3
2
1
2
0
1

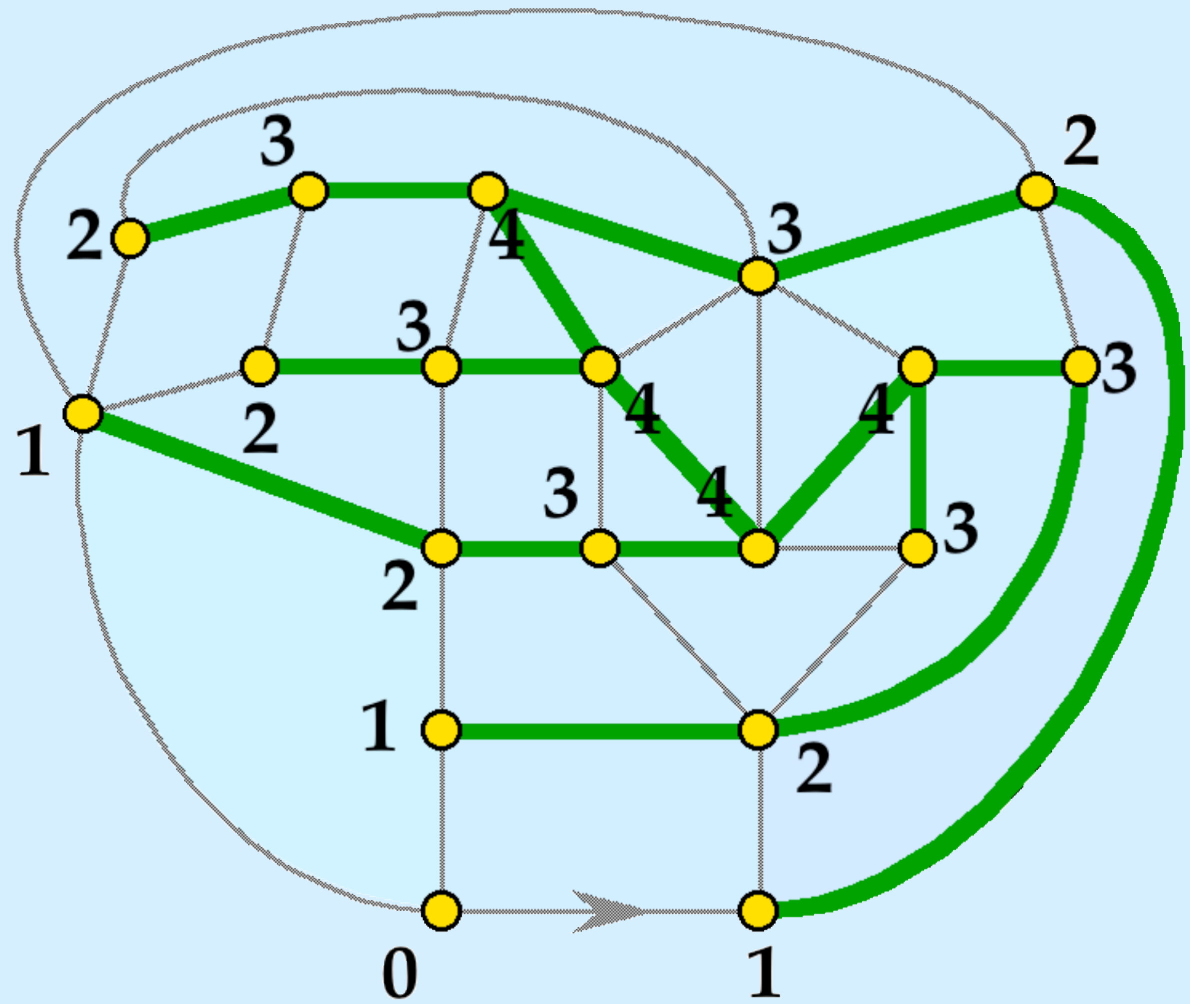


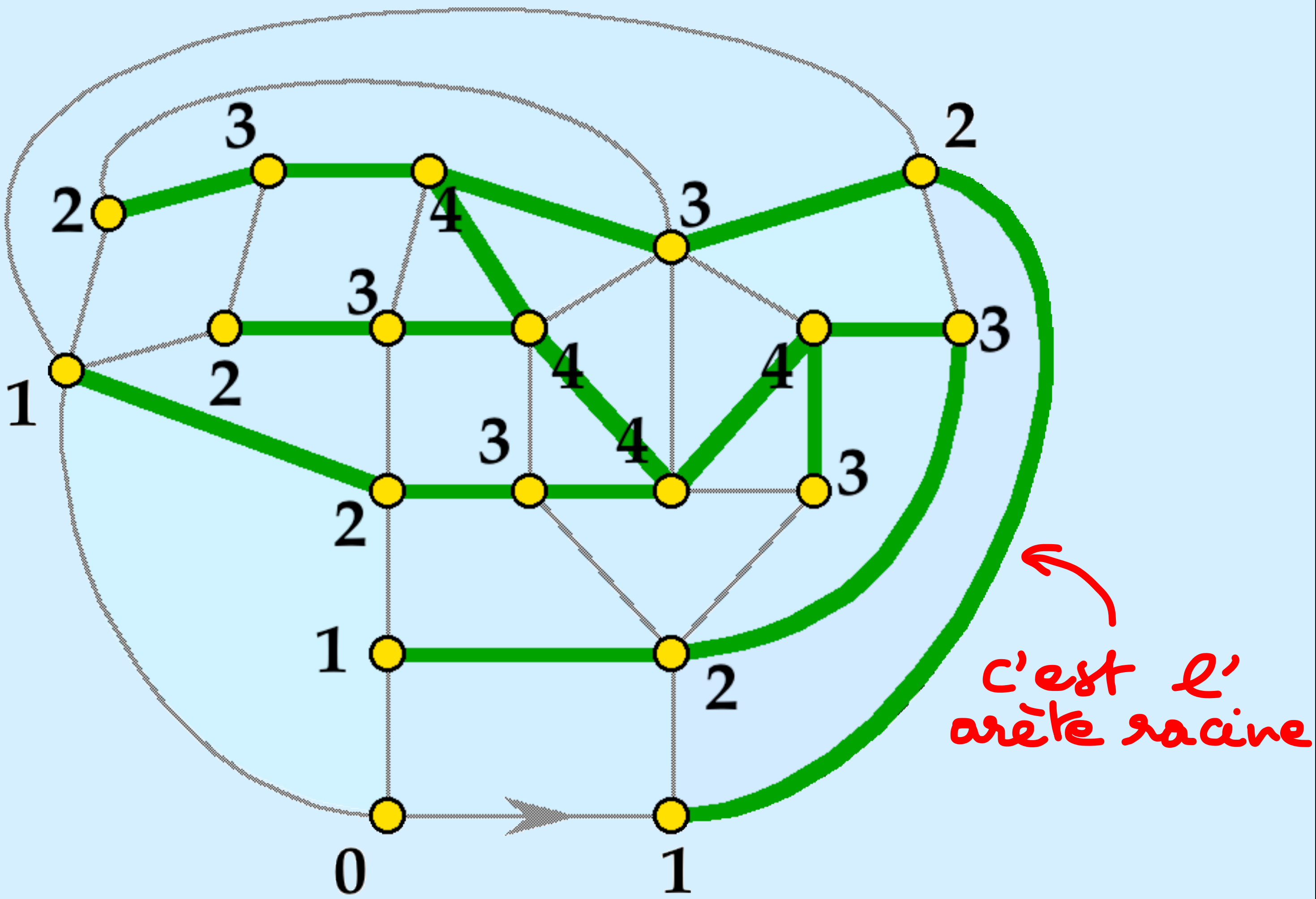
3
2
2
4
3
3
3
2
1
4
4
3
2
4
3
3
2
1
2
0
1


3
2
2
3
4
3
3
4
4
2
1
3
4
3
2
1
2
0
1

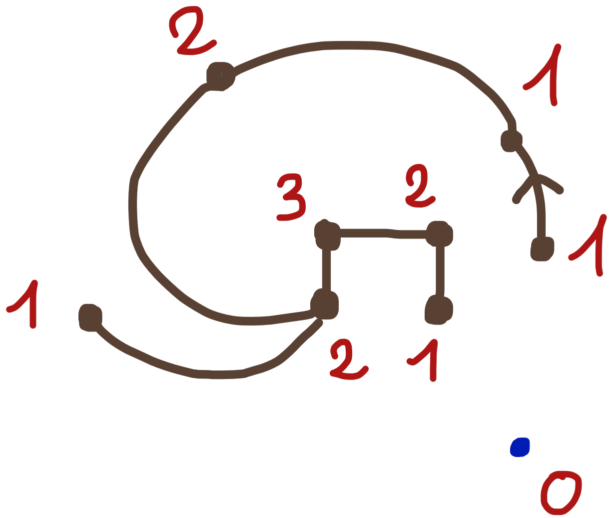

3
2
2
4
3
3
4
2
1
4
4
3
3
4
3
2
2
1
2
0
1


3
2
2
4
3
3
2
4
3
1
2
4
4
3
3
2
1
2
0
1

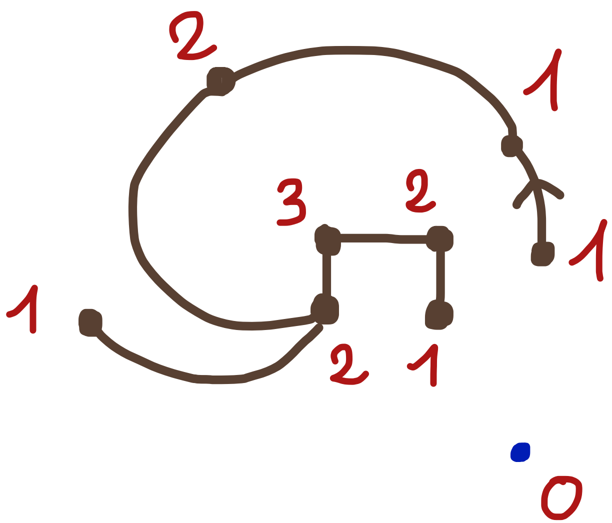

3
2
2
4
3
3
3
2
4
1
4
2
3
4
3
2
1
2
0
1

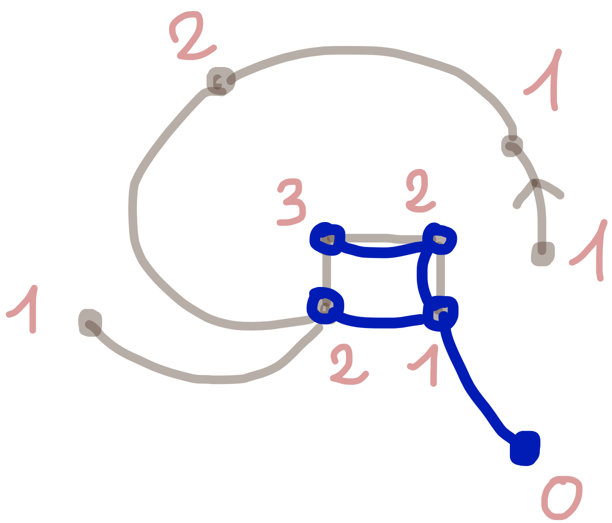

3
2
2
4
3
3
2
4
4
3
1
2
3
4
3
2
1
2
0
1
c'est l'
arête racine

Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

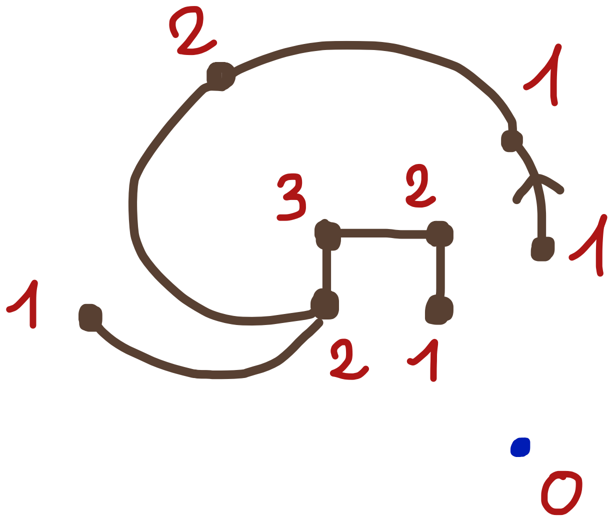


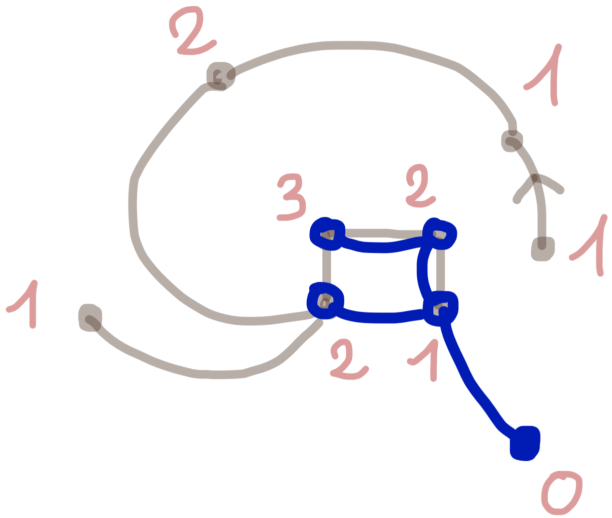
Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

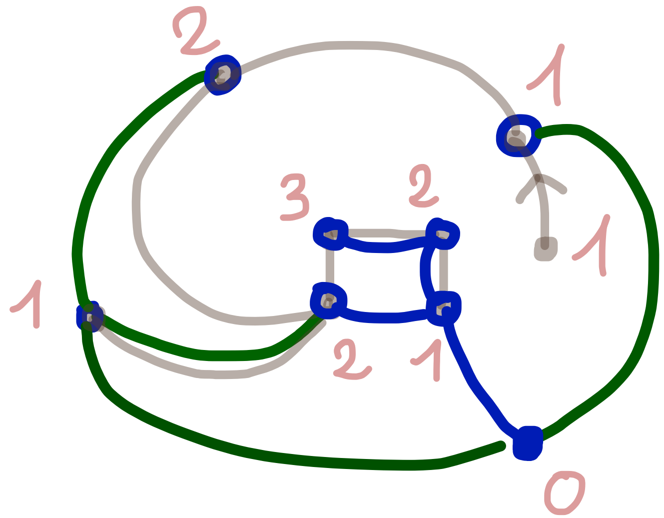




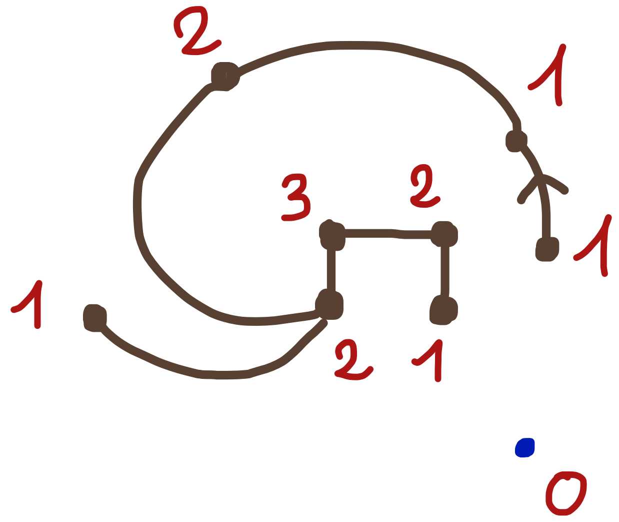
Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

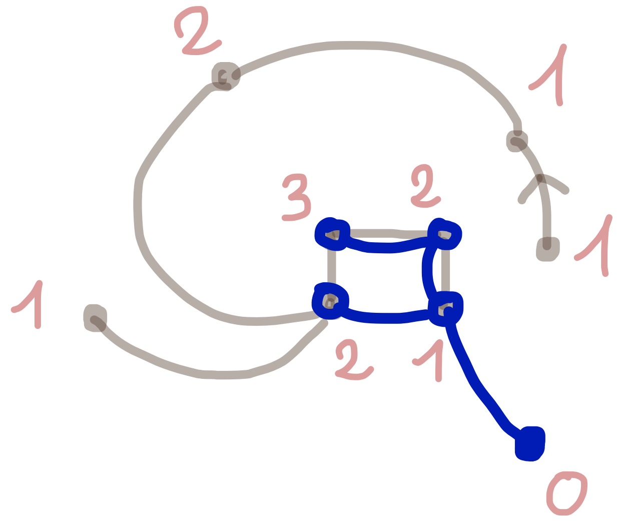


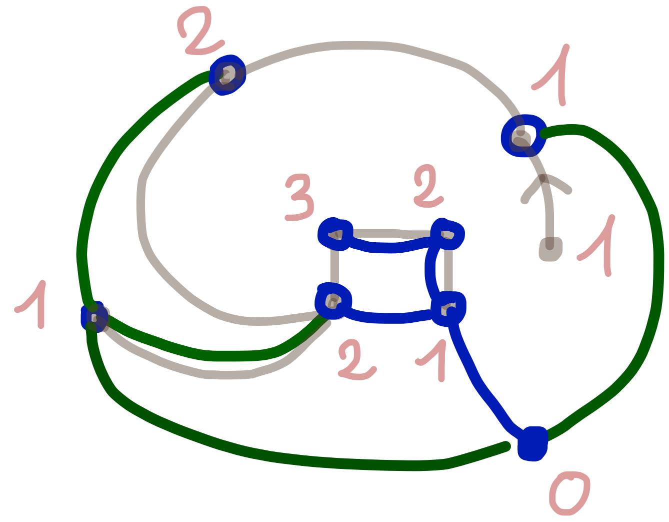


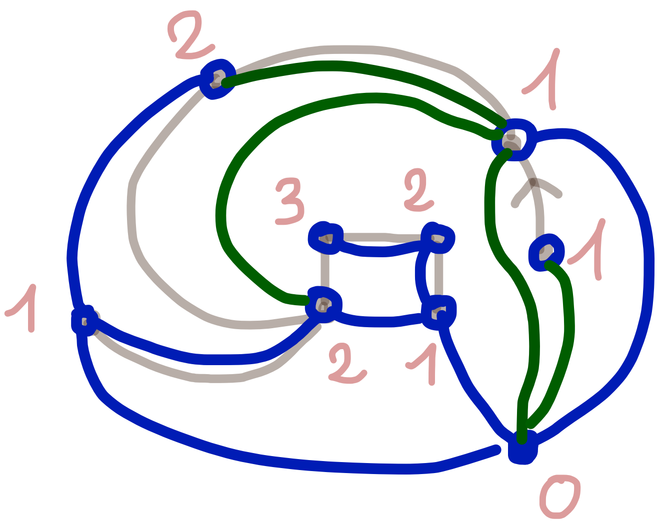


Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

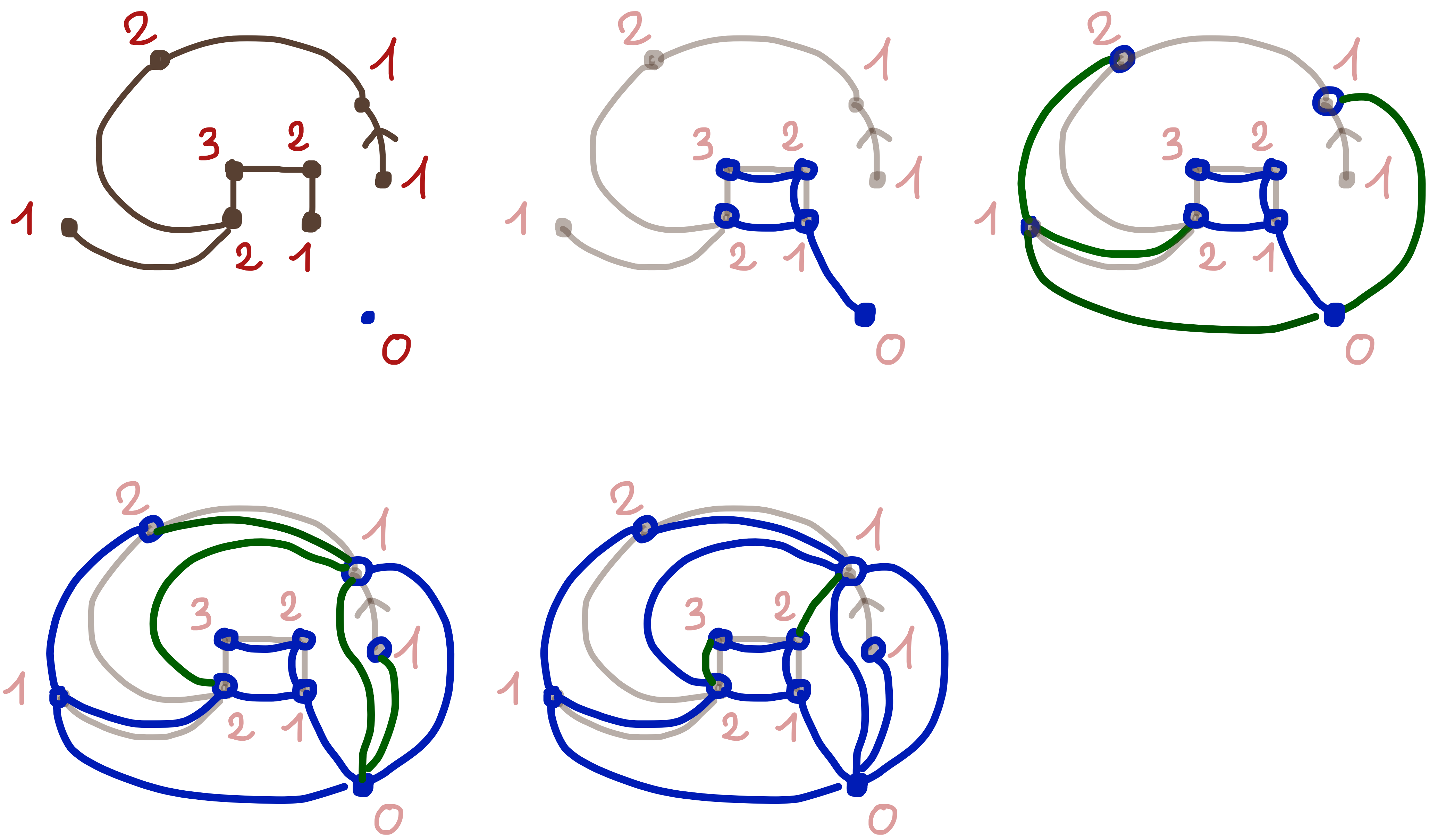






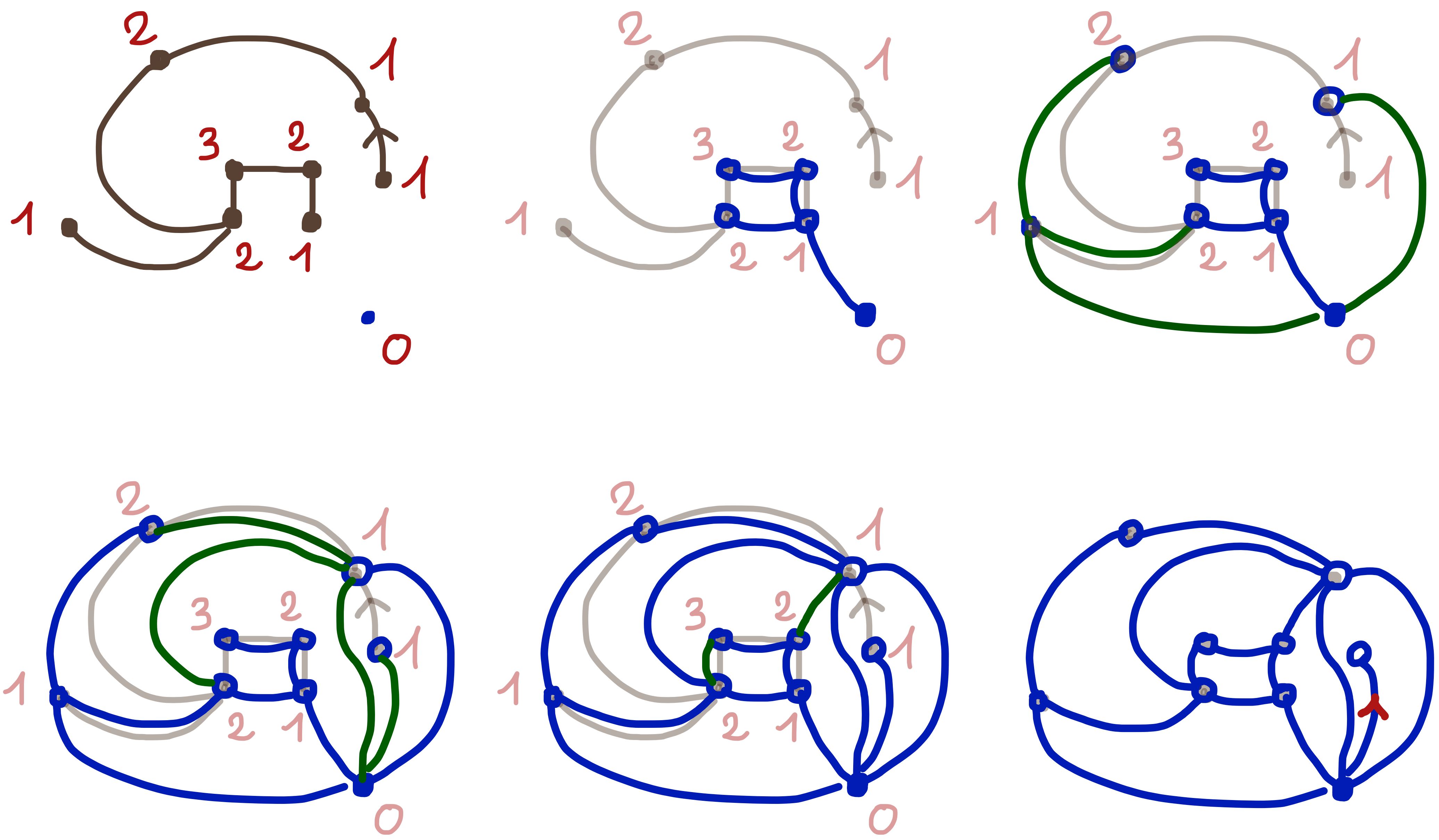


Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy



Asymptotique des cartes aléatoires un aperçu

Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy



 Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Bijections

La bijection de Cori Vauquelin Schaeffer

* permet d'étudier les propriétés topologiques des grandes □ns aléatoires
* loi du diamètre, du profil, etc.
* établit une correspondance entre □ns et marches branchantes
* et ainsi inspire la construction d'un objet limite pour les grandes cartes aléatoires à l'aide du continuum random tree (CRT) et du serpent brownien

 Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Bijection de Cori Vauquelin Schaeffer

$\square^n$ à n sommets $\longleftrightarrow$ {arbre quelconque à $n-1$ sommets,

étiquetage des sommets par des entiers ≥ 1,

écart entre étiquettes voisines $= -1$, 0 ou 1,

étiquette 1 à la racine}

$\updownarrow$

arbre bien étiqueté

= arbre aléatoire avec marche aléatoire

le long des branches

laquelle est conditionnée à rester $\geq$ à 1

 Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Bijection de Cori Vauquelin Schaeffer

$\square^n$ à n sommets $\longleftrightarrow$ {arbre quelconque à $n-1$ sommets,

étiquetage des sommets par des entiers ≥ 1,

écart entre étiquettes voisines $= -1, 0$ ou 1,

étiquette 1 à la racine}

$\updownarrow$

arbre bien étiqueté

= arbre aléatoire avec marche aléatoire

le long des branches

laquelle est conditionnée à rester $\geq$ à 1

Les étiquettes sont les distances des sommets

à la racine, dans la $\square^n$

!!

Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

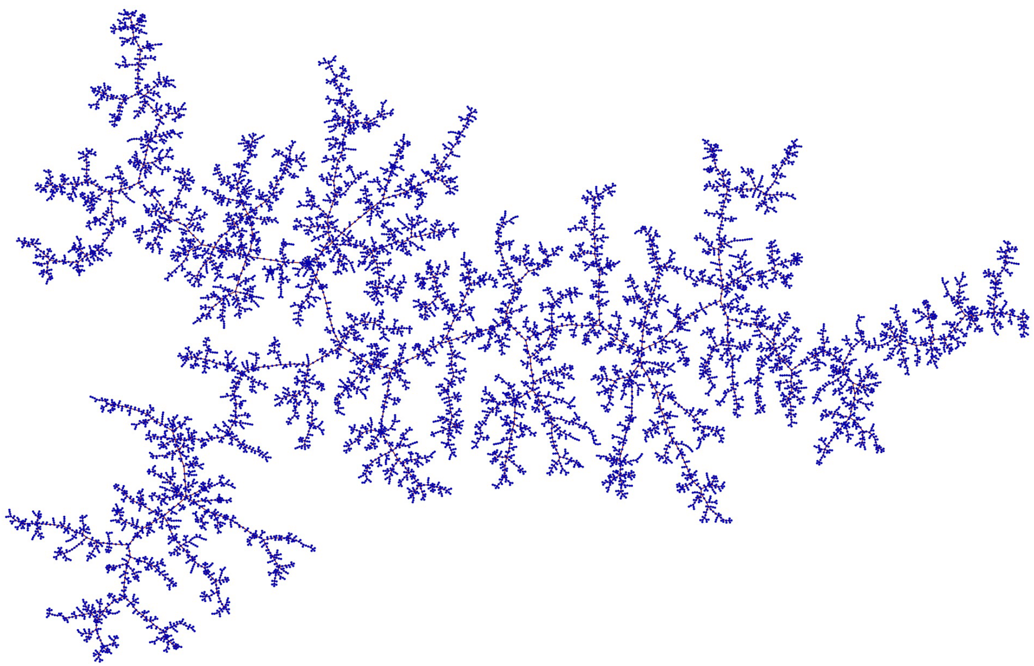
Serpent Brownien

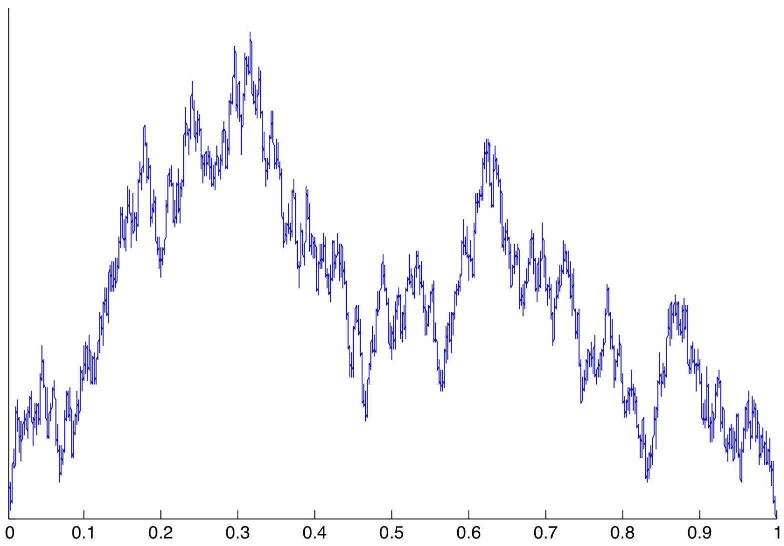
arbre bien étiqueté

= arbre aléatoire avec marche aléatoire le long des branches laquelle est conditionnée à rester ≥ à 1

→ convergence de l'arbre renormalisé par $\times \frac{1}{\sqrt{n}}$ vers le CRT

→ convergence des étiquettes, renormalisées par $1/\sqrt[4]{n}$ vers le serpent Brownien





Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Serpent Brownien

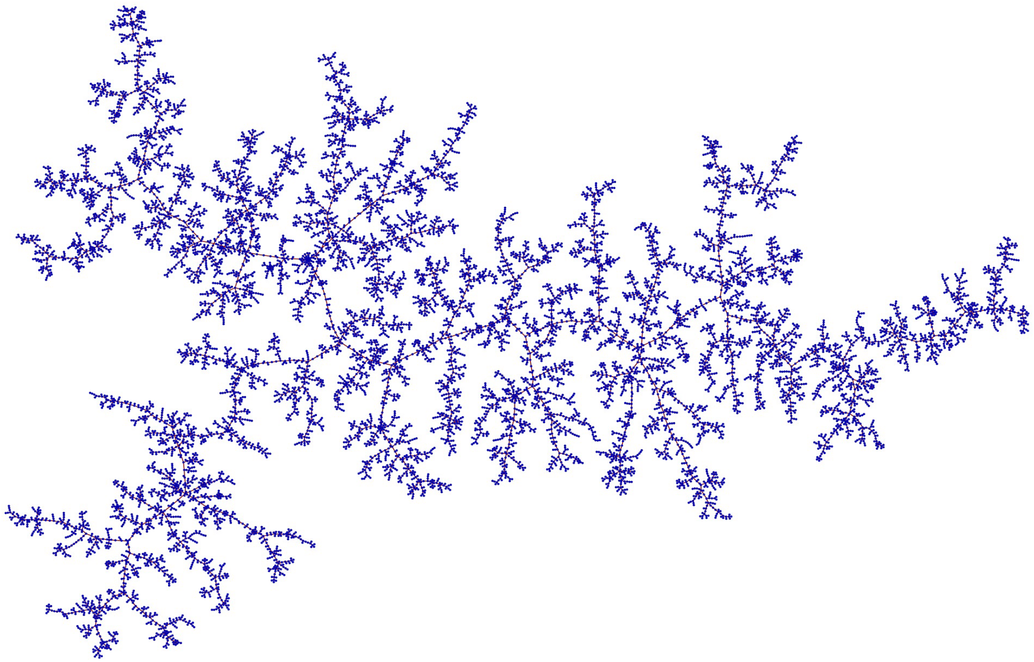
arbre bien étiqueté

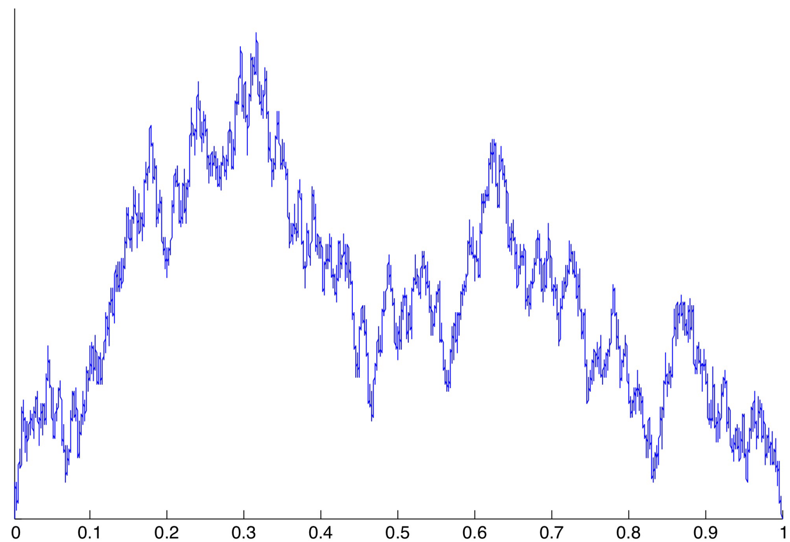
= arbre aléatoire avec marche aléatoire le long des branches laquelle est conditionnée à rester $\geq$ à 1

→ convergence de l'arbre renormalisé par $\times \frac{1}{\sqrt{n}}$ vers le CRT

→ convergence des étiquettes, renormalisées par $1/\sqrt[4]{n}$ vers le serpent Brownien

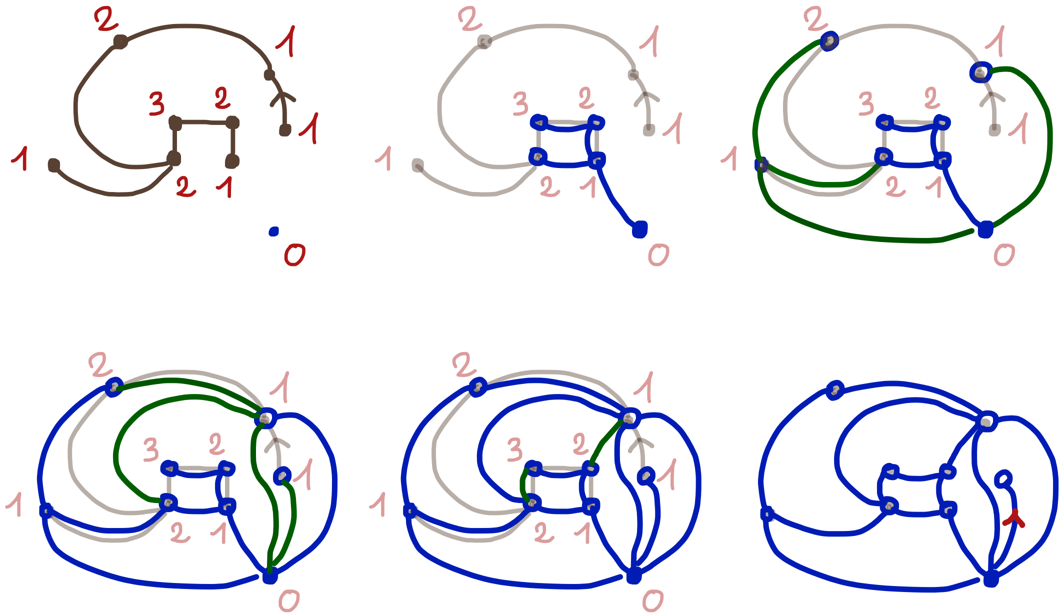
"conditionné"





Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

Brownian Map

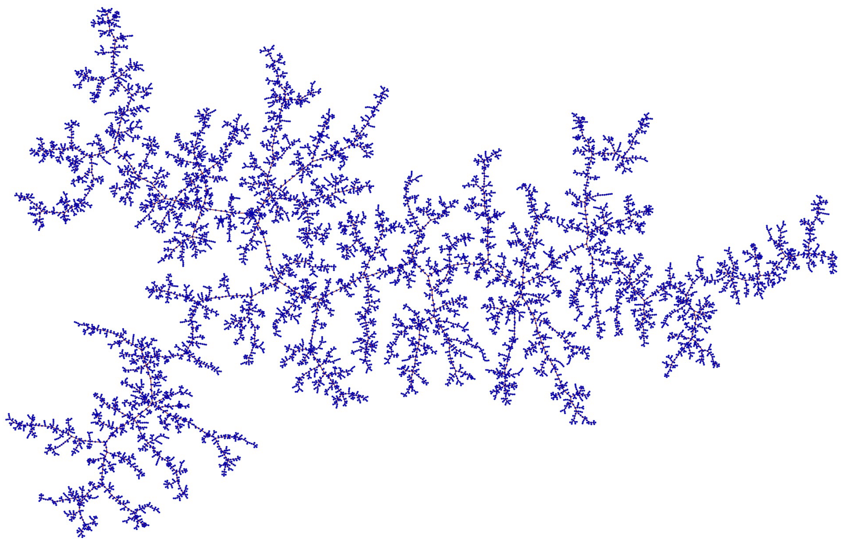


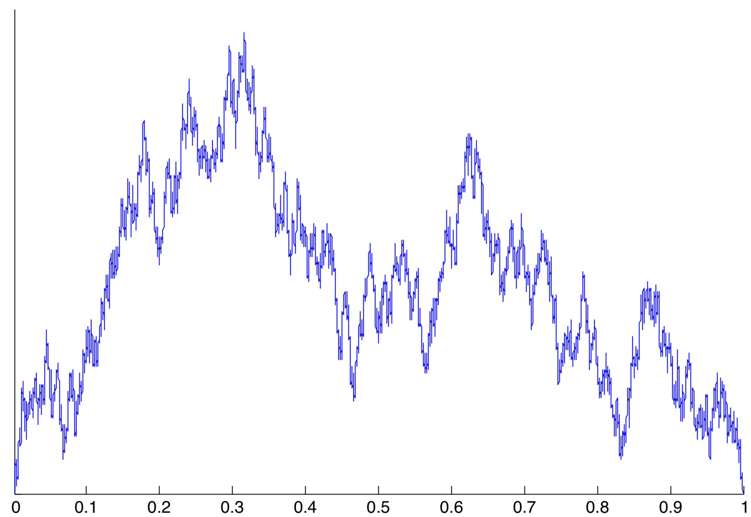
Marckert Mokkadem 2006

Gregory Miermont 2013

JF Le Gall 2013

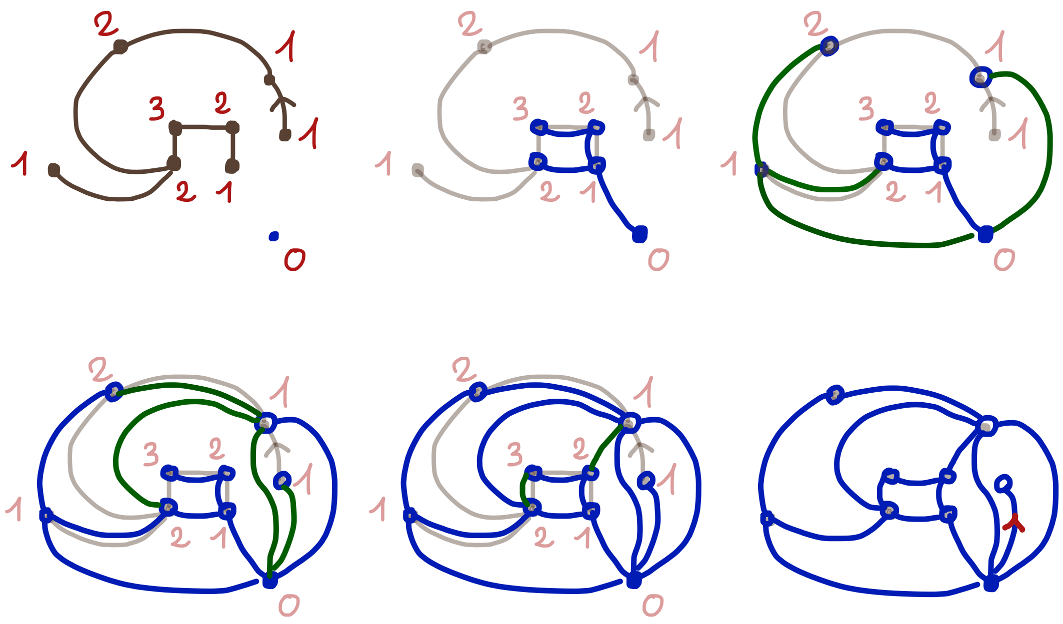
et Céline Abraham





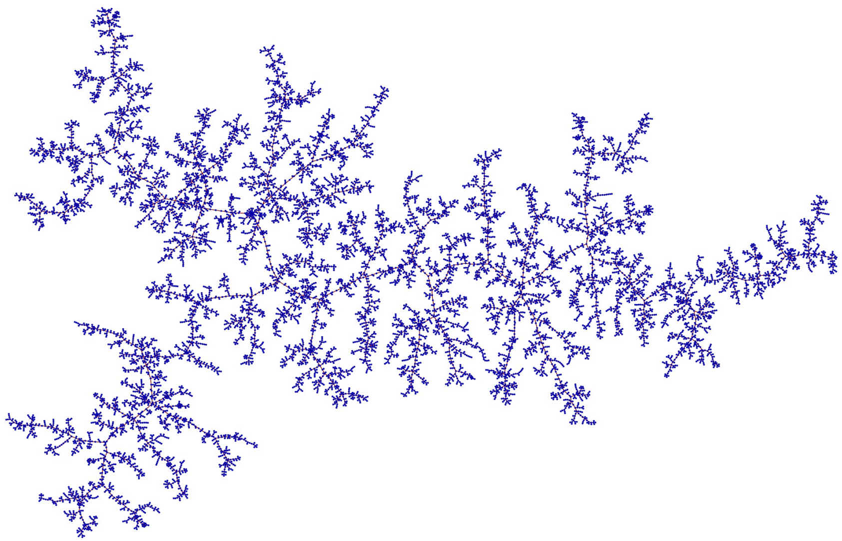
Philippe Chassaing, Inst Élie Cartan, Nancy

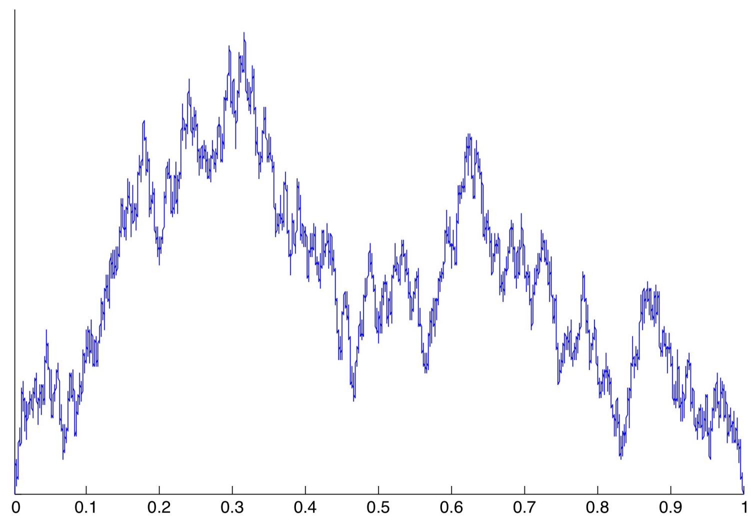
Profil

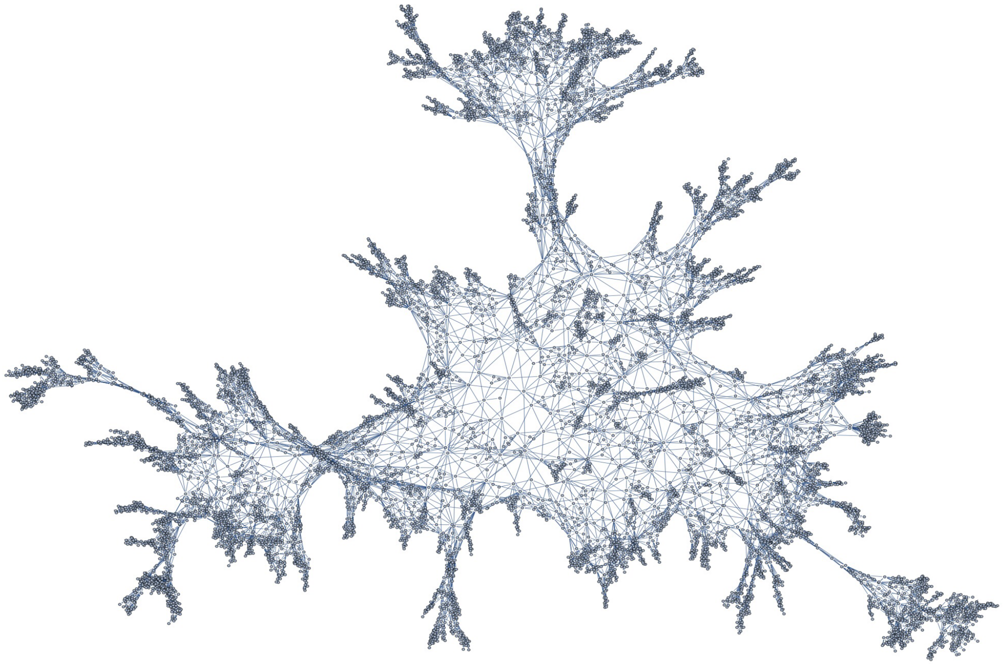


combien de sommets de la carte sont à une distance $\leq c\, n^{1/4}$ de la racine ?

Gwendal Collet







Percolation sur les Δ^{ns} aléatoires et arbraboucles

Igor Kortchemski