Inégalités de transport et concentration de la mesure

Nathaël Gozlan*

*LAMA Université Paris Est – Marne-la-Vallée

Toulouse - Journées MAS
29/08/2014

I. Concentration de la mesure

Isopérimétrie gaussienne

On note γ^d la mesure gaussienne standard sur $\mathbf{R}^d$, muni de sa norme euclidienne notée $|\cdot|$.

Isopérimétrie gaussienne

On note γ^d la mesure gaussienne standard sur $\mathbf{R}^d$, muni de sa norme euclidienne notée $|\cdot|$.

Si $A \subset \mathbf{R}^d$ est un borélien, la mesure du bord de A est par définition

$$\gamma_+^d(\partial A) = \liminf_{r \to 0^+} \frac{\gamma^d(A_r) - \gamma^d(A)}{r},$$

où A_r est un épaissi de A défini par

$$A_r = \{x \in \mathbf{R}^d : \exists y \in A, |x - y| \leq r\}.$$

Isopérimétrie gaussienne

On note γ^d la mesure gaussienne standard sur $\mathbf{R}^d$, muni de sa norme euclidienne notée $|\cdot|$.

Si $A \subset \mathbf{R}^d$ est un borélien, la mesure du bord de A est par définition

$$\gamma_+^d(\partial A) = \liminf_{r \to 0^+} \frac{\gamma^d(A_r) - \gamma^d(A)}{r},$$

où A_r est un épaissi de A défini par

$$A_r = \{x \in \mathbf{R}^d : \exists y \in A, |x - y| \leq r\}.$$

Problème isopérimétrique gaussien : Quels sont les ensembles réalisant le minimum de la mesure de bord à volume gaussien fixé ?

Isopérimétrie gaussienne

On note γ^d la mesure gaussienne standard sur $\mathbf{R}^d$, muni de sa norme euclidienne notée $|\cdot|$.

Si $A \subset \mathbf{R}^d$ est un borélien, la mesure du bord de A est par définition

$$\gamma_+^d(\partial A) = \liminf_{r \to 0^+} \frac{\gamma^d(A_r) - \gamma^d(A)}{r},$$

où A_r est un épaissi de A défini par

$$A_r = \{x \in \mathbf{R}^d : \exists y \in A, |x-y| \leq r\}.$$

Problème isopérimétrique gaussien : Quels sont les ensembles réalisant le minimum de la mesure de bord à volume gaussien fixé ?

Théorème [Sudakov-Tsirel'son '74, Borell '75]

Les demi-espaces sont solutions du problème isopérimétrique gaussien.
Si $A \subset \mathbf{R}^d$ est un borélien et H un demi-espace tel que $\gamma^d(H) = \gamma^d(A)$, alors

$$\gamma_+^d(\partial A) \geq \gamma_+^d(\partial H).$$

Isopérimétrie gaussienne

Si $H=\{x\in\mathbf{R}^d : x_1\leq r\}$, alors $\gamma^d(H)=\Phi(r)$, avec

$$\Phi(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{r}e^{-t^2/2}\,dt,$$

et donc

$$\gamma_+^d(\partial H)=\Phi'(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-r^2/2}.$$

Isopérimétrie gaussienne

Si $H = \{x \in \mathbf{R}^d : x_1 \leq r\}$, alors $\gamma^d(H) = \Phi(r)$, avec

$$\Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r} e^{-t^2/2}\, dt,$$

et donc

$$\gamma_+^d(\partial H) = \Phi'(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-r^2/2}.$$

Corollaire - Isopérimétrie gaussienne

$$\forall a \in (0,1), \quad \forall A \subset \mathbf{R}^d, \qquad \gamma^d(A) = a \quad \Rightarrow \quad \gamma_+^d(\partial A) \geq \Phi' \circ \Phi^{-1}(a).$$

Isopérimétrie gaussienne

Si $H = \{x \in \mathbf{R}^d : x_1 \leq r\}$, alors $\gamma^d(H) = \Phi(r)$, avec

$$\Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r} e^{-t^2/2}\, dt,$$

et donc

$$\gamma_+^d(\partial H) = \Phi'(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-r^2/2}.$$

Corollaire - Isopérimétrie gaussienne

$$\forall a \in (0,1), \quad \forall A \subset \mathbf{R}^d, \qquad \gamma^d(A) = a \quad \Rightarrow \quad \gamma_+^d(\partial A) \geq \Phi' \circ \Phi^{-1}(a).$$

Corollaire - Isopérimétrie gaussienne - forme intégrée

$$\forall A \subset \mathbf{R}^d, \quad \forall r \geq 0, \qquad \gamma^d(A_r) \geq \Phi(r + \Phi^{-1}(\gamma^d(A))).$$

Concentration gaussienne

Si $a = \gamma^d(A) \geq 1/2$, alors

$$\gamma^d(A_r) \geq \Phi(r + \Phi^{-1}(a)) \geq \Phi(r) \geq 1 - \frac{1}{2}e^{-r^2/2}, \qquad \forall r \geq 0.$$

Corollaire - Concentration gaussienne

$$\gamma^d(A_r) \geq 1 - \frac{1}{2}e^{-r^2/2}, \qquad \forall r \geq 0, \quad \forall A \text{ t.q } \gamma^d(A) \geq 1/2.$$

Concentration gaussienne

Si $a = \gamma^d(A) \geq 1/2$, alors

$$\gamma^d(A_r) \geq \Phi(r + \Phi^{-1}(a)) \geq \Phi(r) \geq 1 - \frac{1}{2}e^{-r^2/2}, \qquad \forall r \geq 0.$$

Corollaire - Concentration gaussienne

$$\gamma^d(A_r) \geq 1 - \frac{1}{2}e^{-r^2/2}, \qquad \forall r \geq 0, \quad \forall A \text{ t.q } \gamma^d(A) \geq 1/2.$$

Remarques

- La mesure gaussienne des épaissis tend (uniformément) très rapidement vers 1.

Concentration gaussienne

Si $a = \gamma^d(A) \geq 1/2$, alors

$$\gamma^d(A_r) \geq \Phi(r + \Phi^{-1}(a)) \geq \Phi(r) \geq 1 - \frac{1}{2}e^{-r^2/2}, \qquad \forall r \geq 0.$$

Corollaire - Concentration gaussienne

$$\gamma^d(A_r) \geq 1 - \frac{1}{2}e^{-r^2/2}, \qquad \forall r \geq 0, \quad \forall A \text{ t.q } \gamma^d(A) \geq 1/2.$$

Remarques

- La mesure gaussienne des épaissis tend (uniformément) très rapidement vers 1.
- La dimension de l'espace n'intervient pas.

Concentration de la mesure

Soit μ une mesure de probabilité sur un espace métrique polonais $(\mathcal{X}, d)$ et $\alpha : \mathbf{R}^+ \to [0,1]$ une fonction décroissante.

Definition

- On dit que μ vérifie la propriété de concentration de la mesure avec le profil de concentration α si pour tout $A \subset \mathcal{X}$ avec $\mu(A) \geq 1/2$, on a

$$\mu(A_r) \geq 1 - \alpha(r), \qquad r \geq 0,$$

où

$$A_r = \{x \in \mathcal{X} : d(x, A) \leq r\}, \qquad r \geq 0.$$

Concentration de la mesure

Soit μ une mesure de probabilité sur un espace métrique polonais $(\mathcal{X}, d)$ et $\alpha : \mathbf{R}^+ \to [0,1]$ une fonction décroissante.

Definition

- On dit que μ vérifie la propriété de concentration de la mesure avec le profil de concentration α si pour tout $A \subset \mathcal{X}$ avec $\mu(A) \geq 1/2$, on a

$$\mu(A_r) \geq 1 - \alpha(r), \qquad r \geq 0,$$

  où

$$A_r = \{x \in \mathcal{X} : d(x, A) \leq r\}, \qquad r \geq 0.$$

- On dit que μ satisfait la propriété de concentration de la mesure libre de la dimension avec le profil de concentration α, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la mesure produit $\mu^{\otimes n}$ vérifie la propriété de concentration de la mesure avec le profil α sur $\mathcal{X}^n$ équipé de la distance

$$d_2(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} d^2(x_i, y_i)\right]^{1/2}, \qquad x, y \in \mathcal{X}^n.$$

Exemples

(1) La mesure gaussienne standard γ sur $\mathbf{R}$ vérifie la propriété de concentration libre de la dimension avec le profil

$$\alpha(r) = \overline{\Phi}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_r^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du \leq \frac{1}{2} e^{-r^2/2}, \qquad r \geq 0.$$

Exemples

(1) La mesure gaussienne standard γ sur $\mathbf{R}$ vérifie la propriété de concentration libre de la dimension avec le profil

$$\alpha(r) = \overline{\Phi}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_r^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du \leq \frac{1}{2} e^{-r^2/2}, \qquad r \geq 0.$$

(2) Plus généralement, si $\mu(dx) = e^{-V(x)}\, dx$ est une probabilité sur une variété Riemannienne $\mathcal{X}$ munie de sa distance géodésique vérifiant la condition de Bakry-Emery

$$\mathrm{Hess}\, V + \mathrm{Ric} \geq K \mathrm{Id},$$

avec $K > 0$, alors μ vérifie la propriété de concentration avec un profil de la forme

$$\alpha(r) = e^{-K \frac{[r-r_o]_+^2}{2}}, \qquad r \geq 0.$$

Exemples

(1) La mesure gaussienne standard γ sur $\mathbf{R}$ vérifie la propriété de concentration libre de la dimension avec le profil

$$\alpha(r) = \overline{\Phi}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_r^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du \leq \frac{1}{2} e^{-r^2/2}, \qquad r \geq 0.$$

(2) Plus généralement, si $\mu(dx) = e^{-V(x)}\, dx$ est une probabilité sur une variété Riemannienne $\mathcal{X}$ munie de sa distance géodésique vérifiant la condition de Bakry-Emery

$$\mathrm{Hess}\, V + \mathrm{Ric} \geq K\mathrm{Id},$$

avec $K > 0$, alors μ vérifie la propriété de concentration avec un profil de la forme

$$\alpha(r) = e^{-K\frac{[r-r_o]_+^2}{2}}, \qquad r \geq 0.$$

(3) Pour $p \in [1, 2)$, la mesure de probabilité μ_p définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\mu_p(dx) = \frac{1}{Z_p} e^{-|x|^p/p}\, dx.$$

vérifie la propriété de concentration libre de la dimension avec un profil de la forme

$$\alpha_p(r) = e^{-a_p[r-r_p]_+^p}, \qquad r \geq 0.$$

Une définition alternative

Proposition

Les propositions suivantes sont équivalentes :

Une définition alternative

Proposition

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) μ vérifie la propriété de concentration avec profil α.

Une définition alternative

Proposition

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) μ vérifie la propriété de concentration avec profil α.

(2) Pour toute fonction 1-Lipschitz $f : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$,

$$\mu(f > m_f + r) \leq \alpha(r), \quad \forall r \geq 0,$$

où m_f est une médiane de f sous μ.

Une définition alternative

Proposition

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) μ vérifie la propriété de concentration libre de la dimension avec profil α.

(2) Pour tout $n \geq 1$ et toute fonction 1-Lipschitz $f : \mathcal{X}^n \to \mathbf{R}$,

$$\mu^n(f > m_f + r) \leq \alpha(r), \quad \forall r \geq 0,$$

où m_f est une médiane de f sous μ^n.

Une définition alternative

Proposition

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) μ vérifie la propriété de concentrationlibre de la dimension avec profil α.

(2) Pour tout $n \geq 1$ et toute fonction 1-Lipschitz $f : \mathcal{X}^n \to \mathbf{R}$,

$$\mu^n(f > m_f + r) \leq \alpha(r), \quad \forall r \geq 0,$$

où m_f est une médiane de f sous μ^n.

Remarques

- Quitte à changer $\alpha(r)$ en $\alpha(r - r_o)$, on peut toujours remplacer la médiane par la moyenne dans les inégalités précédentes.

Une définition alternative

Proposition

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) μ vérifie la propriété de concentrationlibre de la dimension avec profil α.

(2) Pour tout $n \geq 1$ et toute fonction 1-Lipschitz $f : \mathcal{X}^n \to \mathbf{R}$,

$$\mu^n(f > m_f + r) \leq \alpha(r), \quad \forall r \geq 0,$$

où m_f est une médiane de f sous μ^n.

Remarques

- Quitte à changer $\alpha(r)$ en $\alpha(r - r_o)$, on peut toujours remplacer la médiane par la moyenne dans les inégalités précédentes.
- L'inégalité

$$\mu^n(|f - m_f| > r) \leq 2\alpha(r), \quad r \geq 0$$

est très souvent utilisée dans les applications.

Un exemple d'application aux matrices aléatoires

Soit $M^n = \frac{1}{\sqrt{n}}[M_{i,j}]_{i,j}$ une suite de matrices aléatoires symétriques de taille $n \times n$ avec $M_{i,j}$ $i \leq j$ i.i.d de loi μ et telle que

$$\mathbb{E}[M_{i,j}] = 0, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[M_{i,j}^2] = 1.$$

Soit $M^n = \frac{1}{\sqrt{n}}[M_{i,j}]_{i,j}$ une suite de matrices aléatoires symétriques de taille $n \times n$ avec $M_{i,j}$ $i \leq j$ i.i.d de loi μ et telle que

$$\mathbb{E}[M_{i,j}] = 0, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[M_{i,j}^2] = 1.$$

Un exemple d'application aux matrices aléatoires

Soit $M^n = \frac{1}{\sqrt{n}}[M_{i,j}]_{i,j}$ une suite de matrices aléatoires symétriques de taille $n \times n$ avec $M_{i,j}$ $i \leq j$ i.i.d de loi μ et telle que

$$\mathbb{E}[M_{i,j}] = 0, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[M_{i,j}^2] = 1.$$

On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \in \mathbf{R}$ les valeurs propres (aléatoires) de M^n.

Un exemple d'application aux matrices aléatoires

Soit $M^n = \frac{1}{\sqrt{n}}[M_{i,j}]_{i,j}$ une suite de matrices aléatoires symétriques de taille $n \times n$ avec $M_{i,j}$ $i \leq j$ i.i.d de loi μ et telle que

$$\mathbb{E}[M_{i,j}] = 0, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[M_{i,j}^2] = 1.$$

On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \in \mathbf{R}$ les valeurs propres (aléatoires) de M^n.

D'après le théorème de Wigner

$$L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i}$$

converge vers la loi du demi cercle $d\sigma(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}\mathbf{1}_{[-2,2]}(x)\,dx$

Un exemple d'application aux matrices aléatoires

Soit $M^n = \frac{1}{\sqrt{n}}[M_{i,j}]_{i,j}$ une suite de matrices aléatoires symétriques de taille $n \times n$ avec $M_{i,j}$ $i \leq j$ i.i.d de loi μ et telle que

$$\mathbb{E}[M_{i,j}] = 0, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[M_{i,j}^2] = 1.$$

On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \in \mathbf{R}$ les valeurs propres (aléatoires) de M^n.

D'après le théorème de Wigner

$$L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_i}$$

converge vers la loi du demi cercle $d\sigma(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\mathbf{1}_{[-2,2]}(x)\,dx$

Autrement dit, pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbf{R}$,

$$\int f\,dL_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \to \int f\,d\sigma, \quad \text{p.s quand } n \to +\infty.$$

Un exemple d'application aux matrices aléatoires

Théorème [Guionnet-Zeitouni '00]

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction 1-Lipschitz et $F_n = \langle f, L_n \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)$.
Si μ satisfait la propriété de concentration libre de la dimension avec un profil de la forme $\alpha(r) = e^{-\frac{1}{c}[r-r_o]^2}$, alors

$$\mathbb{P}(|F_n - m_n| > r) \leq 2e^{-\frac{1}{c}n^2[r-r_o]_+^2}, \qquad \forall n \geq 1, \quad \forall r \geq 0,$$

où m_n est la médiane de F_n.

Remarques

- La médiane m_n peut être remplacée par l'espérance $\mathbb{E}\left[F_n\right]$.
- Pour des fonctions régulières, on peut estimer $|\mathbb{E}[F_n] - \int f \, d\sigma|$.

Théorème [Guionnet-Zeitouni '00]

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction 1-Lipschitz et $F_n = \langle f, L_n \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)$.
Si μ satisfait la propriété de concentration libre de la dimension avec un profil de la forme $\alpha(r) = e^{-\frac{1}{c}[r-r_o]^2}$, alors

$$\mathbb{P}(|F_n - m_n| > r) \leq 2e^{-\frac{1}{c}n^2[r-r_o]_+^2}, \qquad \forall n \geq 1, \quad \forall r \geq 0,$$

où m_n est la médiane de F_n.

Remarques

- La médiane m_n peut être remplacée par l'espérance $\mathbb{E}[F_n]$.
- Pour des fonctions régulières, on peut estimer $|\mathbb{E}[F_n] - \int f \, d\sigma|$.

Preuve.

Une inégalité classique de Hoffmann-Wielandt permet de montrer que F_n est une fonction $1/\sqrt{n}$ -Lipschitz des entrées de la matrice. Il suffit d'appliquer la propriété de concentration pour les fonctions Lipschitz.

Preuve du théorème de Dvoretzky

Théorème [Dvoretzky '61 / Milman '71]

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbf{R}^d$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $H = \mathrm{Vect}\{v_1, \ldots, v_k\}$ un sous espace vectoriel de dimension $[\eta(\varepsilon)\log(d)]$ tel que

$$(1-\varepsilon)|t| \leq \left\| \sum_{i=1}^k t_i v_i \right\| \leq (1+\varepsilon)|t|, \qquad \forall t \in \mathbf{R}^k.$$

Interprétation géométrique : en notant

$$B = \{x \in \mathbf{R}^d : \|x\| \leq 1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \left\{ \sum_{i=1}^k t_i v_i : |t| \leq 1 \right\} \subset H,$$

on a

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\mathcal{E} \subset B \cap H \subset \frac{1}{1-\varepsilon}\mathcal{E}$$

TCL pour les vecteurs aléatoires log-concaves

Une mesure de probabilité μ sur $\mathbf{R}^d$ est dite *log-concave*, si elle admet une densité de la forme e^{-V} avec $V : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ convexe.

Elle est dite *isotrope* si $\int x\, \mu(dx) = 0$ et $\int x_i x_j\, \mu(dx) = \delta_{ij}$.

Théorème [Klartag '07 / Fleury-Guédon-Paouris '07]

Soit X un vecteur aléatoire ayant une loi log-concave et isotrope. Il existe un sous-ensemble Θ de $\mathbb{S}_2^{d-1}$ avec $\sigma_{d-1}(\Theta) \geq 1 - e^{-c\sqrt{d}}$ tel que pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} |\mathbb{P}(X \cdot \theta \leq t) - \Phi(t)| \leq \frac{C}{d^\alpha},$$

où $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2}\, du$ et où $c, C, \alpha > 0$ sont des constantes numériques universelles.

Idée de la preuve

(1) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{|X|^2}{d}-1\right)^2\right] \leq \frac{C}{d^\alpha},$$

$C, \alpha > 0$ constantes universelles.

$\rightsquigarrow$ X est ainsi concentré dans une petite couronne.

Idée de la preuve

(1) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{|X|^2}{d}-1\right)^2\right] \leq \frac{C}{d^\alpha},$$

$C, \alpha > 0$ constantes universelles.

$\rightsquigarrow$ X est ainsi concentré dans une petite couronne.

(2) Utiliser la concentration sur la sphère.
On prend $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction 1-Lipschitz et on pose $F(\theta) = \mathbb{E}[f(X \cdot \theta)]$.

Idée de la preuve

(1) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{|X|^2}{d}-1\right)^2\right] \leq \frac{C}{d^\alpha},$$

$C, \alpha > 0$ constantes universelles.

$\rightsquigarrow$ X est ainsi concentré dans une petite couronne.

(2) Utiliser la concentration sur la sphère.
On prend $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction 1-Lipschitz et on pose $F(\theta) = \mathbb{E}[f(X \cdot \theta)]$.
La fonction F est 1-Lipschitz sur $\mathbb{S}_2^{d-1}$, donc elle est essentiellement égale à sa moyenne (par rapport à σ_{d-1}).

(1) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{|X|^2}{d}-1\right)^2\right] \leq \frac{C}{d^\alpha},$$

$C, \alpha > 0$ constantes universelles.

$\rightsquigarrow$ X est ainsi concentré dans une petite couronne.

(2) Utiliser la concentration sur la sphère.

On prend $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction 1-Lipschitz et on pose $F(\theta) = \mathbb{E}[f(X \cdot \theta)]$. La fonction F est 1-Lipschitz sur $\mathbb{S}_2^{d-1}$, donc elle est essentiellement égale à sa moyenne (par rapport à σ_{d-1}). Pour la plupart des θ, on a donc

$$F(\theta) \simeq \int F(\theta)\, \sigma_{d-1}(d\theta) \qquad \text{(concentration sur la sphère)}$$

Idée de la preuve

(1) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{|X|^2}{d}-1\right)^2\right] \leq \frac{C}{d^\alpha},$$

$C, \alpha > 0$ constantes universelles.

$\rightsquigarrow$ X est ainsi concentré dans une petite couronne.

(2) Utiliser la concentration sur la sphère.
On prend $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction 1-Lipschitz et on pose $F(\theta) = \mathbb{E}[f(X \cdot \theta)]$.
La fonction F est 1-Lipschitz sur $\mathbb{S}_2^{d-1}$, donc elle est essentiellement égale à sa moyenne (par rapport à σ_{d-1}). Pour la plupart des θ, on a donc

$$\begin{aligned} F(\theta) &\simeq \int F(\theta)\,\sigma_{d-1}(d\theta) \qquad \text{(concentration sur la sphère)} \\ &= \mathbb{E}\left[\int f(X\cdot\theta)\,\sigma_{d-1}(d\theta)\right] \end{aligned}$$

Idée de la preuve

(1) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{|X|^2}{d}-1\right)^2\right] \leq \frac{C}{d^\alpha},$$

$C, \alpha > 0$ constantes universelles.

$\rightsquigarrow$ X est ainsi concentré dans une petite couronne.

(2) Utiliser la concentration sur la sphère.
On prend $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction 1-Lipschitz et on pose $F(\theta) = \mathbb{E}[f(X \cdot \theta)]$.
La fonction F est 1-Lipschitz sur $\mathbb{S}_2^{d-1}$, donc elle est essentiellement égale à sa moyenne (par rapport à σ_{d-1}). Pour la plupart des θ, on a donc

$$\begin{aligned} F(\theta) &\simeq \int F(\theta)\,\sigma_{d-1}(d\theta) \qquad \text{(concentration sur la sphère)} \\ &= \mathbb{E}\left[\int f(X \cdot \theta)\,\sigma_{d-1}(d\theta)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int f(|X|\theta_1)\,\sigma_{d-1}(d\theta)\right] \qquad \text{(invariance par rotation)} \end{aligned}$$

Idée de la preuve

(1) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{|X|^2}{d}-1\right)^2\right] \leq \frac{C}{d^\alpha},$$

$C, \alpha > 0$ constantes universelles.

$\rightsquigarrow$ X est ainsi concentré dans une petite couronne.

(2) Utiliser la concentration sur la sphère.
On prend $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction 1-Lipschitz et on pose $F(\theta) = \mathbb{E}[f(X \cdot \theta)]$.
La fonction F est 1-Lipschitz sur $\mathbb{S}_2^{d-1}$, donc elle est essentiellement égale à sa moyenne (par rapport à σ_{d-1}). Pour la plupart des θ, on a donc

$$\begin{aligned}
F(\theta) &\simeq \int F(\theta)\,\sigma_{d-1}(d\theta) && \text{(concentration sur la sphère)}\\
&= \mathbb{E}\left[\int f(X\cdot\theta)\,\sigma_{d-1}(d\theta)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\int f(|X|\theta_1)\,\sigma_{d-1}(d\theta)\right] && \text{(invariance par rotation)}\\
&\simeq \int f(\sqrt{d}\theta_1)\,\sigma_{d-1}(d\theta) && \text{(concentration pour } |X|\text{)}
\end{aligned}$$

Idée de la preuve

(1) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{|X|^2}{d}-1\right)^2\right] \leq \frac{C}{d^\alpha},$$

$C, \alpha > 0$ constantes universelles.

$\leadsto$ X est ainsi concentré dans une petite couronne.

(2) Utiliser la concentration sur la sphère.
On prend $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction 1-Lipschitz et on pose $F(\theta) = \mathbb{E}[f(X \cdot \theta)]$.
La fonction F est 1-Lipschitz sur $\mathbb{S}_2^{d-1}$, donc elle est essentiellement égale à sa moyenne (par rapport à σ_{d-1}). Pour la plupart des θ, on a donc

$$\begin{aligned}
F(\theta) &\simeq \int F(\theta)\, \sigma_{d-1}(d\theta) && \text{(concentration sur la sphère)}\\
&= \mathbb{E}\left[\int f(X\cdot\theta)\, \sigma_{d-1}(d\theta)\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\int f(|X|\theta_1)\, \sigma_{d-1}(d\theta)\right] && \text{(invariance par rotation)}\\
&\simeq \int f(\sqrt{d}\theta_1)\, \sigma_{d-1}(d\theta) && \text{(concentration pour } |X|)\\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-x^2/2}\, dx. && \text{(limite de Poincaré)}
\end{aligned}$$

Commentaires

(1) Le deuxième point est valable pour des vecteurs généraux.
L'idée remonte aux travaux de Sudakov '78, Diaconis et Freedman '84, von Weizsäcker '97, Anttila, Ball et Perissinaki '03, Bobkov '03...

cf les surveys de Klartag '08 et de Guédon '12 sur le sujet.

(2) Le meilleur α connu dans l'inégalité

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{|X|^2}{d}-1\right)^2\right]\leq\frac{C}{d^\alpha},$$

est $\alpha = 2/3$ [Guédon-Milman '11].

Conjecture de la variance : $\alpha = 1$.

II. Approches fonctionnelles du phénomène de concentration de la mesure

De multiples approches

Il existe de nombreuses méthodes permettant d'établir des propriétés de concentration des mesures de probabilité :

- Utilisation d'inégalités géométriques : inégalités de Brunn-Minkowski et Prekopa-Leindler,
- Utilisation d'inégalités fonctionnelles (Log-Sobolev, Poincaré, transport. . .),
- Méthodes entropiques,
- Méthodes de couplage,
- . . .

$\rightsquigarrow$ cf livres de M. Ledoux ou de S. Boucheron, G. Lugosi, P. Massart.

L'inégalité de Talagrand

Coût de transport quadratique

Si ν, μ sont des probabilités sur $\mathcal{X}$,

$$\mathcal{T}_2(\nu, \mu) := \inf_{\pi \in P(\nu,\mu)} \iint_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} d(x,y)^2 \, \pi(dxdy),$$

L'inégalité de Talagrand

Coût de transport quadratique

Si ν, μ sont des probabilités sur $\mathcal{X}$,

$$\mathcal{T}_2(\nu,\mu) := \inf_{\pi \in P(\nu,\mu)} \iint_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} d(x,y)^2\, \pi(dxdy),$$

où $P(\nu,\mu) = \{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{X}\times\mathcal{X})$ telle que $\pi_1 = \nu$ et $\pi_2 = \mu\}$.

Coût de transport quadratique

Si ν, μ sont des probabilités sur $\mathcal{X}$,

$$\mathcal{T}_2(\nu, \mu) := \inf_{\pi \in P(\nu,\mu)} \iint_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} d(x,y)^2 \, \pi(dxdy),$$

où $P(\nu, \mu) = \{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ telle que $\pi_1 = \nu$ et $\pi_2 = \mu\}$.
La distance de Wasserstein est définie par $W_2(\nu, \mu) = \sqrt{\mathcal{T}_2(\nu, \mu)}$.

L'inégalité de Talagrand

Coût de transport quadratique

Si ν, μ sont des probabilités sur $\mathcal{X}$,

$$\mathcal{T}_2(\nu, \mu) := \inf_{\pi \in P(\nu,\mu)} \iint_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} d(x,y)^2\, \pi(dxdy),$$

où $P(\nu, \mu) = \{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ telle que $\pi_1 = \nu$ et $\pi_2 = \mu\}$.
La distance de Wasserstein est définie par $W_2(\nu, \mu) = \sqrt{\mathcal{T}_2(\nu, \mu)}$.

Entropie relative

L'entropie relative de ν par rapport à μ est définie par

$$\mathrm{H}(\nu \,|\, \mu) = \int \log \frac{d\nu}{d\mu}\, d\nu, \text{ si } \nu \ll \mu, \text{ et } +\infty, \text{ sinon.}$$

L'inégalité de Talagrand

Définition

Une probabilité μ sur $\mathcal{X}$ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$, si

$$\mathcal{T}_2(\nu, \mu) \leq C\,\mathrm{H}(\nu \,|\, \mu), \quad \forall \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}).$$

Remarques

- Ce type d'inégalités remonte aux travaux de Csiszar, Kullback, Pinsker.
- Marton '86 est la première à avoir connecté ces inégalités au phénomène de concentration de la mesure.

L'inégalité de Talagrand

Définition

Une probabilité μ sur $\mathcal{X}$ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$, si

$$W_2(\nu, \mu) \leq \sqrt{C\,\mathrm{H}(\nu \,|\, \mu)}, \quad \forall \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}).$$

Remarques

- Ce type d'inégalités remonte aux travaux de Csiszar, Kullback, Pinsker.
- Marton '86 est la première à avoir connecté ces inégalités au phénomène de concentration de la mesure.

L'inégalité de Talagrand

Définition

Une probabilité μ sur $\mathcal{X}$ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$, si

$$W_2(\nu,\mu) \leq \sqrt{C\,\mathrm{H}(\nu\,|\,\mu)}, \quad \forall \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}).$$

Remarques

- Ce type d'inégalités remonte aux travaux de Csiszar, Kullback, Pinsker.
- Marton '86 est la première à avoir connecté ces inégalités au phénomène de concentration de la mesure.

Théorème [Talagrand '96]

La gaussienne standard γ sur $\mathbf{R}$ vérifie $\mathbf{T}_2(2)$.

L'inégalité de Talagrand

Définition

Une probabilité μ sur $\mathcal{X}$ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$, si

$$W_2(\nu, \mu) \leq \sqrt{C\,\mathrm{H}(\nu\,|\,\mu)}, \quad \forall \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}).$$

Remarques

- Ce type d'inégalités remonte aux travaux de Csiszar, Kullback, Pinsker.
- Marton '86 est la première à avoir connecté ces inégalités au phénomène de concentration de la mesure.

Théorème [Talagrand '96]

La gaussienne standard γ sur $\mathbf{R}$ vérifie $\mathbf{T}_2(2)$.

Extensions naturelles :
- espaces de Wiener abstrait (Feyel-Ustünel '04)
- version libre pour la loi du demi-cercle (Biane-Voiculescu '01)

L'argument de Marton

Théorème

Si μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$, alors μ vérifie la propriété de concentration avec le profil

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0,$$

avec $r_o = \sqrt{C\log(2)}$.

Preuve.

On prend $A \subset \mathcal{X}$ tel que $\mu(A) \geq 1/2$ et on pose $B = \mathcal{X} \setminus A^r$, $r > 0$.

L'argument de Marton

Théorème

Si μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$, alors μ vérifie la propriété de concentration avec le profil

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0,$$

avec $r_o = \sqrt{C \log(2)}$.

Preuve.

On prend $A \subset \mathcal{X}$ tel que $\mu(A) \geq 1/2$ et on pose $B = \mathcal{X} \setminus A^r$, $r > 0$.

L'argument de Marton

Théorème

Si μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$, alors μ vérifie la propriété de concentration avec le profil

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0,$$

avec $r_o = \sqrt{C\log(2)}$.

Preuve.

On prend $A \subset \mathcal{X}$ tel que $\mu(A) \geq 1/2$ et on pose $B = \mathcal{X} \setminus A^r$, $r > 0$.
On considère

$$d\mu_A = \frac{\mathbf{1}_A}{\mu(A)}\,d\mu \quad \text{and} \quad d\mu_B = \frac{\mathbf{1}_B}{\mu(B)}\,d\mu.$$

Théorème

Si μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$, alors μ vérifie la propriété de concentration avec le profil

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0,$$

avec $r_o = \sqrt{C\log(2)}$.

Preuve.

On prend $A \subset \mathcal{X}$ tel que $\mu(A) \geq 1/2$ et on pose $B = \mathcal{X} \setminus A^r$, $r > 0$.
On considère

$$d\mu_A = \frac{\mathbf{1}_A}{\mu(A)}\,d\mu \quad \text{and} \quad d\mu_B = \frac{\mathbf{1}_B}{\mu(B)}\,d\mu.$$

$$W_2(\mu_A, \mu_B) \leq W_2(\mu_A, \mu) + W_2(\mu_B, \mu)$$

L'argument de Marton

Théorème

Si μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$, alors μ vérifie la propriété de concentration avec le profil

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0,$$

avec $r_o = \sqrt{C\log(2)}$.

Preuve.

On prend $A \subset \mathcal{X}$ tel que $\mu(A) \geq 1/2$ et on pose $B = \mathcal{X} \setminus A^r$, $r > 0$.
On considère

$$d\mu_A = \frac{\mathbf{1}_A}{\mu(A)}\,d\mu \quad \text{and} \quad d\mu_B = \frac{\mathbf{1}_B}{\mu(B)}\,d\mu.$$

$$\begin{aligned} W_2(\mu_A,\mu_B) &\leq W_2(\mu_A,\mu) + W_2(\mu_B,\mu) \\ &\leq \sqrt{C\,\mathrm{H}(\mu_A \mid \mu)} + \sqrt{C\,\mathrm{H}(\mu_B \mid \mu)} \end{aligned}$$

L'argument de Marton

Théorème

Si μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$, alors μ vérifie la propriété de concentration avec le profil

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0,$$

avec $r_o = \sqrt{C \log(2)}$.

Preuve.

On prend $A \subset \mathcal{X}$ tel que $\mu(A) \geq 1/2$ et on pose $B = \mathcal{X} \setminus A^r$, $r > 0$.
On considère

$$d\mu_A = \frac{\mathbf{1}_A}{\mu(A)}\, d\mu \quad \text{and} \quad d\mu_B = \frac{\mathbf{1}_B}{\mu(B)}\, d\mu.$$

$$\begin{aligned} W_2(\mu_A, \mu_B) &\leq W_2(\mu_A, \mu) + W_2(\mu_B, \mu) \\ &\leq \sqrt{C\, \mathrm{H}(\mu_A \mid \mu)} + \sqrt{C\, \mathrm{H}(\mu_B \mid \mu)} \\ &\leq \sqrt{-C \log(\mu(A))} + \sqrt{-C \log(\mu(B))} \end{aligned}$$

L'argument de Marton

Théorème

Si μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$, alors μ vérifie la propriété de concentration avec le profil

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0,$$

avec $r_o = \sqrt{C \log(2)}$.

Preuve.

On prend $A \subset \mathcal{X}$ tel que $\mu(A) \geq 1/2$ et on pose $B = \mathcal{X} \setminus A^r$, $r > 0$.
On considère

$$d\mu_A = \frac{\mathbf{1}_A}{\mu(A)}\, d\mu \quad \text{and} \quad d\mu_B = \frac{\mathbf{1}_B}{\mu(B)}\, d\mu.$$

$$\begin{aligned} W_2(\mu_A, \mu_B) &\leq W_2(\mu_A, \mu) + W_2(\mu_B, \mu) \\ &\leq \sqrt{C\,\mathrm{H}(\mu_A \mid \mu)} + \sqrt{C\,\mathrm{H}(\mu_B \mid \mu)} \\ &\leq \sqrt{C \log(2)} + \sqrt{-C \log(\mu(B))} \end{aligned}$$

Théorème

Si μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$, alors μ vérifie la propriété de concentration avec le profil

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0,$$

avec $r_o = \sqrt{C\log(2)}$.

Preuve.
On prend $A \subset \mathcal{X}$ tel que $\mu(A) \geq 1/2$ et on pose $B = \mathcal{X} \setminus A^r$, $r > 0$.
On considère

$$d\mu_A = \frac{\mathbf{1}_A}{\mu(A)}\, d\mu \quad \text{and} \quad d\mu_B = \frac{\mathbf{1}_B}{\mu(B)}\, d\mu.$$

$$\begin{aligned} r \leq W_2(\mu_A, \mu_B) &\leq W_2(\mu_A, \mu) + W_2(\mu_B, \mu) \\ &\leq \sqrt{C\,\mathrm{H}(\mu_A \mid \mu)} + \sqrt{C\,\mathrm{H}(\mu_B \mid \mu)} \\ &\leq \sqrt{C\log(2)} + \sqrt{-C\log(\mu(B))} \end{aligned}$$

L'argument de Marton

Théorème

Si μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$, alors μ vérifie la propriété de concentration avec le profil

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0,$$

avec $r_o = \sqrt{C\log(2)}$.

Preuve.

On prend $A \subset \mathcal{X}$ tel que $\mu(A) \geq 1/2$ et on pose $B = \mathcal{X} \setminus A^r$, $r > 0$.
On considère

$$d\mu_A = \frac{\mathbf{1}_A}{\mu(A)}\,d\mu \quad \text{and} \quad d\mu_B = \frac{\mathbf{1}_B}{\mu(B)}\,d\mu.$$

$$\begin{aligned} r \leq W_2(\mu_A,\mu_B) &\leq W_2(\mu_A,\mu) + W_2(\mu_B,\mu) \\ &\leq \sqrt{C\,\mathrm{H}(\mu_A \mid \mu)} + \sqrt{C\,\mathrm{H}(\mu_B \mid \mu)} \\ &\leq \sqrt{C\log(2)} + \sqrt{-C\log(\mu(B))} \end{aligned}$$

Donc

$$\mu(B) \leq \exp\left(-\frac{1}{C}(r-r_o)^2\right), \qquad \forall r \geq r_o = \sqrt{C\log(2)}.$$

$\mathbf{T}_2$ et la concentration libre de la dimension

Théorème

Si μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu^{\otimes n}$ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$ sur $(\mathcal{X}^n, d_2)$.
En particulier, μ vérifie la propriété de concentration libre de la dimension avec le profil

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0, \qquad r_o = \sqrt{C \log(2)}.$$

$\mathbf{T}_2$ et la concentration libre de la dimension

Théorème [G. '09]

Si μ vérifie la concentration gaussienne libre de la dimension avec un profil gaussien de la forme

$$\alpha(r) = \exp\left(-\frac{1}{C}[r - r_o]_+^2\right), \qquad r \geq 0$$

alors μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$.

T_2 et la concentration libre de la dimension

Théorème [G. '09]

Si μ vérifie la concentration gaussienne libre de la dimension avec un profil gaussien de la forme

$$\alpha(r) = \exp\left(-\frac{1}{C}[r - r_o]_+^2\right), \qquad r \geq 0$$

alors μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$.

On a donc l'équivalence suivante :

$$\boxed{\begin{array}{c} \mu \text{ vérifie } \mathbf{T}_2(C) \\ \Updownarrow \\ \exists r_o \geq 0 \text{ t.q. } \mu \text{ vérifie conc. libre de la dimension avec le profil} \\ \alpha(r) = \exp\left(-\frac{1}{C}[r - r_o]_+^2\right) \end{array}}$$

Idée de la preuve

L'idée est d'estimer de deux manières différentes la probabilité d'événement rare suivante

$$\mathbb{P}(W_2(L_n, \mu) > t), \qquad t \geq 0,$$

où $L_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$ et X_i est une suite i.i.d de loi μ.

Idée de la preuve

L'idée est d'estimer de deux manières différentes la probabilité d'événement rare suivante

$$\mathbb{P}(W_2(L_n,\mu) > t), \qquad t \geq 0,$$

où $L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$ et X_i est une suite i.i.d de loi μ.

- Première estimation donnée par la concentration gaussienne :

$$\mathbb{P}(W_2(L_n,\mu) > t) \leq e^{-n\frac{t^2}{C}} \quad \text{(en gros)}$$

Idée de la preuve

L'idée est d'estimer de deux manières différentes la probabilité d'événement rare suivante

$$\mathbb{P}(W_2(L_n,\mu) > t), \qquad t \geq 0,$$

où $L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$ et X_i est une suite i.i.d de loi μ.

- Première estimation donnée par la concentration gaussienne :

$$\mathbb{P}(W_2(L_n,\mu) > t) \leq e^{-n\frac{t^2}{C}} \quad \text{(en gros)}$$

- Deuxième estimation donnée par le théorème de Sanov :

$$-\inf\{\mathrm{H}(\nu|\mu) : W_2(\nu,\mu) > t\} \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(W_2(L_n,\mu) > t)$$

Idée de la preuve

L'idée est d'estimer de deux manières différentes la probabilité d'événement rare suivante

$$\mathbb{P}(W_2(L_n,\mu) > t), \qquad t \geq 0,$$

où $L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$ et X_i est une suite i.i.d de loi μ.

- Première estimation donnée par la concentration gaussienne :

$$\mathbb{P}(W_2(L_n,\mu) > t) \leq e^{-n\frac{t^2}{C}} \quad \text{(en gros)}$$

- Deuxième estimation donnée par le théorème de Sanov :

$$-\inf\{\mathrm{H}(\nu|\mu) : W_2(\nu,\mu) > t\} \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log \mathbb{P}(W_2(L_n,\mu) > t)$$

La comparaison de ces deux estimations donne l'inégalité de Talagrand

$$W_2^2(\nu,\mu) \leq C\,\mathrm{H}(\nu|\mu), \qquad \forall \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}).$$

Critères pour $\mathbf{T}_2$

Théorème [Otto-Villani '00]

Soit μ une probabilité absolument continue sur une variété riemannienne.

- Si μ vérifie l'inégalité de Sobolev logarithmique **LSI**(C)

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq C \int |\nabla f|^2 \, d\mu, \qquad \forall f$$

  alors μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$.

- Si μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$ alors μ vérifie l'inégalité de Poincaré **PI**$(C/2)$:

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \frac{C}{2} \int |\nabla f|^2 \, d\mu, \qquad \forall f.$$

Critères pour $\mathbf{T}_2$

Théorème [Otto-Villani '00]

Soit μ une probabilité absolument continue sur une variété riemannienne.

- Si μ vérifie l'inégalité de Sobolev logarithmique $\mathbf{LSI}(C)$

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq C \int |\nabla f|^2 \, d\mu, \qquad \forall f$$

  alors μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$.

- Si μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$ alors μ vérifie l'inégalité de Poincaré $\mathbf{PI}(C/2)$:

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \frac{C}{2} \int |\nabla f|^2 \, d\mu, \qquad \forall f.$$

En particulier, si $\mu(dx) = e^{-V(x)}\, dx$ vérifie le critère de Bakry-Emery

$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V \geq K,$$

avec $K > 0$, alors elle vérifie $\mathbf{T}_2(1/K)$.

Critères pour $\mathbf{T}_2$

Théorème [Otto-Villani '00]

Soit μ une probabilité absolument continue sur une variété riemannienne.

- Si μ vérifie l'inégalité de Sobolev logarithmique $\mathbf{LSI}(C)$

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leq C \int |\nabla f|^2 \, d\mu, \qquad \forall f$$

alors μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$.

- Si μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$ alors μ vérifie l'inégalité de Poincaré $\mathbf{PI}(C/2)$:

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leq \frac{C}{2} \int |\nabla f|^2 \, d\mu, \qquad \forall f.$$

En particulier, si $\mu(dx) = e^{-V(x)}\, dx$ vérifie le critère de Bakry-Emery

$$\mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\, V \geq K,$$

avec $K > 0$, alors elle vérifie $\mathbf{T}_2(1/K)$.

Remarques :

- **LSI** et $\mathbf{T}_2$ ne sont pas équivalentes (Cattiaux-Guillin '06)
- $\mathbf{T}_2$ est équivalente à une version restreinte de **LSI** (G-Roberto-Samson '10)

CNS pour $\mathbf{T}_2$ en dimension 1

On note μ_1 la mesure exponentielle symétrique :

$$\mu_1(dx) = \frac{1}{2} e^{-|x|}\, dx.$$

CNS pour $\mathbf{T}_2$ en dimension 1

On note μ_1 la mesure exponentielle symétrique :

$$\mu_1(dx) = \frac{1}{2} e^{-|x|}\, dx.$$

Théorème - [G. '12]

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$. Il y a équivalence entre

(1) Il existe $C > 0$ telle que μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$,

(2) Il existe $D, a > 0$ telles que μ vérifie l'inégalité de Poincaré avec la constante D et l'application $T = F_\mu^{-1} \circ F_1$ qui envoie μ_1 sur μ vérifie la condition suivante

$$|T(x) - T(y)| \leq a\left(\sqrt{|x-y|} + 1\right), \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

CNS pour $\mathbf{T}_2$ en dimension 1

On note μ_1 la mesure exponentielle symétrique :

$$\mu_1(dx) = \frac{1}{2} e^{-|x|}\, dx.$$

Théorème - [G. '12]

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$. Il y a équivalence entre

(1) Il existe $C > 0$ telle que μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$,

(2) Il existe $D, a > 0$ telles que μ vérifie l'inégalité de Poincaré avec la constante D et l'application $T = F_\mu^{-1} \circ F_1$ qui envoie μ_1 sur μ vérifie la condition suivante

$$|T(x) - T(y)| \leq a\left(\sqrt{|x-y|} + 1\right), \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

De plus, il existe une constante universelle $\kappa > 1$ telle que

$$\frac{1}{\kappa} \max(D_{\mathrm{opt}}, a_{\mathrm{opt}}^2) \leq C_{\mathrm{opt}} \leq \kappa \max(D_{\mathrm{opt}}, a_{\mathrm{opt}}^2)$$

Critères explicites sur la densité

On peut déduire du théorème précédent le résultat suivant

Corollaire [Cattiaux-Guillin '06]

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$ de la forme $\mu(dx) = e^{-V(x)}\,dx$, avec V paire de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $V''/(V')^2(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Si V vérifie la condition

$$V'(x) \geq \lambda x, \qquad \forall x \geq x_o \geq 0,$$

pour $\lambda > 0$ et $x_o \geq 0$, alors μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$ pour un certain $C > 0$.

Critères explicites sur la densité

On peut déduire du théorème précédent le résultat suivant

Corollaire [Cattiaux-Guillin '06]

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$ de la forme $\mu(dx) = e^{-V(x)}\,dx$, avec V paire de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $V''/(V')^2(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Si V vérifie la condition

$$V'(x) \geq \lambda x, \qquad \forall x \geq x_o \geq 0,$$

pour $\lambda > 0$ et $x_o \geq 0$, alors μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$ pour un certain $C > 0$.

Théorème [Cattiaux-Guillin-Wu '10]

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^d$ de la forme $\mu(dx) = e^{-V(x)}\,dx$, avec V de classe $\mathcal{C}^2$.

Si V vérifie la condition

$$(1-\varepsilon)|\nabla V|^2 - \Delta V \geq \lambda |x|^2, \qquad \forall |x| \geq R,$$

pour $\lambda > 0$, $\varepsilon \in]0,1[$ et $R > 0$, alors μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$ pour un certain $C > 0$.

Poincaré et la concentration libre de la dimension

Théorème [Gromov-Milman '83 / Borovkov-Utev '83 / Aida-Stroock '84 / Bobkov-Ledoux '97]

Soit μ une probabilité sur $\mathbf{R}^d$ (ou sur une variété riemannienne générale).

Si μ satisfait $\mathbf{PI}(C)$, alors μ vérifie la propriété de concentration libre de la dimension avec un profil exponentiel de la forme

$$\alpha(r) = \exp\left(-\frac{a}{\sqrt{C}}[r - r_o]_+\right)$$

où $r_o = \sqrt{C}b$, a, b constantes numériques.

Poincaré et la concentration libre de la dimension

But : Identifier la classe de toutes les mesures de probabilité vérifiant une inégalité de concentration libre de la dimension non triviale.

Poincaré et la concentration libre de la dimension

But : Identifier la classe de toutes les mesures de probabilité vérifiant une inégalité de concentration libre de la dimension non triviale.

Théorème [G.-Roberto-Samson '13]

Si μ satisfait une inégalité de concentration libre de la dimension avec un profil α tel que $\alpha(r) < 1/2$ pour au moins une valeur de $r > 0$, alors μ vérifie $\mathbf{PI}(C)$ avec la constante

$$C = \left(\inf \left\{ \frac{r}{\overline{\Phi}^{-1}(\alpha(r))} : r \text{ t.q. } \alpha(r) < 1/2 \right\} \right)^2,$$

où

$$\overline{\Phi}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_r^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du.$$

Poincaré et la concentration libre de la dimension

But : Identifier la classe de toutes les mesures de probabilité vérifiant une inégalité de concentration libre de la dimension non triviale.

Théorème [G.-Roberto-Samson '13]

Si μ satisfait une inégalité de concentration libre de la dimension avec un profil α tel que $\alpha(r) < 1/2$ pour au moins une valeur de $r > 0$, alors μ vérifie $\mathbf{PI}(C)$ avec la constante

$$C = \left(\inf \left\{ \frac{r}{\overline{\Phi}^{-1}(\alpha(r))} : r \text{ t.q. } \alpha(r) < 1/2 \right\} \right)^2,$$

où

$$\overline{\Phi}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_r^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du.$$

Remarques :

(1) Optimalité pour la gaussienne standard.

(2) Le théorème s'applique même pour un profil élémentaire $\alpha \equiv 1/2$ sur $[0, r_o[$ et $\alpha \equiv \lambda_o \in [0, 1/2[$ sur $[r_o, \infty[$.

Poincaré et la concentration libre de la dimension

But : Identifier la classe de toutes les mesures de probabilité vérifiant une inégalité de concentration libre de la dimension non triviale.

Théorème [G.-Roberto-Samson '13]

Si μ satisfait une inégalité de concentration libre de la dimension avec un profil α tel que $\alpha(r) < 1/2$ pour au moins une valeur de $r > 0$, alors μ vérifie $\mathbf{PI}(C)$ avec la constante

$$C = \left(\inf\left\{\frac{r}{\overline{\Phi}^{-1}(\alpha(r))} : r \text{ t.q. } \alpha(r) < 1/2\right\}\right)^2,$$

où

$$\overline{\Phi}(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_r^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du.$$

Remarques :

(1) Optimalité pour la gaussienne standard.

(2) Le théorème s'applique même pour un profil élémentaire $\alpha \equiv 1/2$ sur $[0, r_o[$ et $\alpha \equiv \lambda_o \in [0, 1/2[$ sur $[r_o, \infty[$.

Preuve. T.C.L + Equations d'Hamilton-Jacobi.

Poincaré et la concentration libre de la dimension

Corollaire

Une probabilité μ vérifie l'inégalité de Poincaré si et seulement si elle vérifie la concentration libre de la dimension avec un profil exponentiel.

Poincaré et la concentration libre de la dimension

Corollaire

Une probabilité μ vérifie l'inégalité de Poincaré si et seulement si elle vérifie la concentration libre de la dimension avec un profil exponentiel.

Question ouverte : Identifier les niveaux de concentration libre de la dimension associés à des profils de la forme

$$\alpha_p(r) = e^{-a[r-r_o]_+^p}, \qquad r \geq 0$$

pour $p \in]1,2[$.

Profil de concentration asymptotique

Si μ est une probabilité sur $\mathbf{R}^d$, on note α_μ son profil de concentration asymptotique :

$$\alpha_\mu(r) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \sup_{A\subset(\mathbf{R}^d)^n : \mu^n(A)\geq 1/2} 1-\mu^n(A_r), \qquad r\geq 0.$$

Profil de concentration asymptotique

Si μ est une probabilité sur $\mathbf{R}^d$, on note α_μ son profil de concentration asymptotique :

$$\alpha_\mu(r) = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \sup_{A \subset (\mathbf{R}^d)^n : \mu^n(A) \geq 1/2} 1 - \mu^n(A_r), \qquad r \geq 0.$$

Théorème

Soit μ une probabilité sur $\mathbf{R}^d$.

(1) Ou bien $\alpha_\mu \equiv 1/2$,
ou bien il existe $a > 0$, $r_o \geq 0$ tels que $\alpha_\mu(r) \leq e^{-a[r-r_o]_+}$.

(2) On suppose $d = 1$ et μ d'espérance m et de variance σ^2.
Ou bien $\mu = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, ou bien $\alpha_\mu(r) > \overline{\Phi}(r/\sigma)$, pour tout $r > 0$.

Profil de concentration asymptotique

Si μ est une probabilité sur $\mathbf{R}^d$, on note α_μ son profil de concentration asymptotique :

$$\alpha_\mu(r) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \sup_{A\subset(\mathbf{R}^d)^n : \mu^n(A)\geq 1/2} 1-\mu^n(A_r), \qquad r\geq 0.$$

Théorème

Soit μ une probabilité sur $\mathbf{R}^d$.

(1) Ou bien $\alpha_\mu \equiv 1/2$,
ou bien il existe $a>0$, $r_o\geq 0$ tels que $\alpha_\mu(r)\leq e^{-a[r-r_o]_+}$.

(2) On suppose $d=1$ et μ d'espérance m et de variance σ^2.
Ou bien $\mu=\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, ou bien $\alpha_\mu(r) > \overline{\Phi}(r/\sigma)$, pour tout $r>0$.

Preuve du (2).
D'après un résultat de Borovkov et Utev '83, à variance fixée la Gaussienne possède la plus petite constante de Poincaré.

PI en tant qu'inégalité de transport

Théorème [Bobkov-Gentil-Ledoux '01]

Une mesure de probabilité μ sur $\mathbf{R}^d$ satisfait $\mathbf{PI}(C)$ pour une certaine constante $C > 0$ si et seulement s'il existe D telle que μ vérifie l'inégalité de transport suivante

$$\mathcal{T}(\nu, \mu) \leq \mathrm{H}(\nu|\mu), \qquad \forall \nu \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d),$$

où

$$\mathcal{T}(\nu, \mu) = \inf \mathbb{E}[\min(D\|X - Y\|; D^2\|X - Y\|^2)]$$

(Le lien entre les constantes C et D est quantitatif.)

Théorème

$$\mathbf{LSI}(C) \Rightarrow \mathbf{T}_2(C) \Rightarrow \mathbf{PI}(C/2)$$

Preuve du théorème d'Otto et Villani par la concentration

Théorème

$$\mathbf{LSI}(C) \Rightarrow \mathbf{T}_2(C) \Rightarrow \mathbf{PI}(C/2)$$

Première preuve par Otto et Villani '00.

Preuve du théorème d'Otto et Villani par la concentration

Théorème

$$\mathbf{LSI}(C) \Rightarrow \mathbf{T}_2(C) \Rightarrow \mathbf{PI}(C/2)$$

Première preuve par Otto et Villani '00.
Deuxième preuve par Bobkov, Gentil et Ledoux '01.

Preuve du théorème d'Otto et Villani par la concentration

Théorème

$$\mathbf{LSI}(C) \Rightarrow \mathbf{T}_2(C) \Rightarrow \mathbf{PI}(C/2)$$

Première preuve par Otto et Villani '00.
Deuxième preuve par Bobkov, Gentil et Ledoux '01.

Preuve.
($\mathbf{LSI} \Rightarrow \mathbf{T}_2$) Si μ vérifie $\mathbf{LSI}(C)$, alors, d'après un argument très classique dû à Herbst, elle vérifie une inégalité de concentration libre de la dimension avec le profil

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0.$$

D'après la caractérisation de l'inégalité $\mathbf{T}_2$, μ vérifie $\mathbf{T}_2(C)$.

Théorème

$$\mathbf{LSI}(C) \Rightarrow \mathbf{T}_2(C) \Rightarrow \mathbf{PI}(C/2)$$

Première preuve par Otto et Villani '00.
Deuxième preuve par Bobkov, Gentil et Ledoux '01.

Preuve.

Théorème

$$\mathbf{LSI}(C) \Rightarrow \mathbf{T}_2(C) \Rightarrow \mathbf{PI}(C/2)$$

Première preuve par Otto et Villani '00.
Deuxième preuve par Bobkov, Gentil et Ledoux '01.

Preuve.
($\mathbf{T}_2 \Rightarrow \mathbf{PI}$) Si μ vérifie $\mathbf{T}_2$, alors d'après l'argument de Marton, elle vérifie la concentration libre de la dimension avec un profil de la forme

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0$$

Preuve du théorème d'Otto et Villani par la concentration

Théorème

$$\mathbf{LSI}(C) \Rightarrow \mathbf{T}_2(C) \Rightarrow \mathbf{PI}(C/2)$$

Première preuve par Otto et Villani '00.
Deuxième preuve par Bobkov, Gentil et Ledoux '01.

Preuve.
($\mathbf{T}_2 \Rightarrow \mathbf{PI}$) Si μ vérifie $\mathbf{T}_2$, alors d'après l'argument de Marton, elle vérifie la concentration libre de la dimension avec un profil de la forme

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0$$

D'après la caractérisation de **PI**, μ vérifie l'inégalité de Poincaré avec une constante D vérifiant

$$\sqrt{D} \leq \inf\left\{ \frac{r}{\overline{\Phi}^{-1}(\alpha(r))} : r > 0 \text{ t.q } \alpha(r) < 1/2 \right\}$$

Preuve du théorème d'Otto et Villani par la concentration

Théorème

$$\mathbf{LSI}(C) \Rightarrow \mathbf{T}_2(C) \Rightarrow \mathbf{PI}(C/2)$$

Première preuve par Otto et Villani '00.
Deuxième preuve par Bobkov, Gentil et Ledoux '01.

Preuve.
($\mathbf{T}_2 \Rightarrow \mathbf{PI}$) Si μ vérifie $\mathbf{T}_2$, alors d'après l'argument de Marton, elle vérifie la concentration libre de la dimension avec un profil de la forme

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0$$

D'après la caractérisation de $\mathbf{PI}$, μ vérifie l'inégalité de Poincaré avec une constante D vérifiant

$$\begin{aligned}\sqrt{D} &\leq \inf\left\{\frac{r}{\overline{\Phi}^{-1}(\alpha(r))} : r > 0 \text{ t.q } \alpha(r) < 1/2\right\}\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{r\to\infty} \frac{r}{\sqrt{-\log \alpha(r)}}\end{aligned}$$

Preuve du théorème d'Otto et Villani par la concentration

Théorème

$$\mathbf{LSI}(C) \Rightarrow \mathbf{T}_2(C) \Rightarrow \mathbf{PI}(C/2)$$

Première preuve par Otto et Villani '00.
Deuxième preuve par Bobkov, Gentil et Ledoux '01.

Preuve.
($\mathbf{T}_2 \Rightarrow \mathbf{PI}$) Si μ vérifie $\mathbf{T}_2$, alors d'après l'argument de Marton, elle vérifie la concentration libre de la dimension avec un profil de la forme

$$\alpha(r) = e^{-\frac{1}{C}[r-r_o]_+^2}, \qquad r \geq 0$$

D'après la caractérisation de **PI**, μ vérifie l'inégalité de Poincaré avec une constante D vérifiant

$$\begin{aligned}\sqrt{D} &\leq \inf\left\{\frac{r}{\overline{\Phi}^{-1}(\alpha(r))} : r > 0 \text{ t.q } \alpha(r) < 1/2\right\}\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{r\to\infty} \frac{r}{\sqrt{-\log\alpha(r)}}\\ &= \sqrt{C/2}\end{aligned}$$

Comparaison formelle avec un résultat d'E. Milman

Théorème [E. Milman '09, '10]

Soit μ une probabilité log-concave sur $\mathbf{R}^d$.

Si μ satisfait l'inégalité de concentration suivante : il existe $r_o > 0$ et $\lambda_o \in [0, 1/2)$ tels que

$$\mu(A_{r_o}) \geq 1 - \lambda_o, \qquad \forall A \subset \mathbf{R}^d, \text{ t.q. } \mu(A) \geq 1/2,$$

alors μ satisfait $\mathbf{PI}(C)$ avec $C = 4\left(\frac{r_o}{1-2\lambda_o}\right)^2$.

Remarque :

"Log-concave" $\leftrightarrow$ "dimension free concentration".

Application : Réduction de la conjecture KLS

Une probabilité μ sur $\mathbf{R}^d$ est dite *log-concave* si elle admet une densité de la forme e^{-V}, avec $V : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ *convexe*.
Elle est dite *isotrope* si sa moyenne est nulle et sa matrice de covariance est Id.

Conjecture [Kannan-Lovasz-Simonovits '95]

Il existe une constante universelle C telle que toute mesure de probabilité log-concave isotrope vérifie $\mathbf{PI}(C)$.

Application : Réduction de la conjecture KLS

Une probabilité μ sur $\mathbf{R}^d$ est dite *log-concave* si elle admet une densité de la forme e^{-V}, avec $V : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ *convexe*.
Elle est dite *isotrope* si sa moyenne est nulle et sa matrice de covariance est Id.

Conjecture [Kannan-Lovasz-Simonovits '95]

Il existe une constante universelle C telle que toute mesure de probabilité log-concave isotrope vérifie $\mathbf{PI}(C)$.

Théorème [E. Milman]

La conjecture K.L.S. est équivalente à la proposition suivante :

Il existe $r_o > 0$ et $\lambda_o \in [0, 1/2)$ tels que pour tout entier d, toute mesure de probabilité μ isotrope et log-concave sur $\mathbf{R}^d$ satisfait

$$\mu(A_{r_o}) \geq 1 - \lambda_o, \qquad \forall A \subset \mathbf{R}^d \text{ t.q. } \mu(A) \geq 1/2.$$

Application : Réduction de la conjecture KLS

Une probabilité μ sur $\mathbf{R}^d$ est dite *log-concave* si elle admet une densité de la forme e^{-V}, avec $V : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ *convexe*.
Elle est dite *isotrope* si sa moyenne est nulle et sa matrice de covariance est Id.

Conjecture [Kannan-Lovasz-Simonovits '95]

Il existe une constante universelle C telle que toute mesure de probabilité log-concave isotrope vérifie $\mathbf{PI}(C)$.

Théorème [E. Milman]

La conjecture K.L.S. est équivalente à la proposition suivante :

Il existe $r_o > 0$ et $\lambda_o \in [0, 1/2)$ tels que pour tout entier d, toute mesure de probabilité μ isotrope et log-concave sur $\mathbf{R}^d$ satisfait

$$\mu(A_{r_o}) \geq 1 - \lambda_o, \qquad \forall A \subset \mathbf{R}^d \text{ t.q. } \mu(A) \geq 1/2.$$

Preuve alternative.
Ce résultat découle immédiatement de la caractérisation de l'inégalité de Poincaré. En effet, la classe des probabilités isotropes et log-concaves est stable par produit.

Application : Réduction de la conjecture KLS

Une probabilité μ sur $\mathbf{R}^d$ est dite *log-concave* si elle admet une densité de la forme e^{-V}, avec $V : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ *convexe*.
Elle est dite *isotrope* si sa moyenne est nulle et sa matrice de covariance est Id.

Conjecture [Kannan-Lovasz-Simonovits '95]

Il existe une constante universelle C telle que toute mesure de probabilité log-concave isotrope vérifie $\mathbf{PI}(C)$.

Théorème [E. Milman]

La conjecture K.L.S. est équivalente à la proposition suivante :

Il existe $r_o > 0$ et $\lambda_o \in [0, 1/2)$ tels que pour tout entier d, toute mesure de probabilité μ isotrope et log-concave sur $\mathbf{R}^d$ satisfait pour tout n

$$\mu^n(A_{r_o}) \geq 1 - \lambda_o, \qquad \forall A \subset (\mathbf{R}^d)^n \text{ t.q. } \mu^n(A) \geq 1/2.$$

Preuve alternative.
Ce résultat découle immédiatement de la caractérisation de l'inégalité de Poincaré. En effet, la classe des probabilités isotropes et log-concaves est stable par produit.

Commentaires sur la conjecture KLS

Conjecture KLS

Il existe $c > 0$ telle que tout vecteur aléatoire log-concave isotrope X vérifie

$$\mathrm{Var}(f(X)) \leq c\mathbb{E}[\|\nabla f(X)\|^2], \qquad \forall f.$$

Conjecture KLS

Il existe $c > 0$ telle que tout vecteur aléatoire log-concave isotrope X vérifie

$$\mathrm{Var}(f(X)) \leq c\mathbb{E}[\|\nabla f(X)\|^2], \qquad \forall f.$$

En prenant $f(x) = \|x\|^2$, on voit que la conjecture KLS entraîne la conjecture de la variance

Commentaires sur la conjecture KLS

Conjecture KLS

Il existe $c > 0$ telle que tout vecteur aléatoire log-concave isotrope X vérifie

$$\mathrm{Var}(f(X)) \leq c\mathbb{E}[\|\nabla f(X)\|^2], \qquad \forall f.$$

En prenant $f(x) = \|x\|^2$, on voit que la conjecture KLS entraîne la conjecture de la variance

Conjecture de la variance

Il existe une constante $c > 0$ telle que tout vecteur aléatoire X log-concave isotrope à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ vérifie

$$\mathrm{Var}(\|X\|^2) \leq cd.$$

Commentaires sur la conjecture KLS

Klartag '09 La conjecture de la variance est vraie pour les vecteurs log-concaves isotropes inconditionnels. Preuve alternative de Barthe-Cordero '13.

Guédon-Milman '11 Pour tout vecteur log-concave isotrope X,

$$\mathrm{Var}(\|X\|^2) \leq cd^{4/3}.$$

Eldan '13 Si la conjecture de la variance est vraie alors la conjecture KLS est vraie à un facteur $\log d$ près.

Commentaires sur la conjecture KLS

Klartag '09 La conjecture de la variance est vraie pour les vecteurs log-concaves isotropes inconditionnels. Preuve alternative de Barthe-Cordero '13.

Guédon-Milman '11 Pour tout vecteur log-concave isotrope X,

$$\mathrm{Var}(\|X\|^2) \leq c d^{4/3}.$$

Eldan '13 Si la conjecture de la variance est vraie alors la conjecture KLS est vraie à un facteur $\log d$ près.

Théorème [Cordero-G. '14]

Il existe une constante universelle c telle que tout vecteur log-concave X à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ vérifie

$$\mathrm{Var}(|\overline{X}|^2) \leq c \sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}[X_i^2]^2,$$

où $\overline{X}$ est défini par $\overline{X}_i = X_i - \mathbb{E}[X_i | X_1, \ldots, X_{i-1}]$.

Références