Dessiner des boucles aléatoires : une exploration stochastique de la géométrie des réseaux planaires et des surfaces.

Adrien Kassel (ETH Zurich)

Journées MAS de la SMAI, Toulouse, 27 août 2014

Plan de l'exposé

Cadre : Probabilités et physique statistique – un peu de géométrie et combinatoire

But :

I. Marche aléatoire à boucles effacées sur un réseau
II. Forêts couvrantes d'unicycles
III. Mesure sur les boucles d'une surface de Riemann

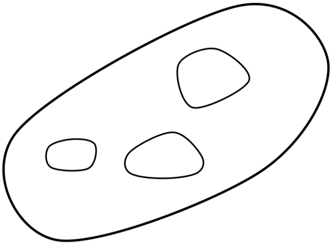
Fil d'Ariane : Les boucles, que l'on dessine puis efface

Pour fixer les idées

Pour la durée de l'exposé, choisissons,

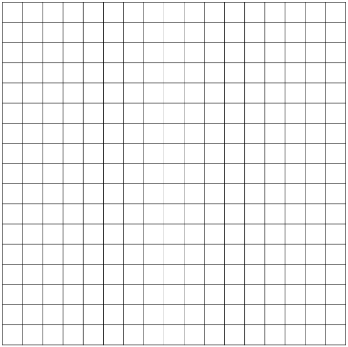
Pour fixer les idées

un domaine borné dans le plan,



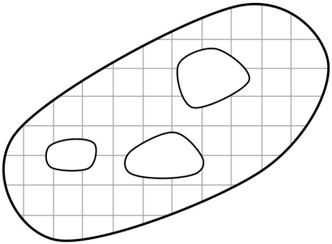
Pour fixer les idées

un réseau,



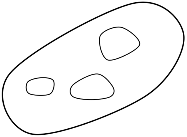
Pour fixer les idées

et un plongement de ce réseau dans le domaine avec un maillage très fin.



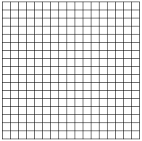
Pour fixer les idées

Pour tout l'exposé, on a donc fixé, un domaine borné du plan,

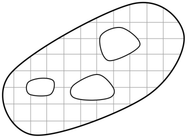


,

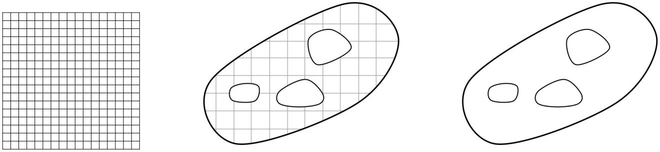
un réseau,



et un plongement du réseau dans ce domaine avec un maillage (supposé) très fin.



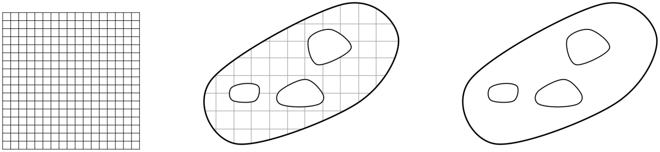
Plan de l'exposé



I. **Discret** : On se place à l'échelle microscopique : on ne voit que le réseau, infini, plongé dans le plan entier. C'est là qu'on étudie la marche aléatoire à boucles effacées.

III. **Continu** : On regarde la surface et on oublie la structure microscopique. C'est là qu'on définit la mesure sur les boucles.

Plan de l'exposé



I. **Discret** : On se place à l'échelle microscopique : on ne voit que le réseau, infini, plongé dans le plan entier. C'est là qu'on étudie la marche aléatoire à boucles effacées.

II. Pour passer de I. à III. on utilise le plongement et l'approximation discrète et finie. C'est là qu'on introduit les forêts couvrantes d'unicycles.

III. **Continu** : On regarde la surface et on oublie la structure microscopique. C'est là qu'on définit la mesure sur les boucles.

I. Marche aléatoire à boucles effacées

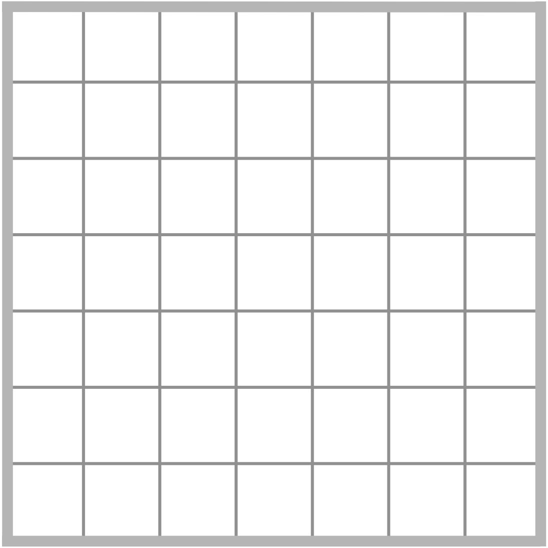
Explorer un réseau au hasard

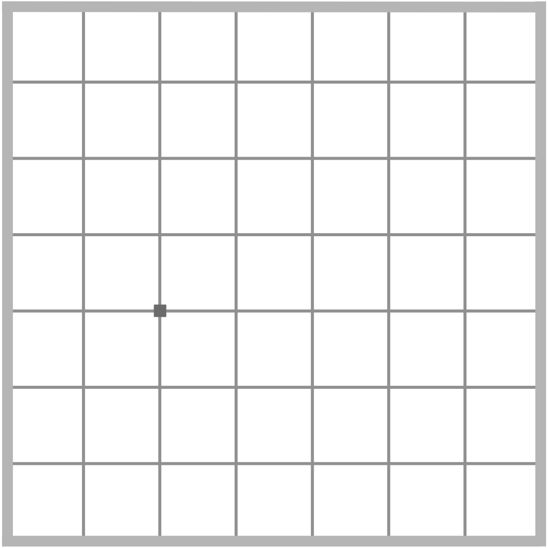
- Marche aléatoire. Critère de Rayleigh : la marche aléatoire est récurrente si et seulement si la résistance équivalente est infinie :

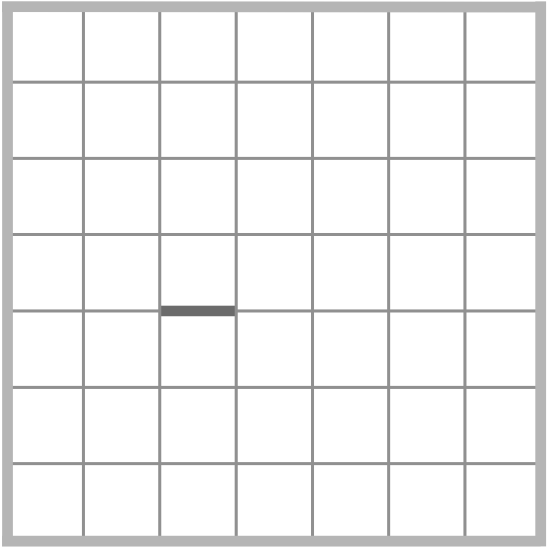
$$R^{eq} = \infty \, .$$

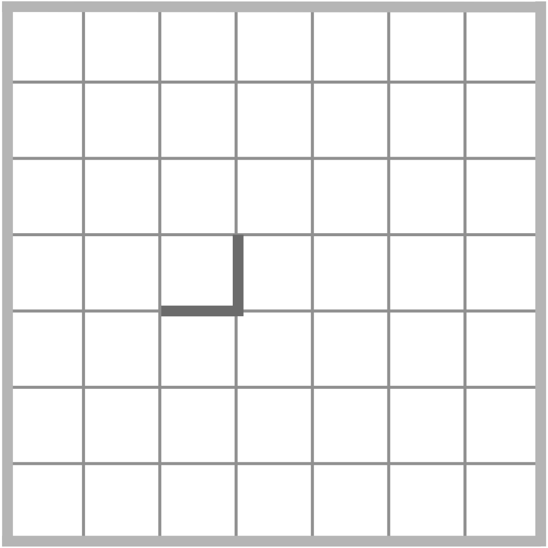
  Théorème de récurrence de Polya.

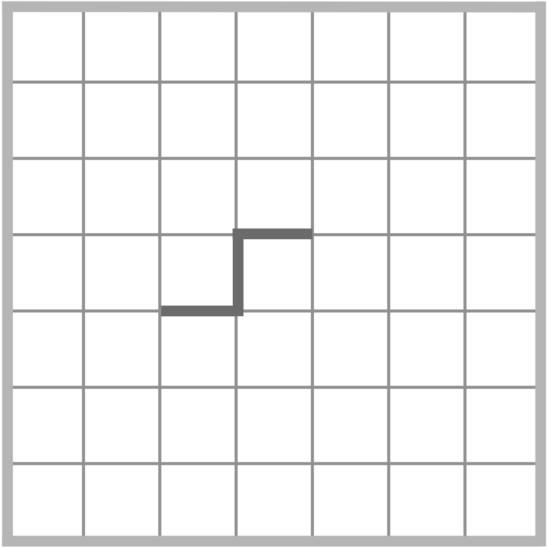
- **Marche aléatoire à boucles effacées**. Introduite par Lawler.

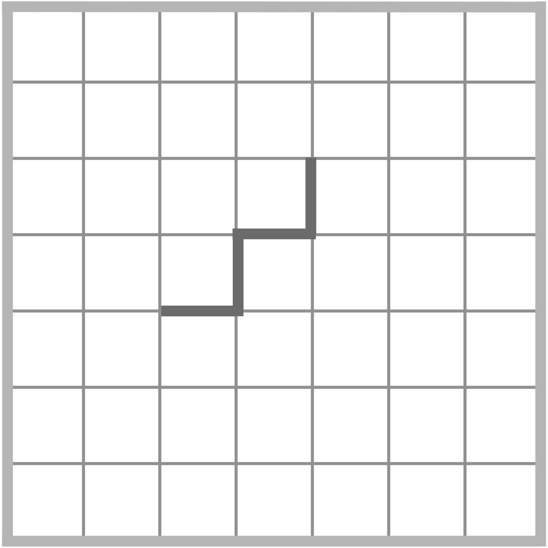


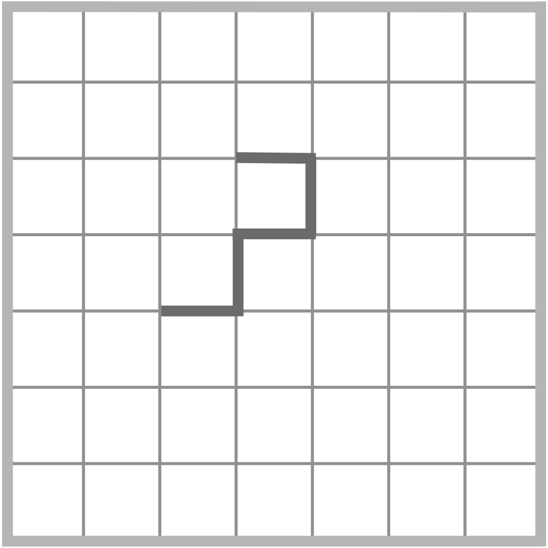


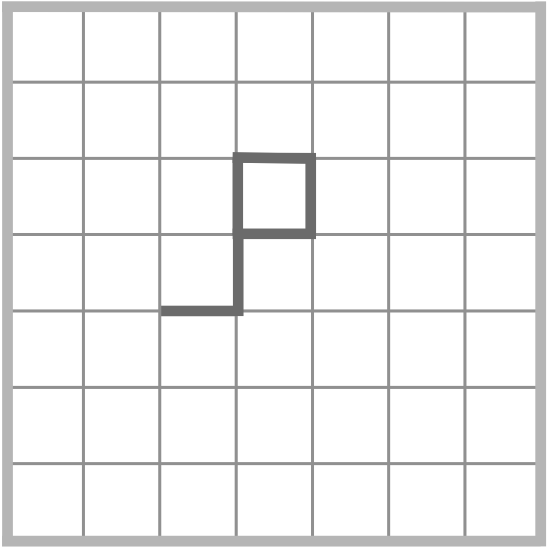


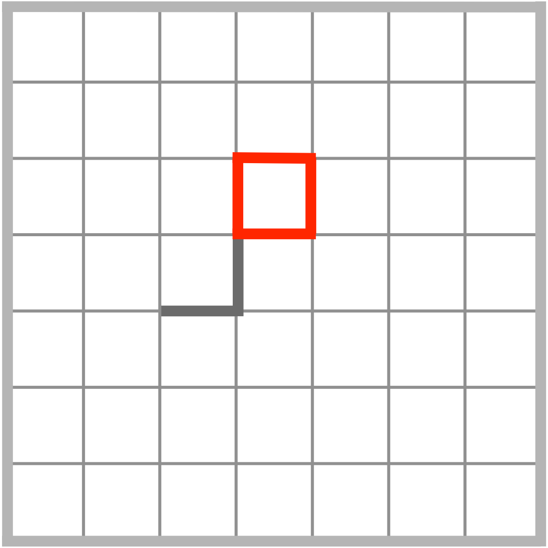


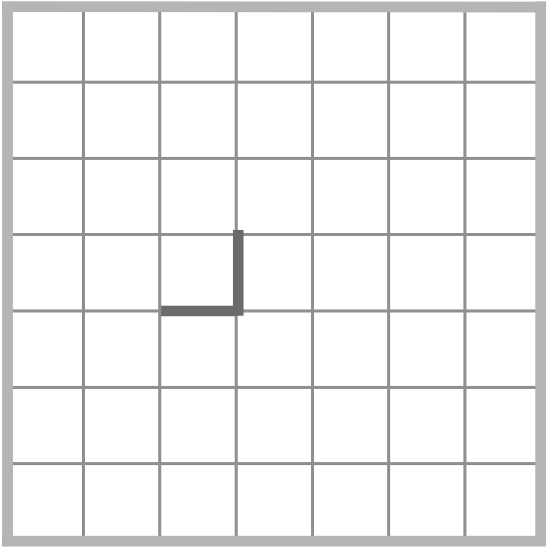


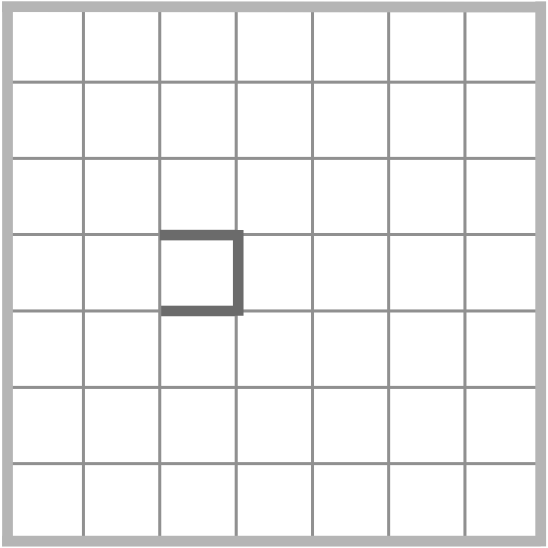


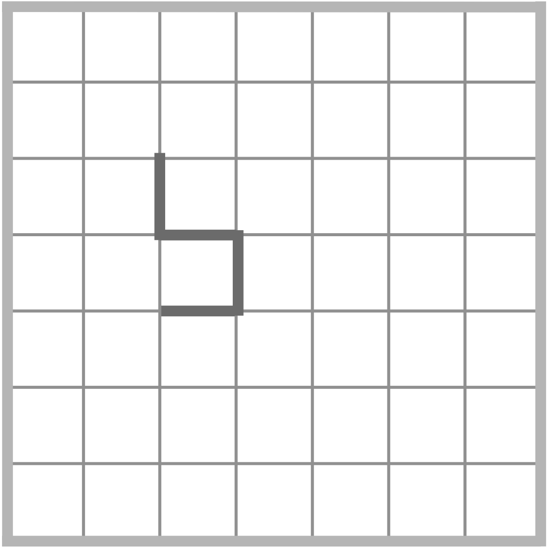


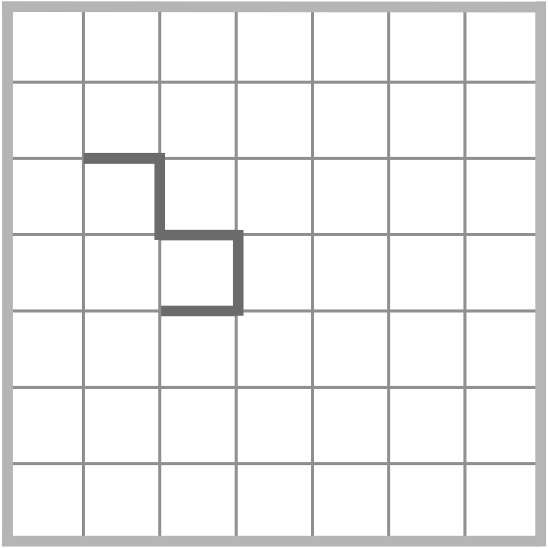


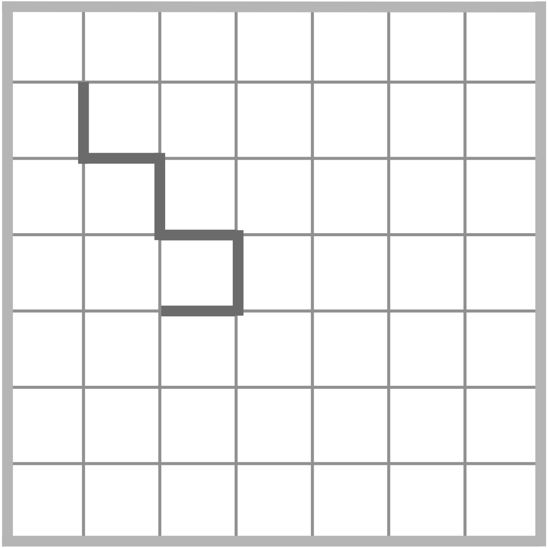


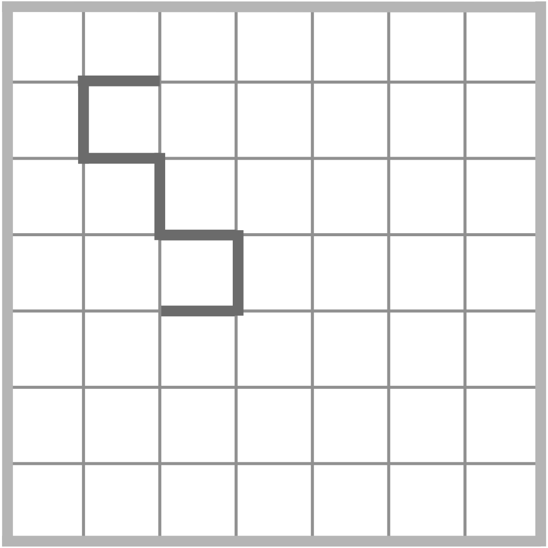


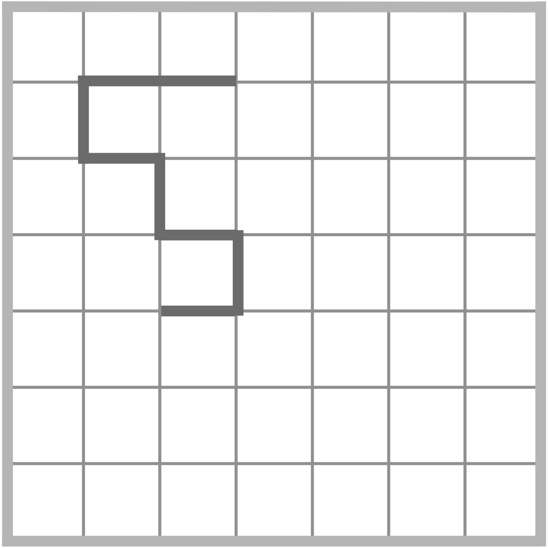


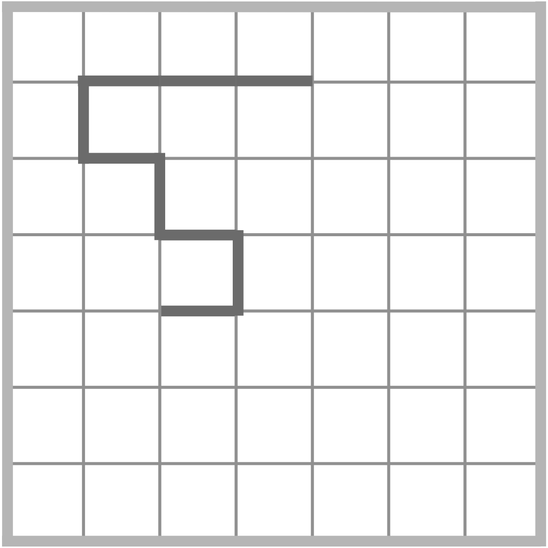


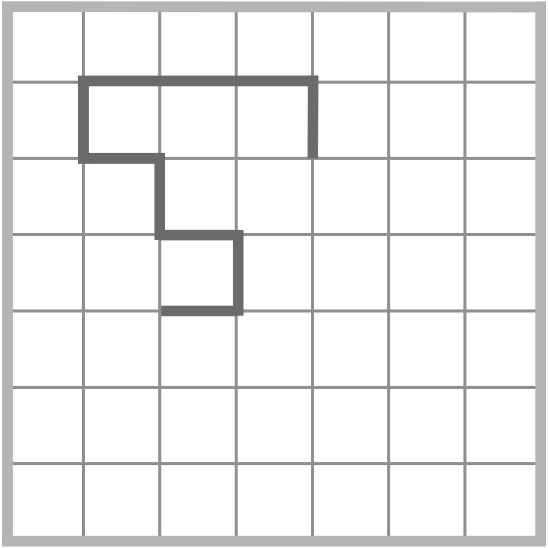


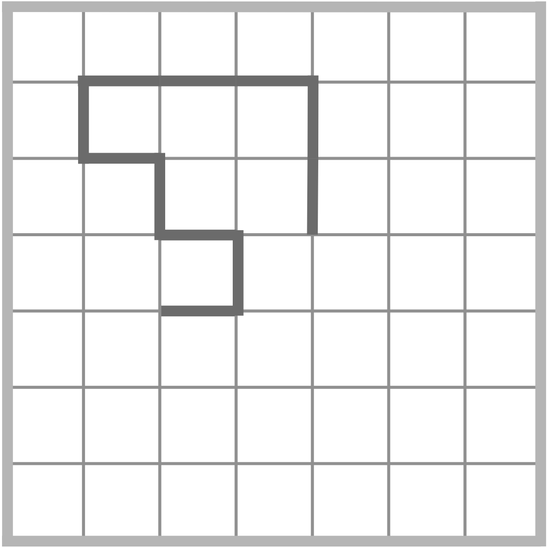


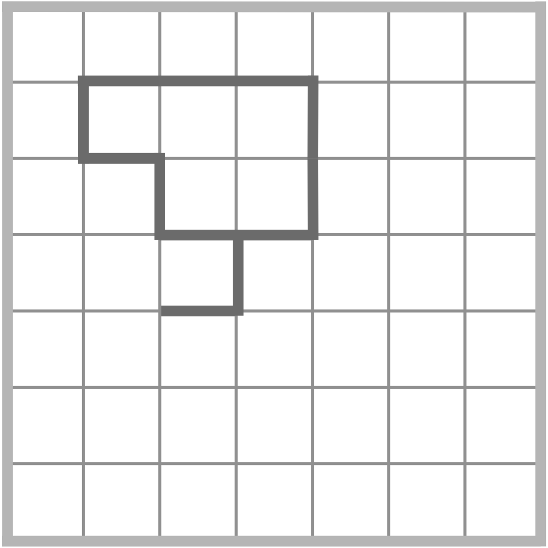


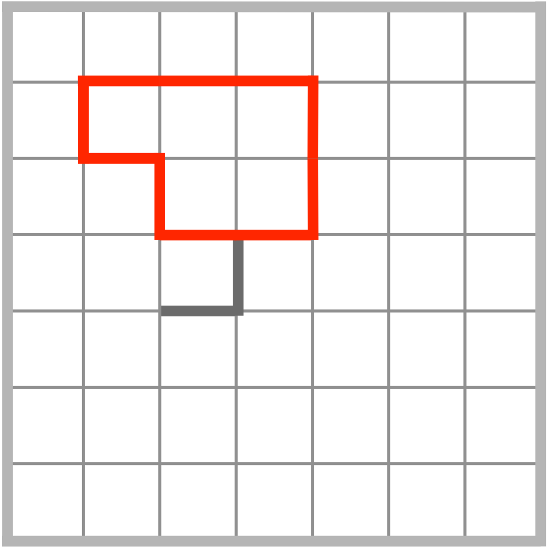


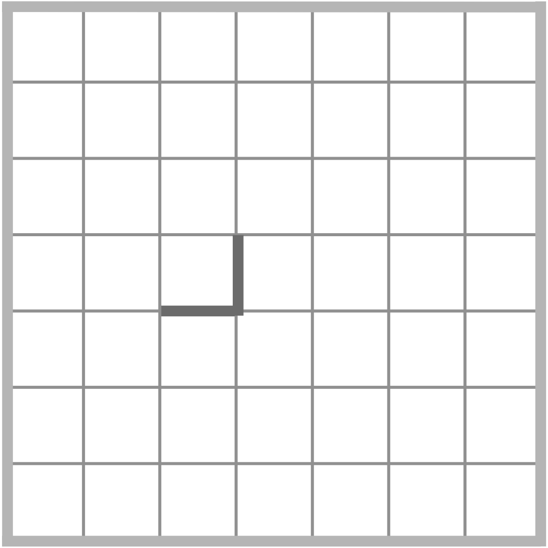


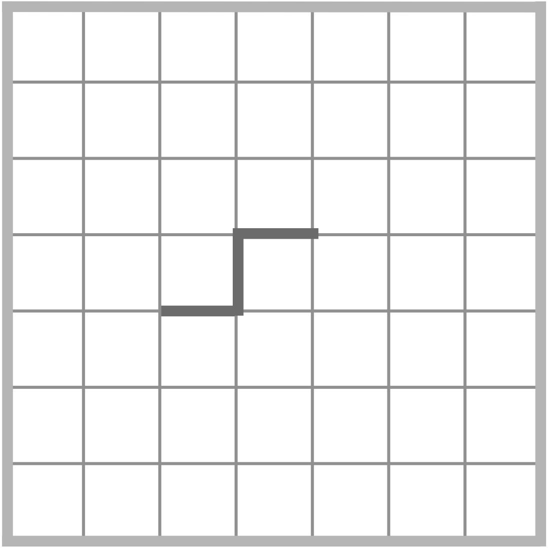


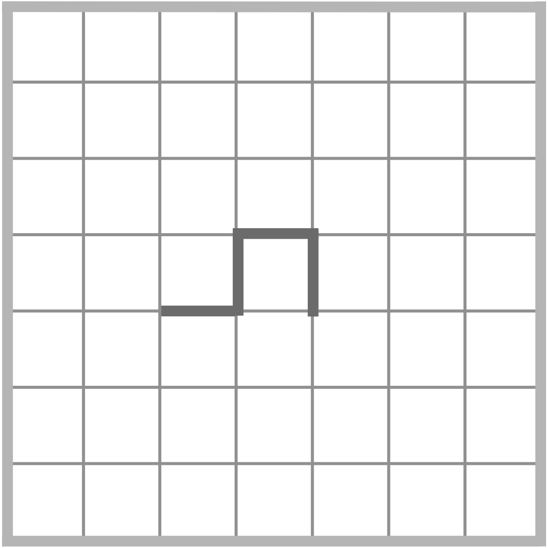


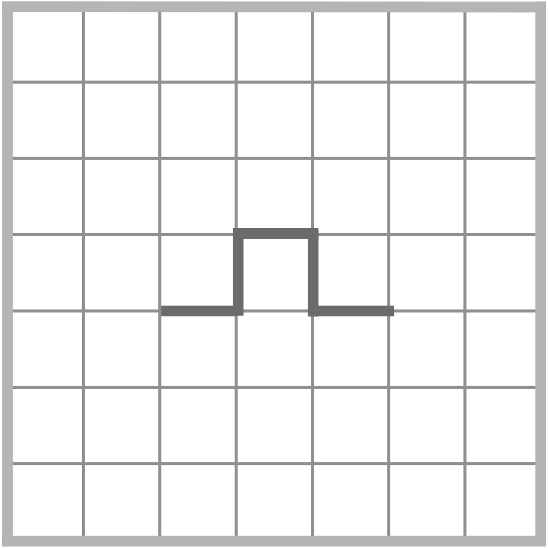


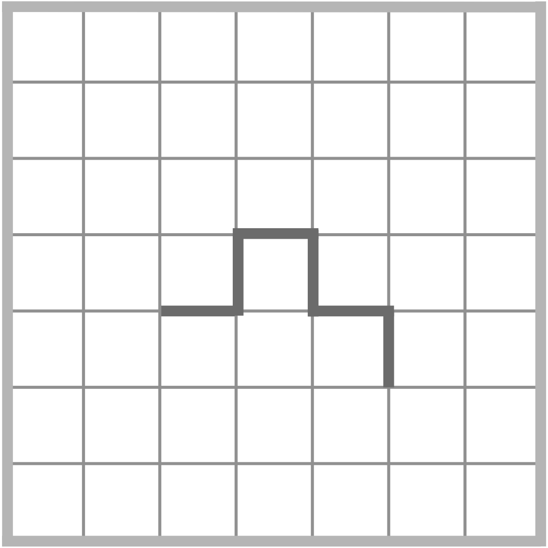


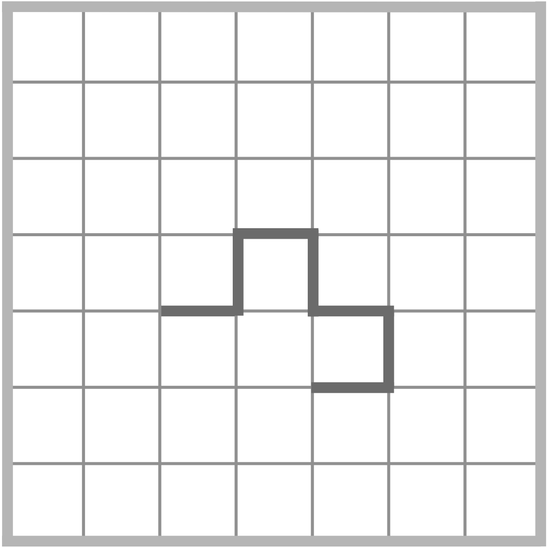








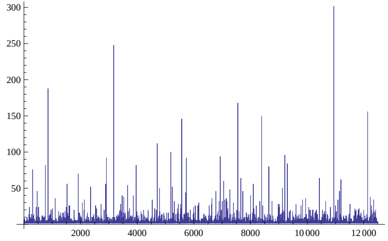


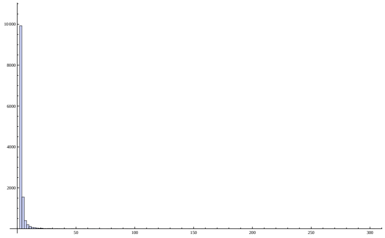


Criticalité auto-organisée

Ce processus induit, dans le régime stationnaire, une loi de probabilités sur les boucles.

Exemple : regardons les longueurs des boucles effacées.





C'est un exemple simple de **criticalité auto-organisée**. Observé par Dhar, entre autres.

Taux d'effacement de boucles

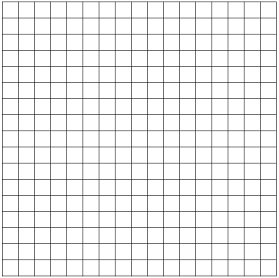
$$\rho = \text{taux d'effacement de boucles}$$

$$1/\rho = \text{longueur moyenne des boucles effacées}$$

Theorem 1 (K., Wilson)

Dans le cas planaire, ρ est une fonction des propriétés électriques locales.

Pour un réseau symétrique, on peut calculer ρ de manière élémentaire.



Pour le réseau carré,

$$\rho = \text{taux d'effacement de boucles} = \frac{5}{16}\,.$$

Le **tas de sable abélien** : un autre modèle de criticalité auto-organisée. Théorie initialement développée par Dhar.

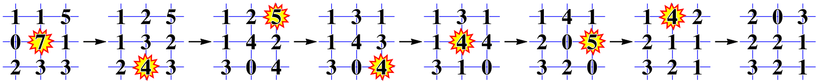
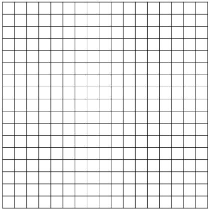


Figure: Stabilisation d'un tas de sable sur un réseau de taille 3×3

Pour un réseau récurrent, ρ est lié à la densité $\bar{\sigma}$ du tas de sable abélien par

$$\bar{\sigma} = \frac{\delta\rho + \delta - 1}{2},$$

où $\delta =$ degré moyen.



Pour le réseau carré,

$$\rho = \text{taux d'effacement de boucles} = \frac{5}{16}\,,$$

et

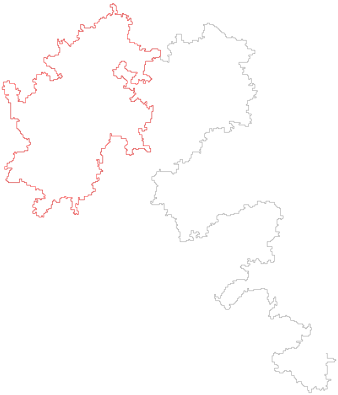
$$\bar{\sigma} = \text{densité du tas de sable} = \frac{17}{8}\,.$$

Travaux précédents n'expliquaient pas pourquoi ces valeurs sont rationnelles.

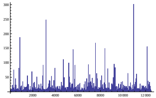
lattice	$\frac{\text{unicycle}}{\text{tree} \times \text{edge}}$ ratio τ	mean unicycle loop length $\lambda = \Pr[e \notin T]/\tau$	mean LERW loop length $1/\rho$	discrete-time LERW looping rate $\rho = \tau + \frac{1}{2}\Pr[e \in T]$	mean number of neighbors on UST path to ∞ $\delta\rho$	sandpile density $\bar{\sigma} = (\delta\rho + \delta - 1)/2$
square 	$1/16$ 0.0625	8	$16/5$ 3.2	$5/16$ 0.3125	$5/4$ 1.25	$17/8$ 2.125
triangular 	$1/9$ 0.111111 . . .	6	$18/5$ 3.6	$5/18$ 0.277778 . . .	$5/3$ 1.666667 . . .	$10/3$ 3.333333 . . .
honeycomb 	$1/36$ 0.027778 . . .	12	$36/13$ 2.769231 . . .	$13/36$ 0.361111 . . .	$13/12$ 1.083333 . . .	$37/24$ 1.541667 . . .
kagomé / trihexagonal 	$1/12$ 0.083333 . . .	6	3	$1/3$ 0.333333 . . .	$4/3$ 1.333333 . . .	$13/6$ 2.166667 . . .
dice / rhombille 	$1/16$ 0.0625	8	$16/5$ 3.2	$5/16$ 0.3125	$5/4$ 1.25	$17/8$ 2.125
Fisher / truncated hexagonal 	$59/900$ 0.065556 . . .	$300/59$ 5.084746 . . .	$900/359$ 2.506964 . . .	$359/900$ 0.398889 . . .	$359/300$ 1.196667 . . .	$959/600$ 1.598333 . . .
triakis triangular 	$17/150$ 0.113333 . . .	$100/17$ 5.882353 . . .	$25/7$ 3.571429 . . .	$7/25$ 0.28	$42/25$ 1.68	$167/50$ 3.34
square-octagon / truncated square 	$\frac{1}{24} - \frac{\operatorname{arcsec}(3)}{12\sqrt{2}\pi} + \frac{\operatorname{arcsec}(3)^2}{8\pi^2}$ 0.037769 . . .	8.825563 . . .	2.694674 . . .	$\frac{3}{8} - \frac{\operatorname{arcsec}(3)}{12\sqrt{2}\pi} + \frac{\operatorname{arcsec}(3)^2}{8\pi^2}$ 0.371102 . . .	$\frac{9}{8} - \frac{\operatorname{arcsec}(3)}{4\sqrt{2}\pi} + \frac{3\operatorname{arcsec}(3)^2}{8\pi^2}$ 1.113307 . . .	$\frac{25}{16} - \frac{\operatorname{arcsec}(3)}{8\sqrt{2}\pi} + \frac{3\operatorname{arcsec}(3)^2}{16\pi^2}$ 1.556654 . . .
tetrakis square 	$\frac{1}{8} - \frac{\operatorname{arcsec}(3)}{12\sqrt{2}\pi} + \frac{\operatorname{arcsec}(3)^2}{16\pi^2}$ 0.111507 . . .	5.978703 . . .	3.594878 . . .	$\frac{7}{24} - \frac{\operatorname{arcsec}(3)}{12\sqrt{2}\pi} + \frac{\operatorname{arcsec}(3)^2}{16\pi^2}$ 0.278174 . . .	$\frac{7}{4} - \frac{\operatorname{arcsec}(3)}{2\sqrt{2}\pi} + \frac{3\operatorname{arcsec}(3)^2}{8\pi^2}$ 1.669041 . . .	$\frac{27}{8} - \frac{\operatorname{arcsec}(3)}{4\sqrt{2}\pi} + \frac{3\operatorname{arcsec}(3)^2}{16\pi^2}$ 3.334521 . . .

TABLE 1. Unicycle, loop-erased random walk, uniform spanning tree, and sandpile parameter values for different lattices.

Et si on s'intéresse aux *grandes* boucles effacées ?



Ceci se produit sporadiquement :

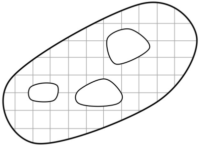


II. Forêt couvrante d'unicycles.

Forêt couvrant d'unicycles

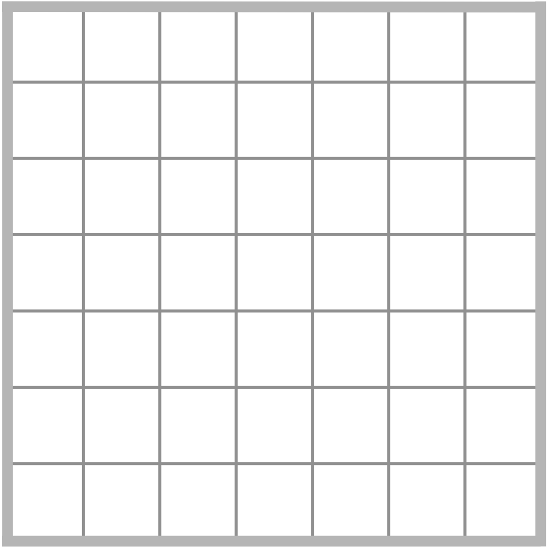
Pour cela on introduit un algorithme qui recouvre un graphe fini avec des marches aléatoires à boucles effacées (sauf certaines) et donne une structure arborescente.

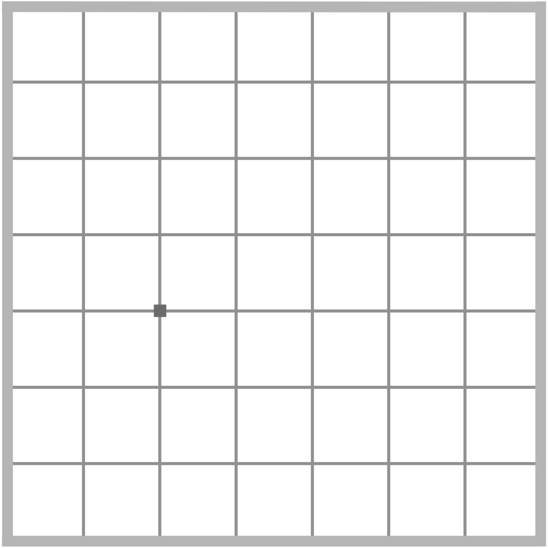
On se place dans ce cas :

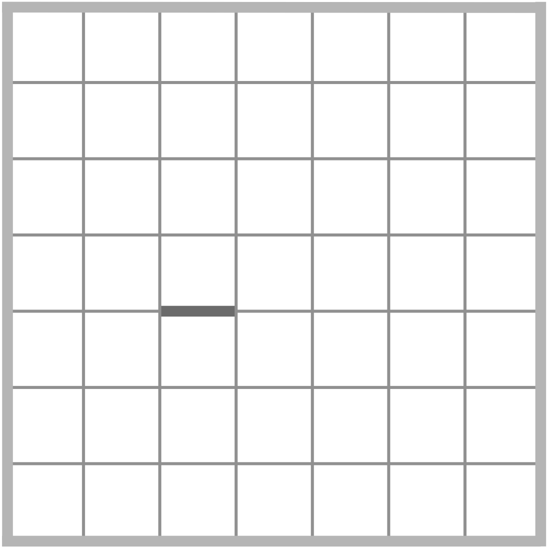


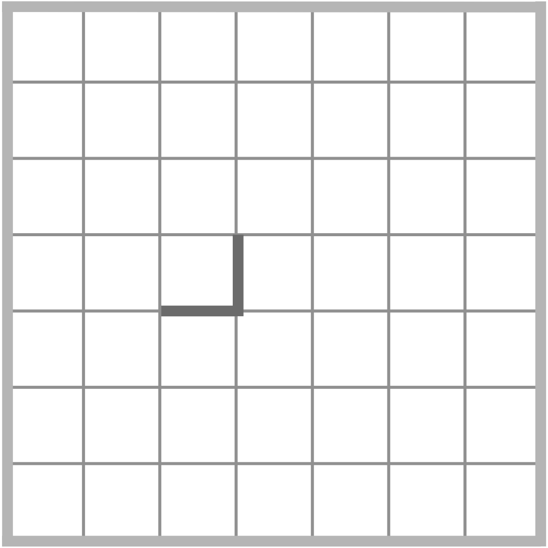
A chaque boucle γ du graphe on associe une probabilité $\alpha(\gamma)$.

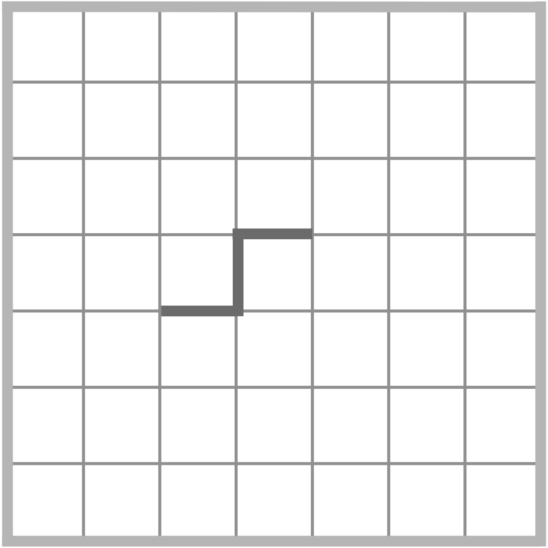
Voici l'algorithme et la définition des forêts couvrantes d'unicycles :

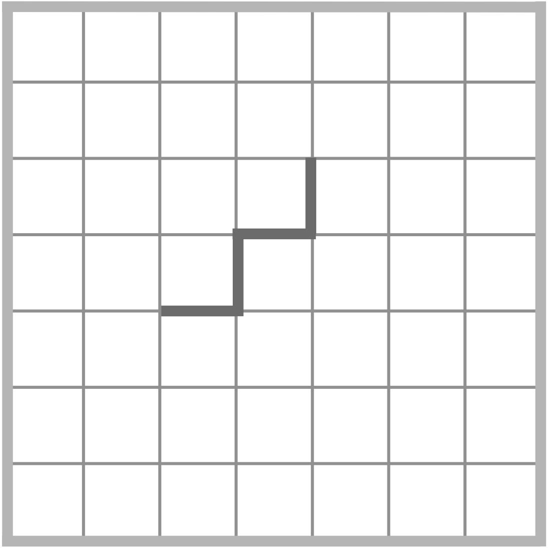


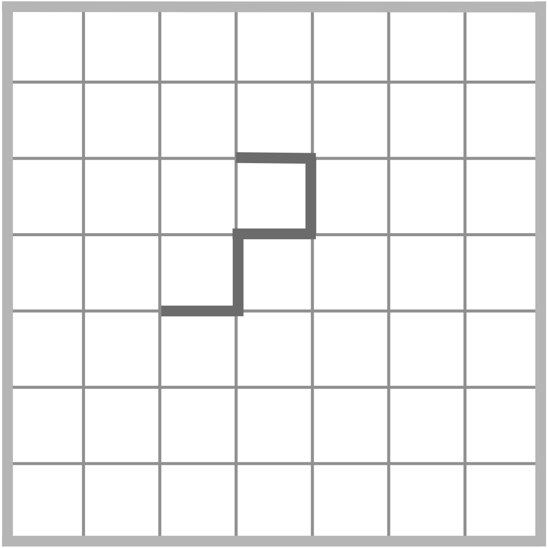


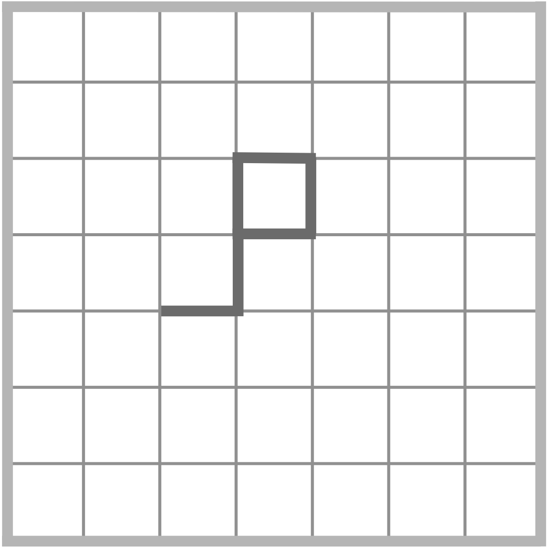


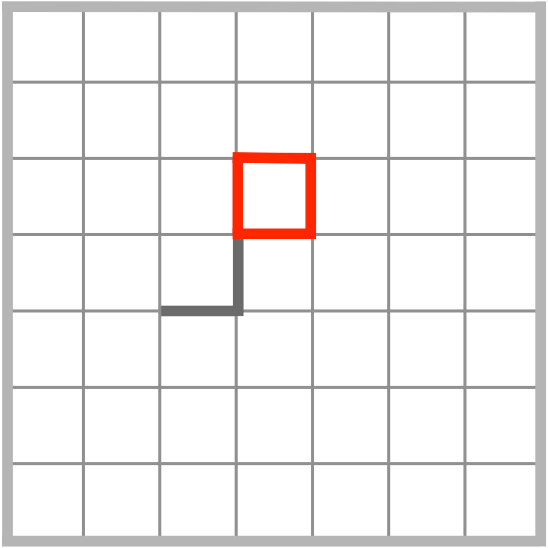


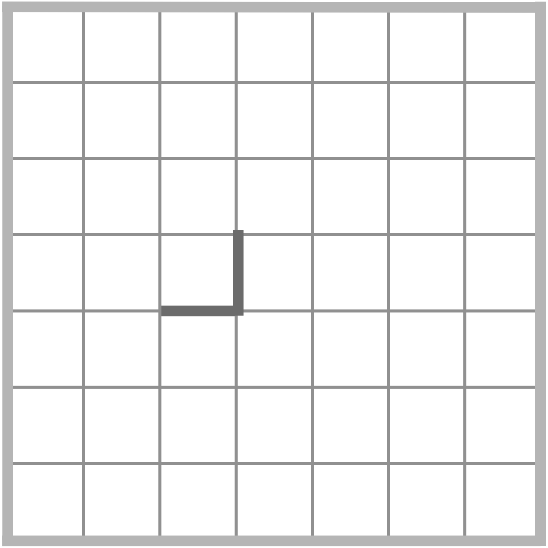


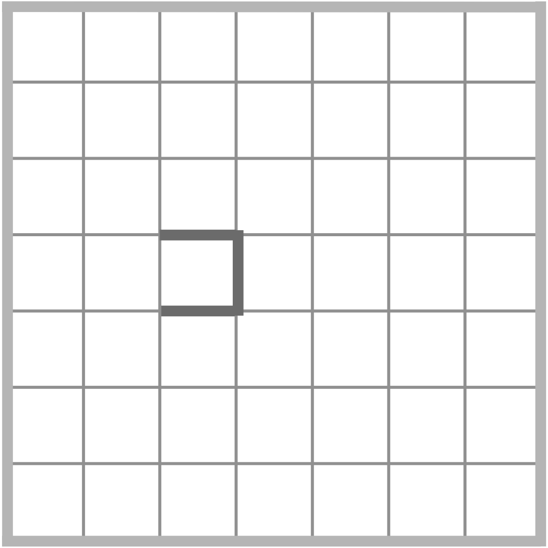


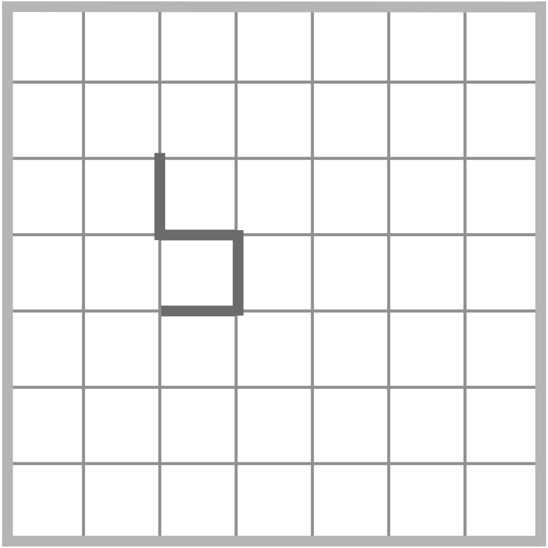


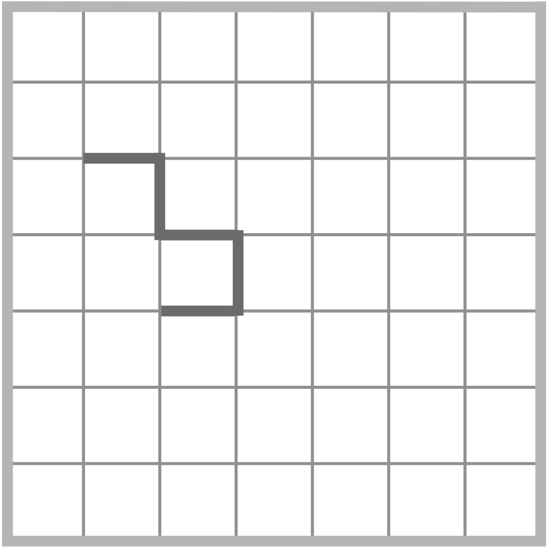


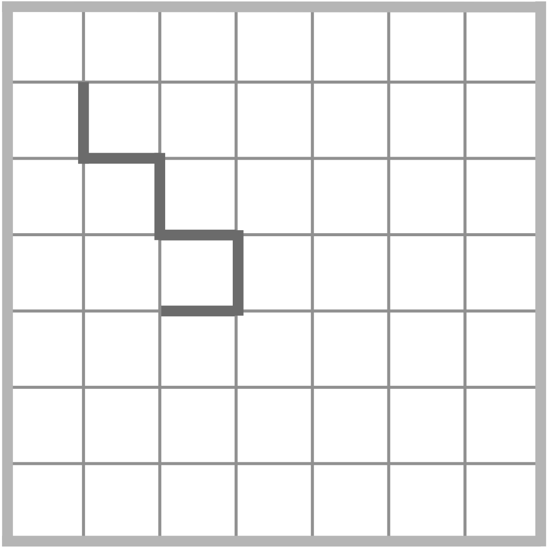


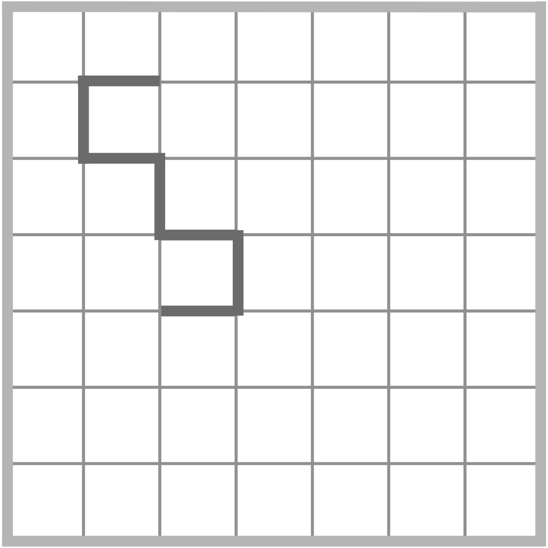


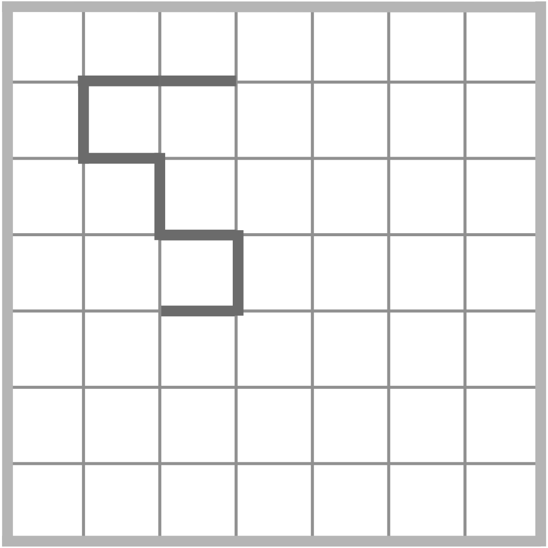


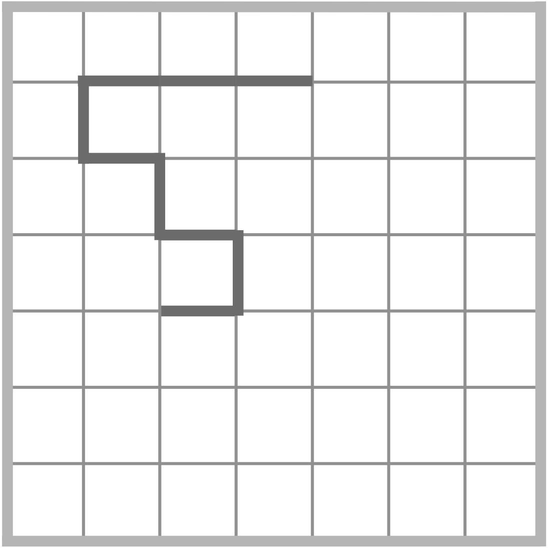


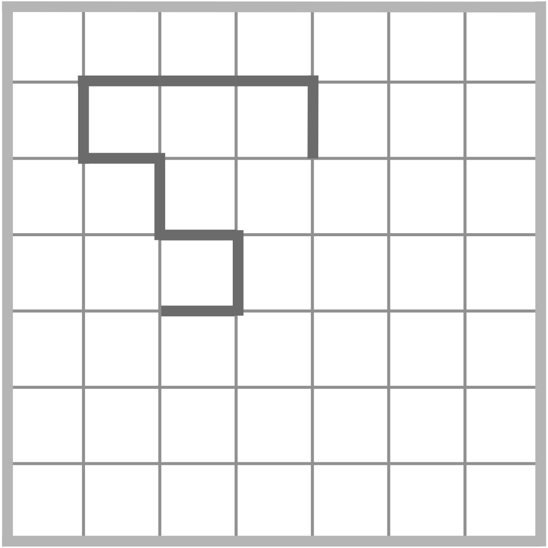


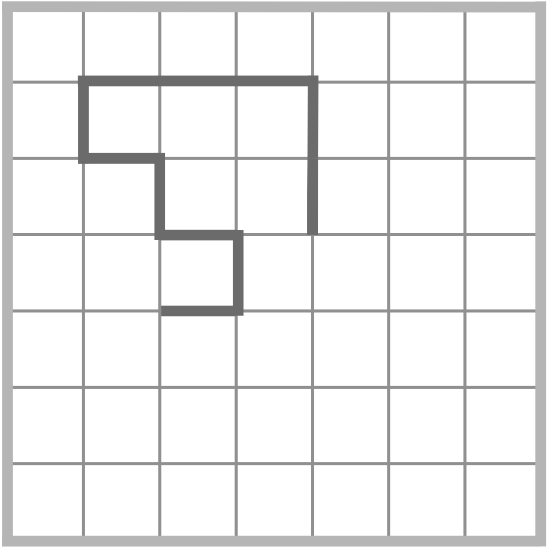


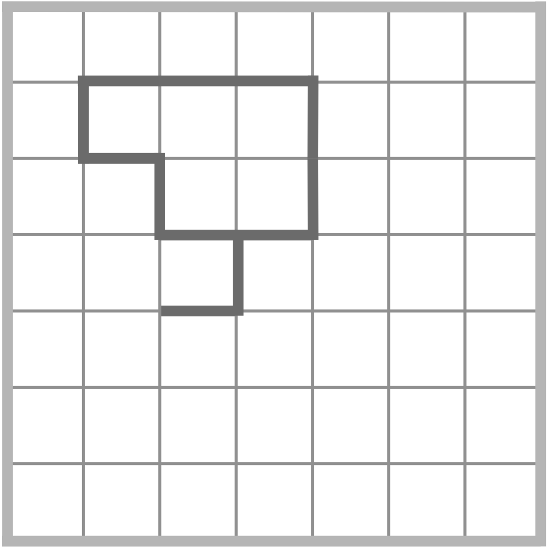


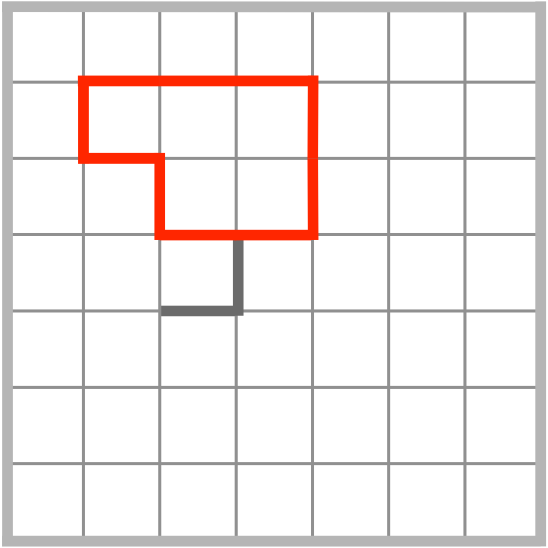


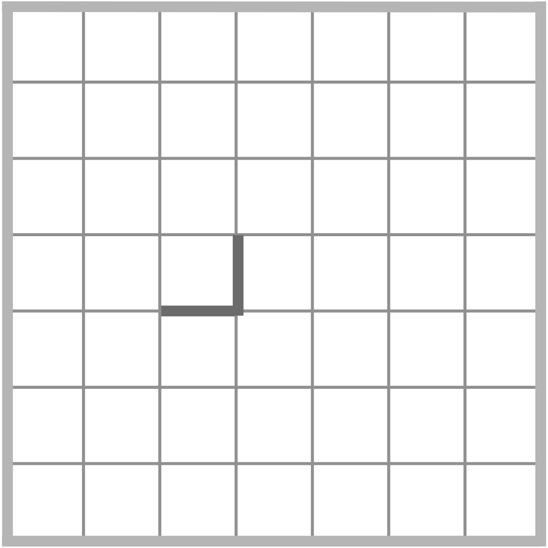


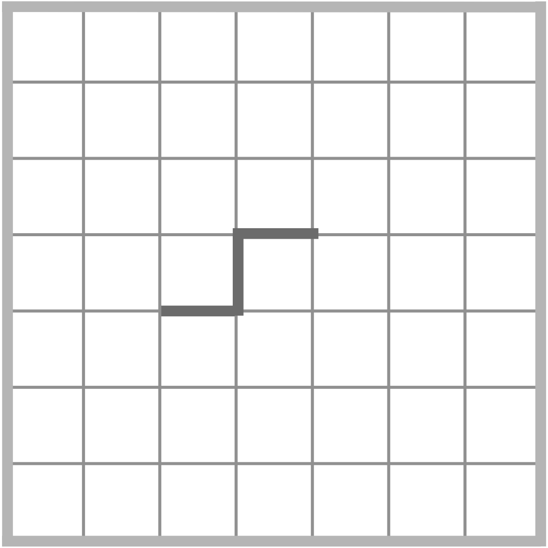


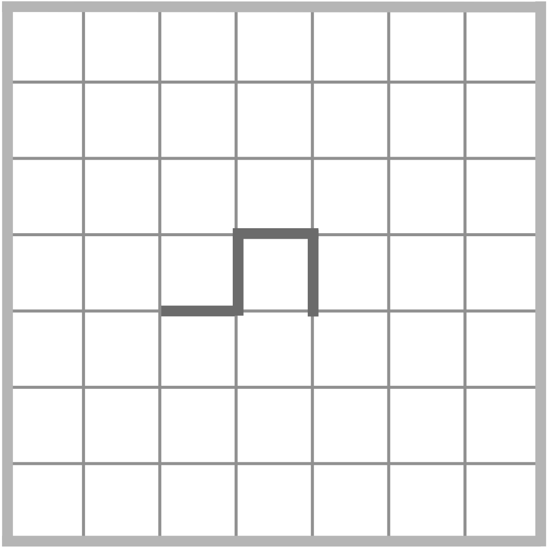


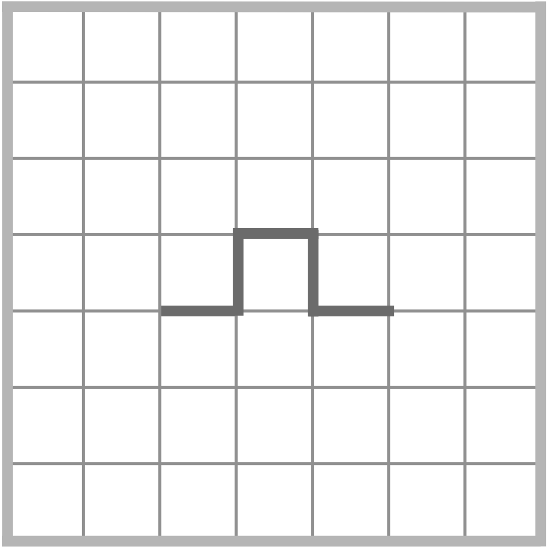


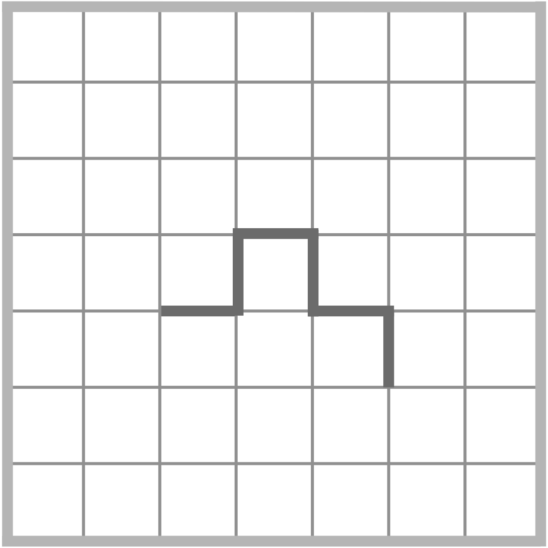


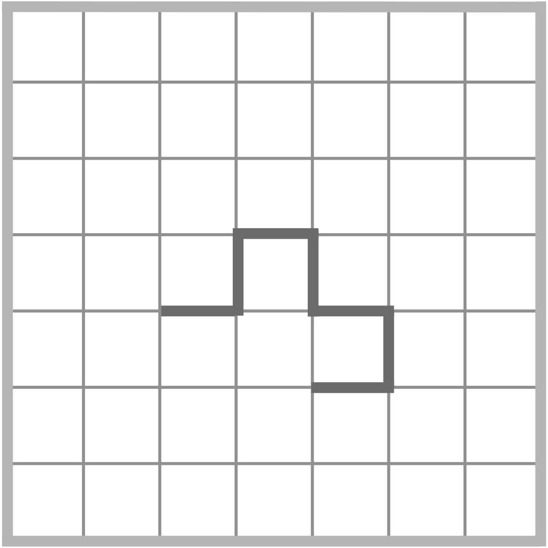


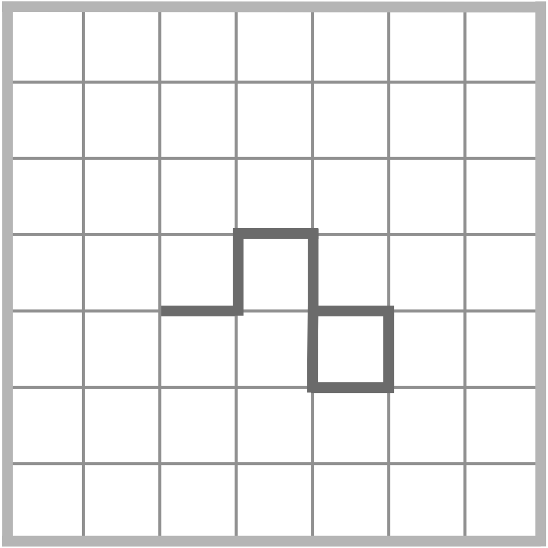


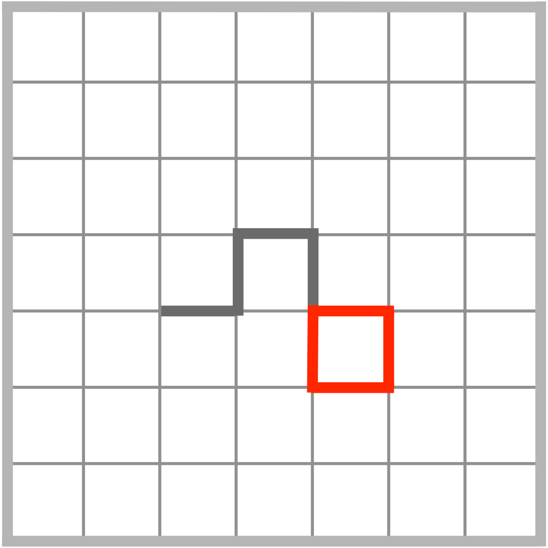


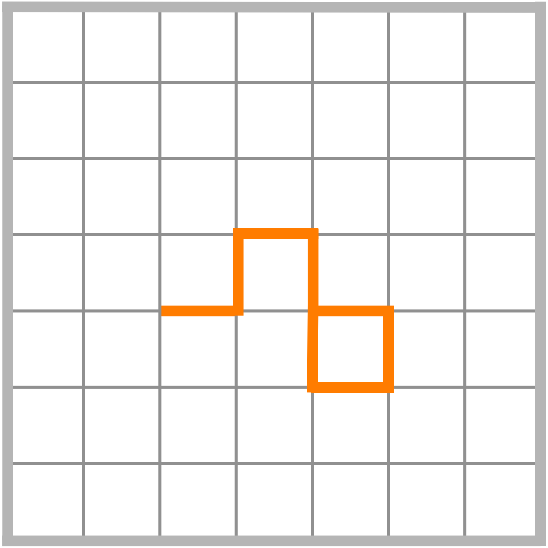


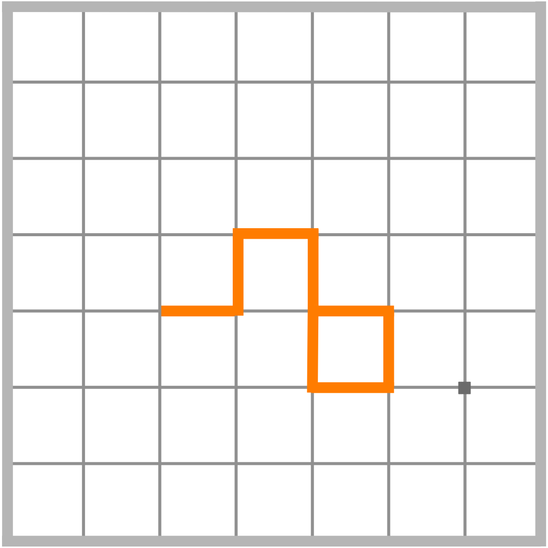


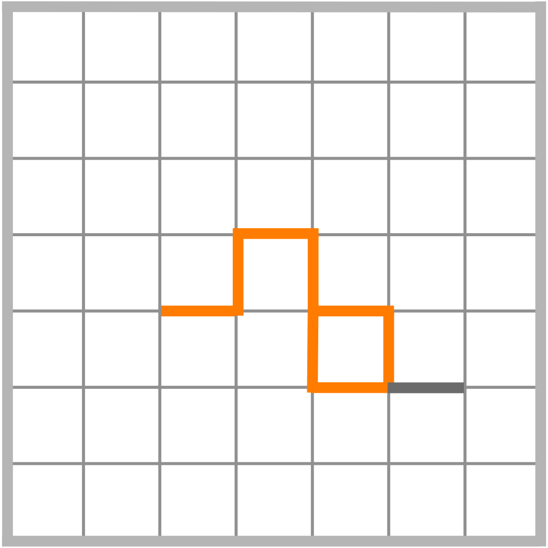


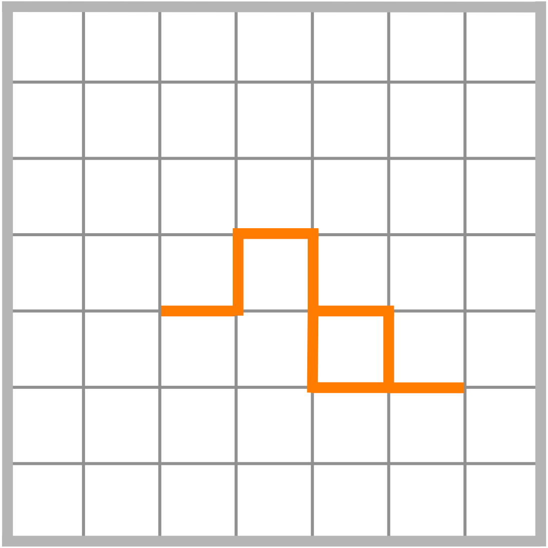


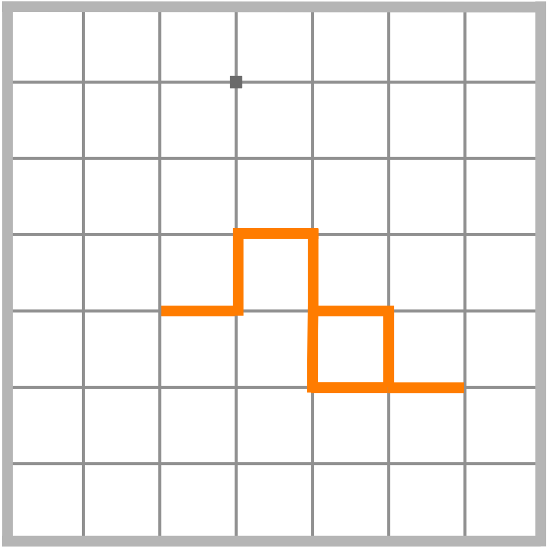


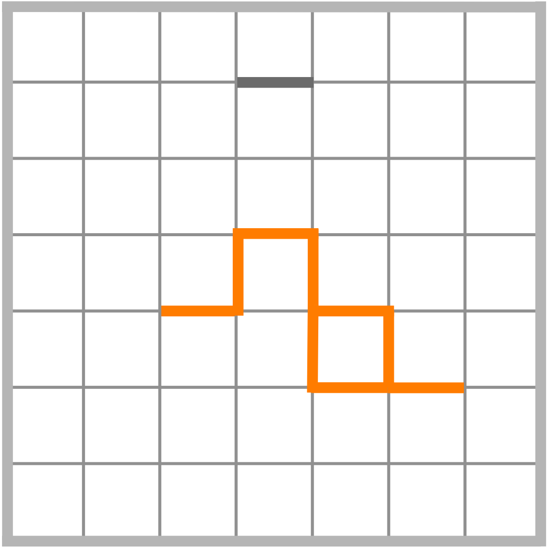


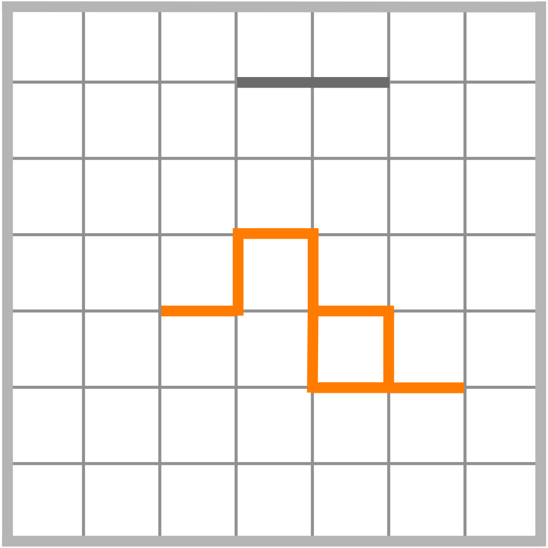


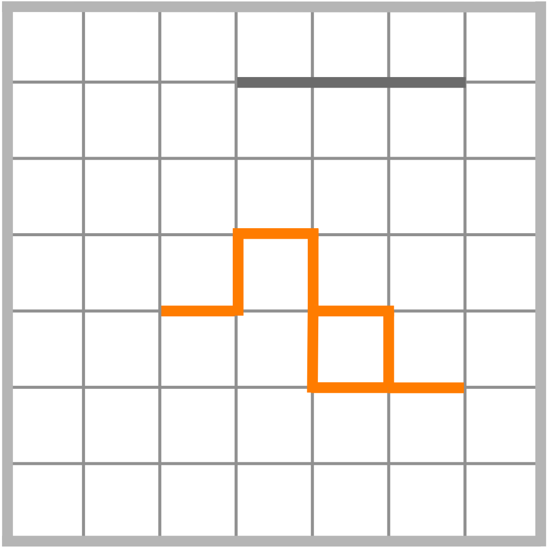


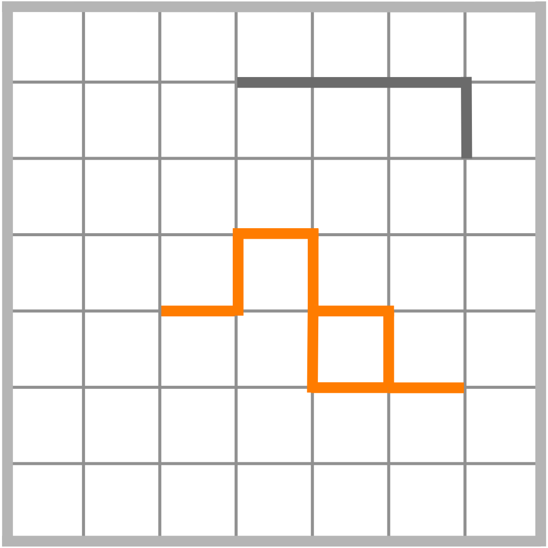


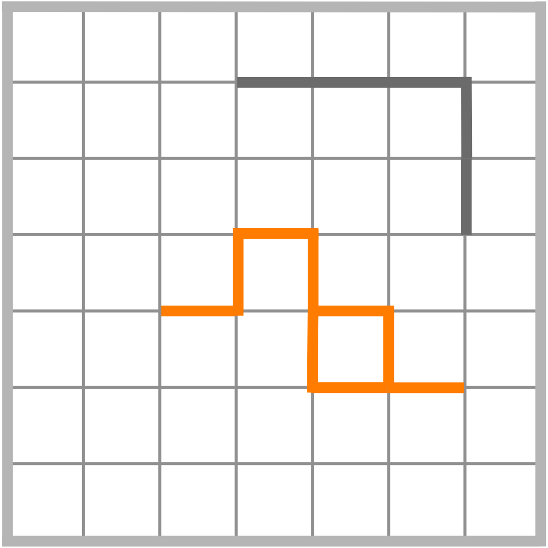


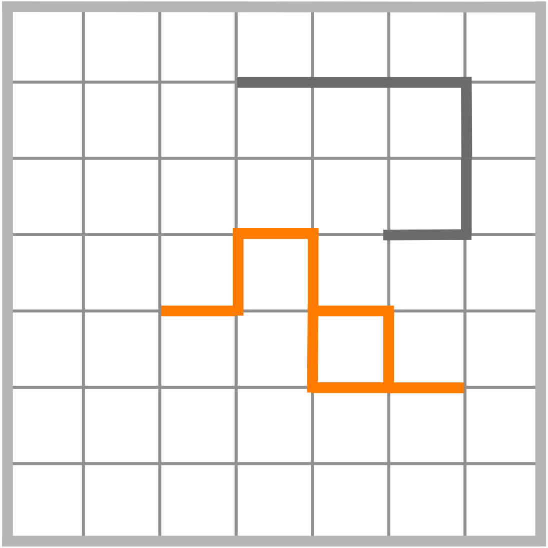


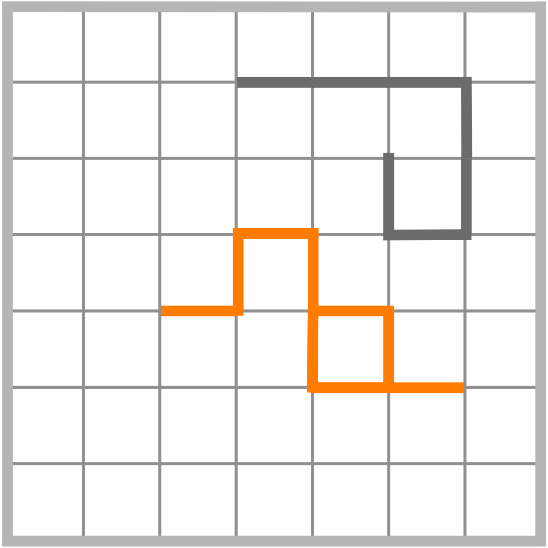


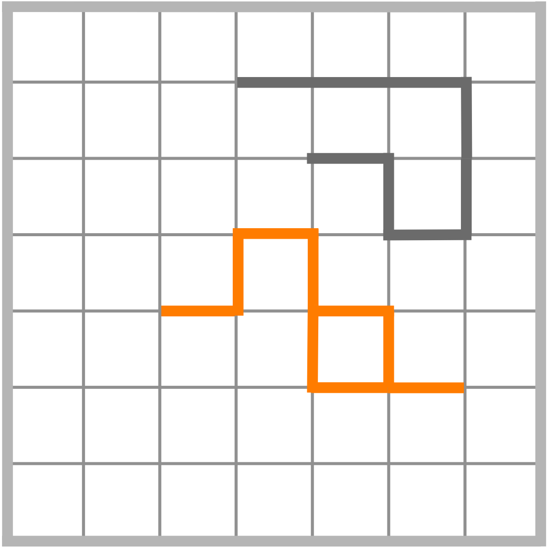


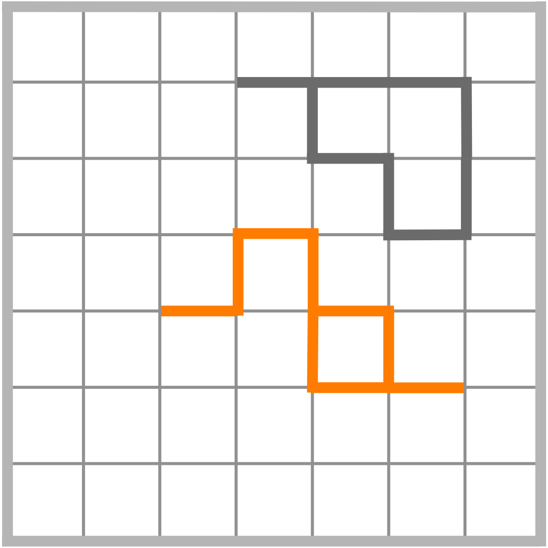


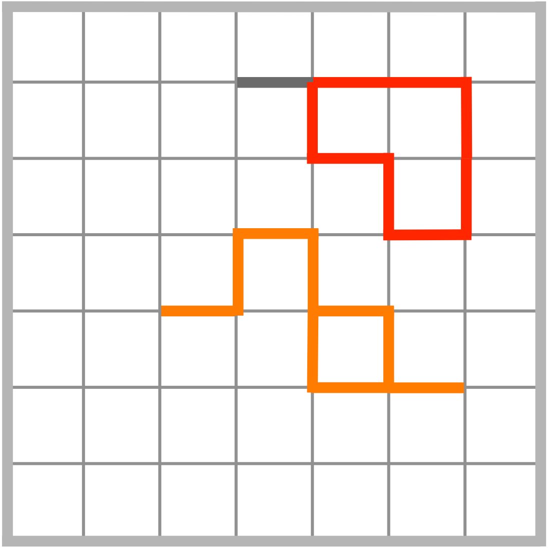


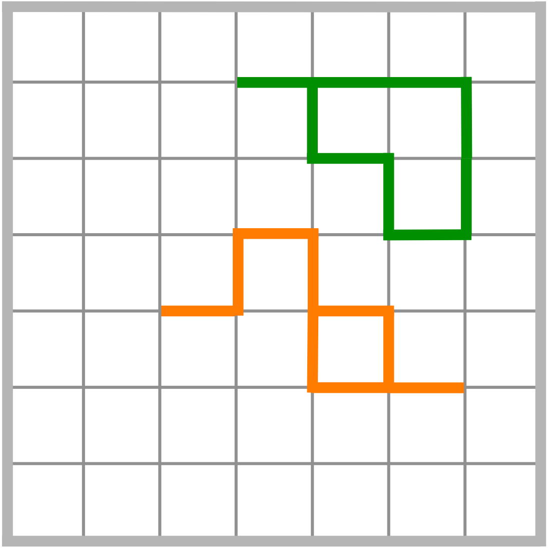


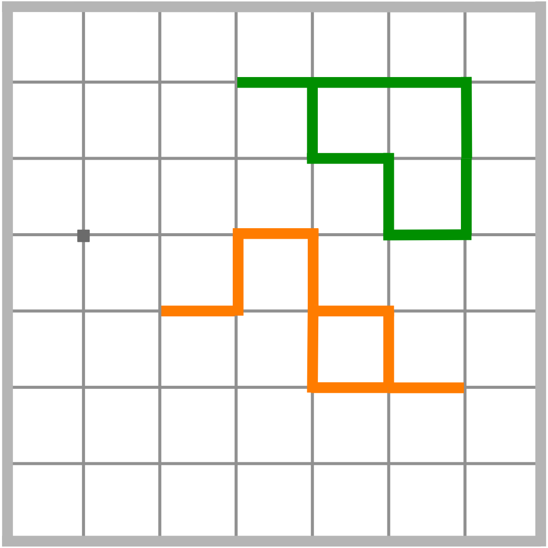


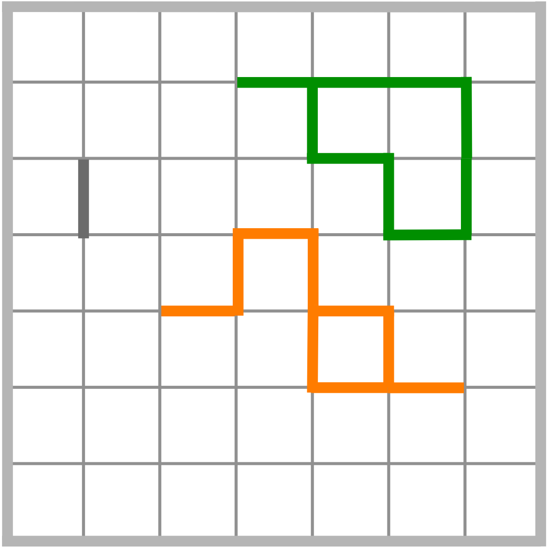


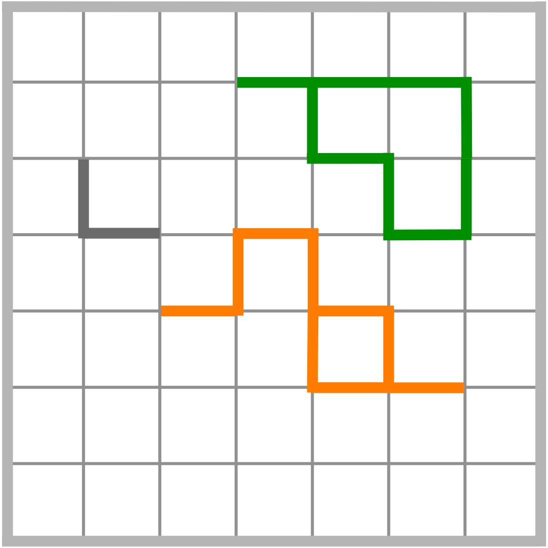


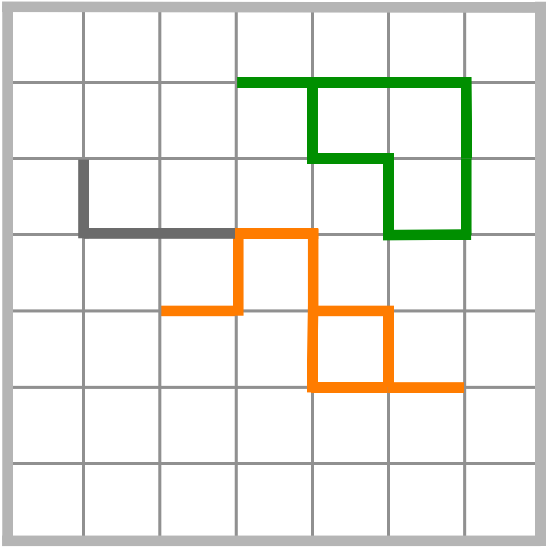


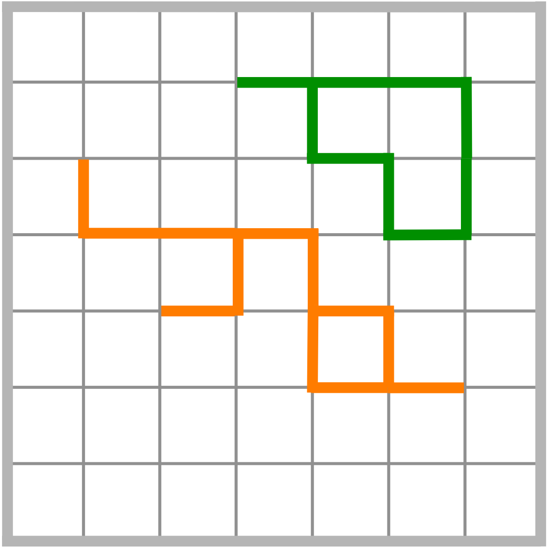


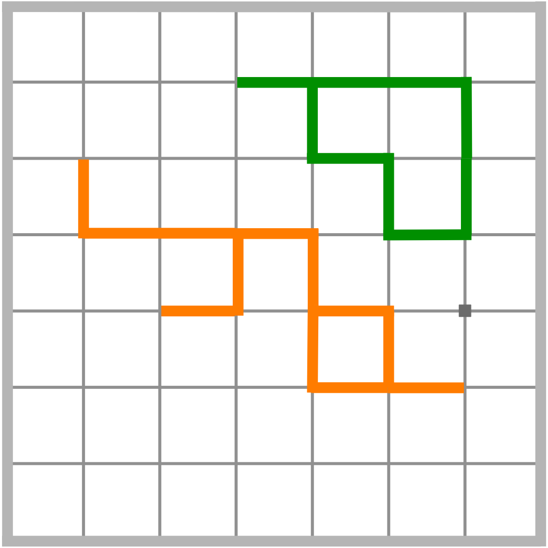


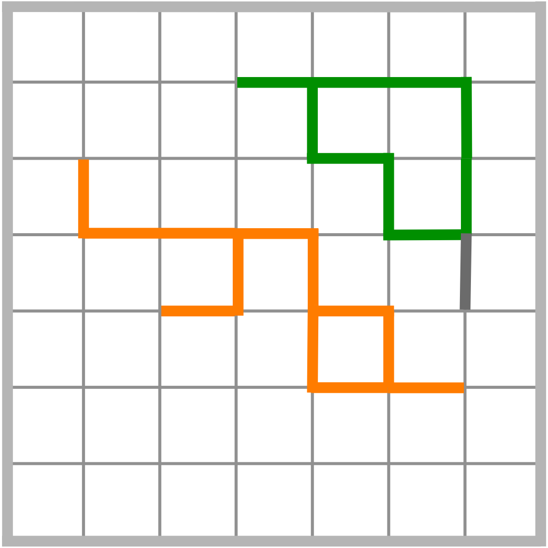


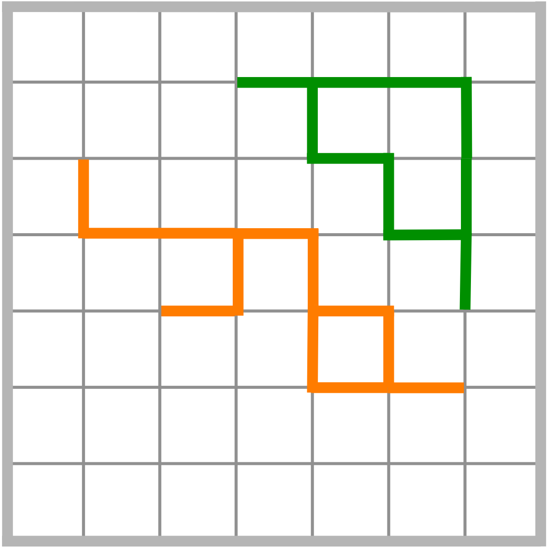


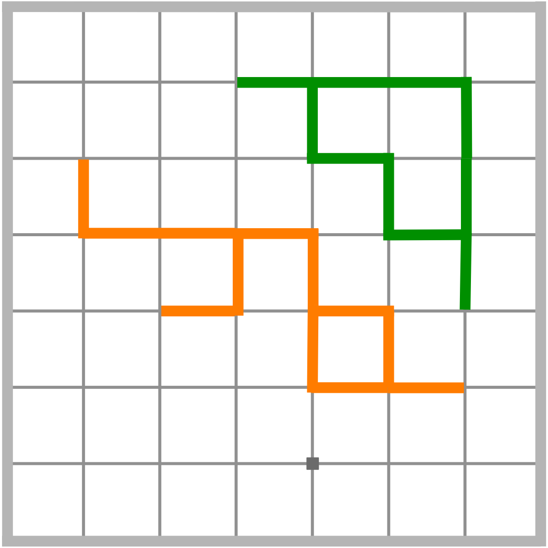


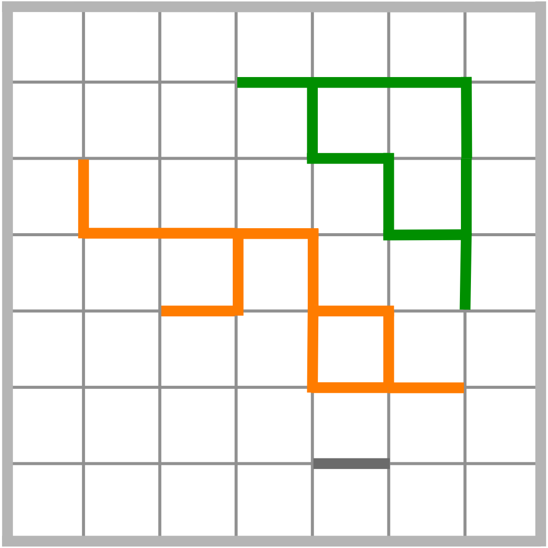


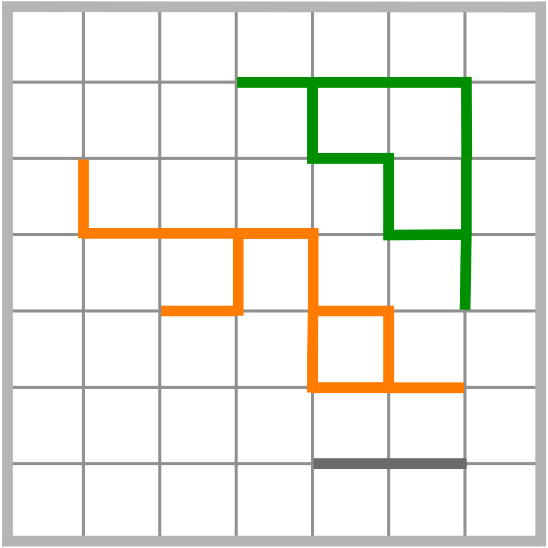


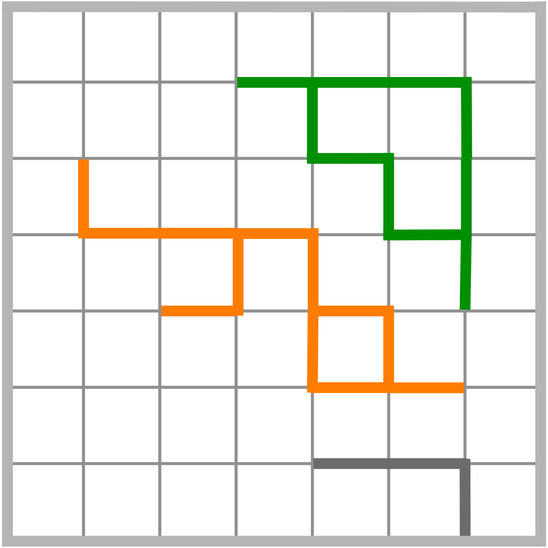


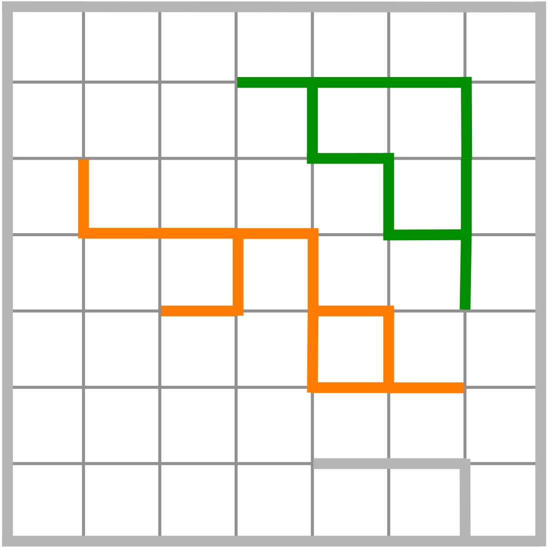


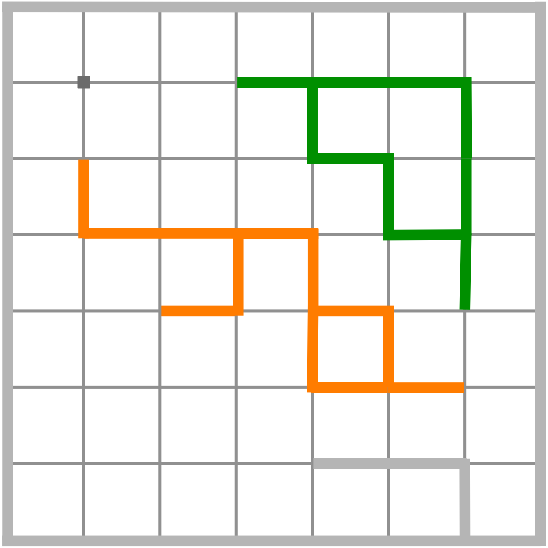


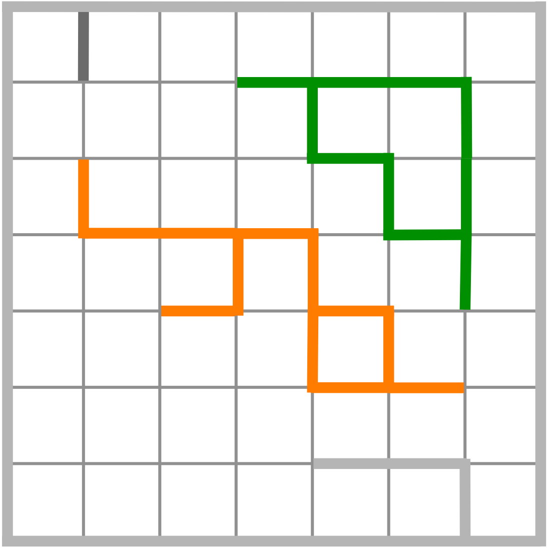


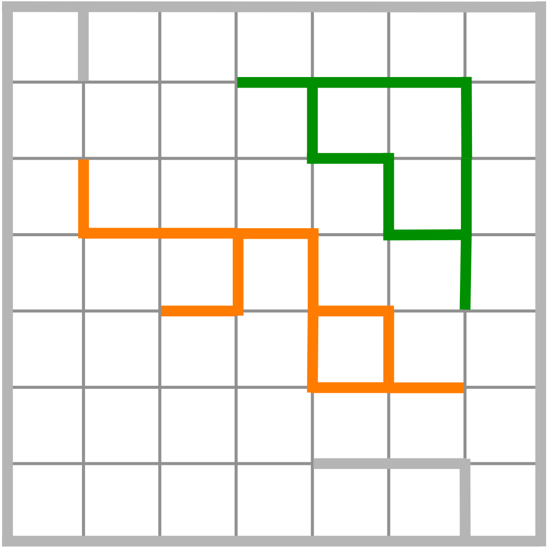


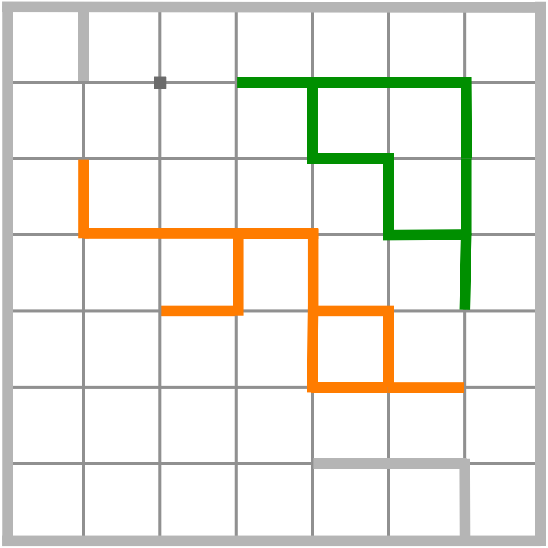


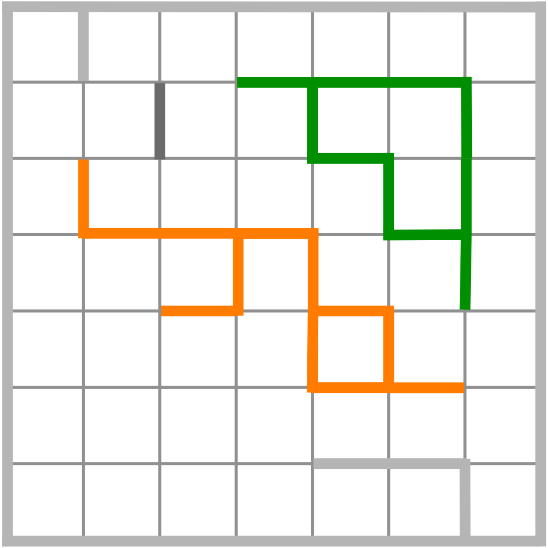


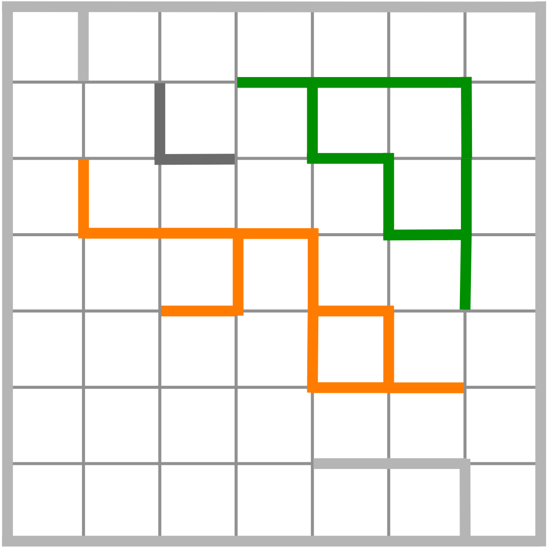


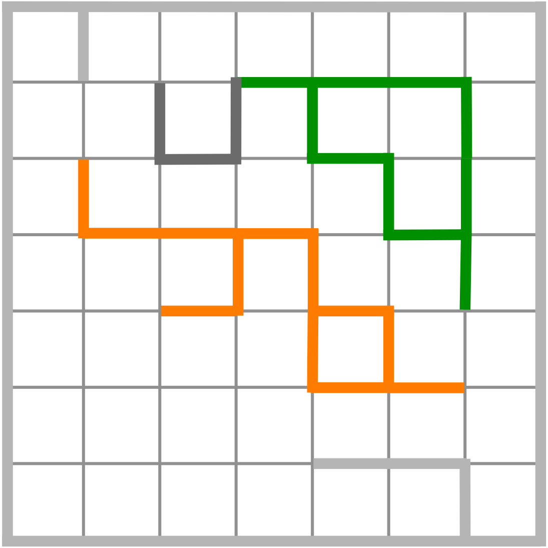


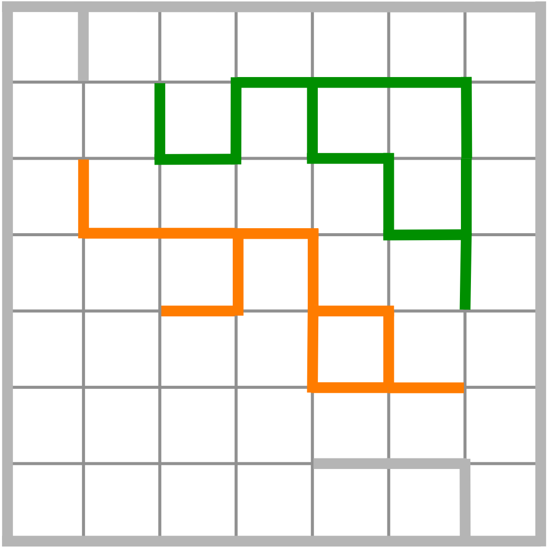


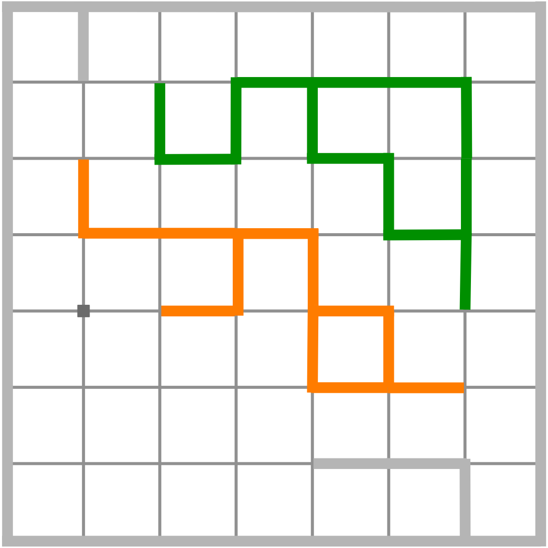


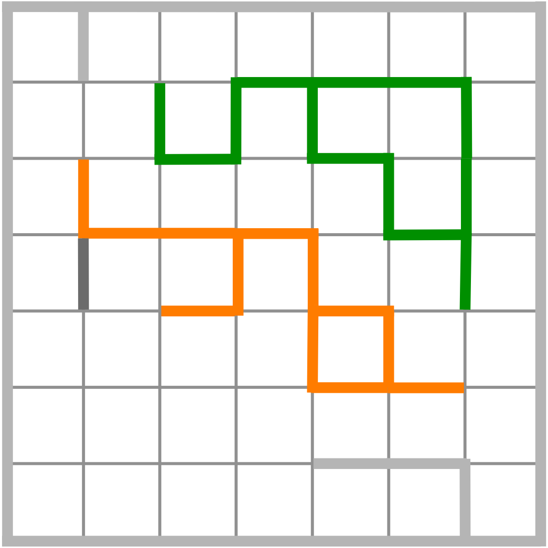


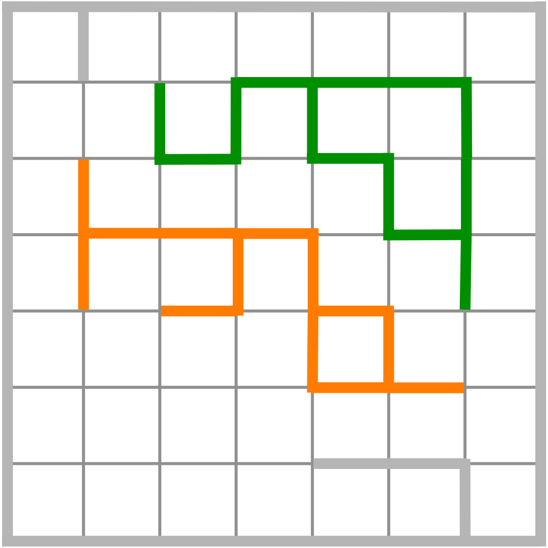


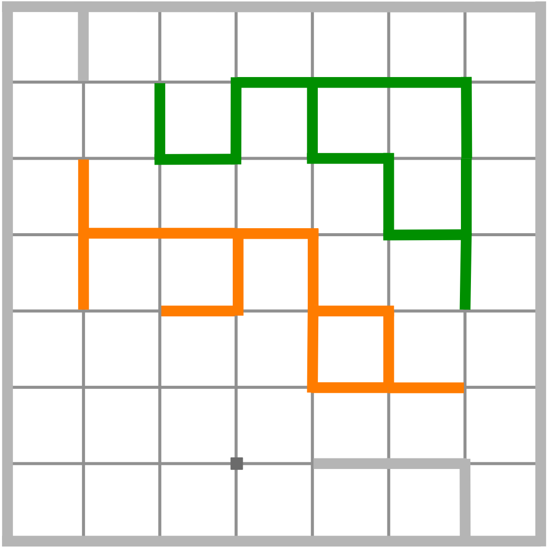


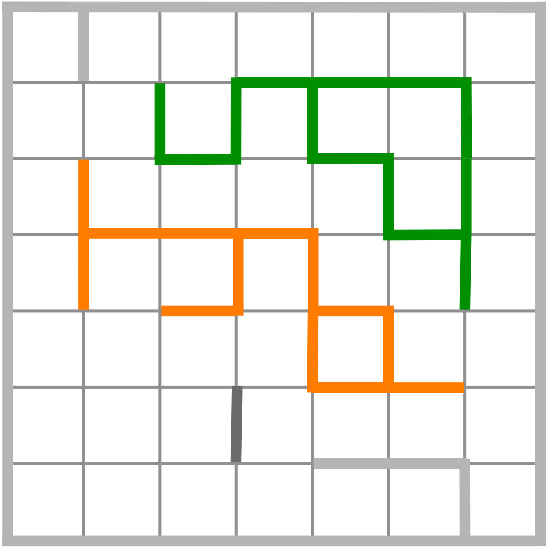


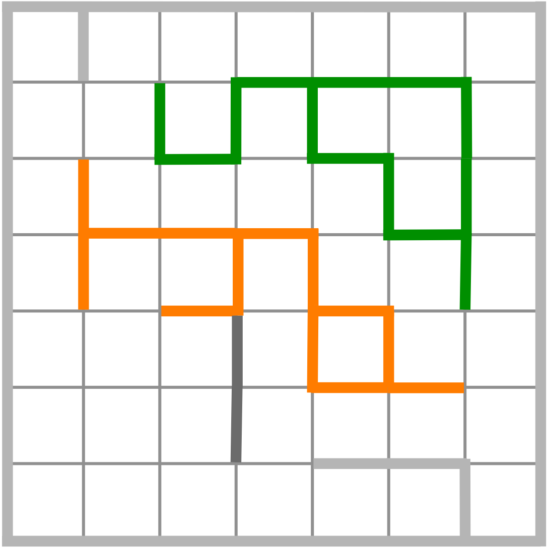


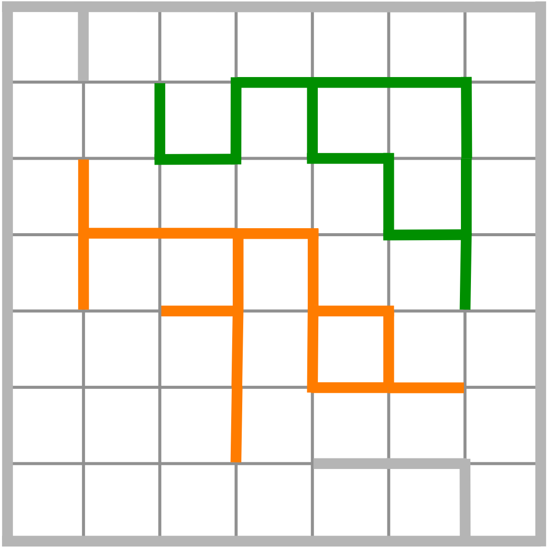


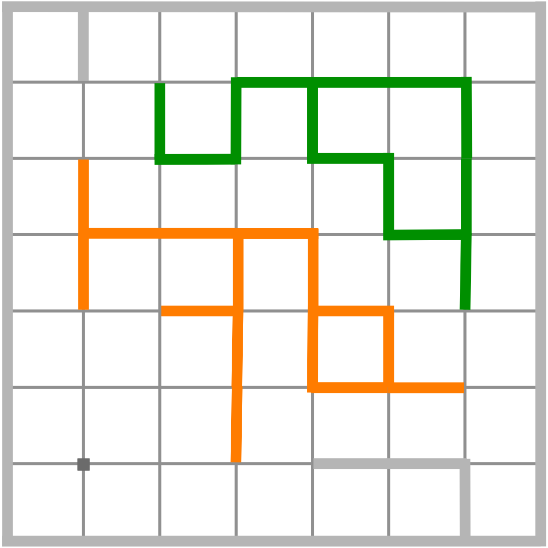


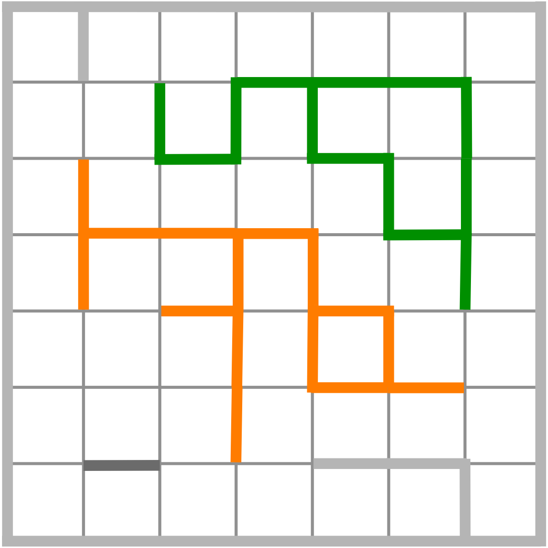


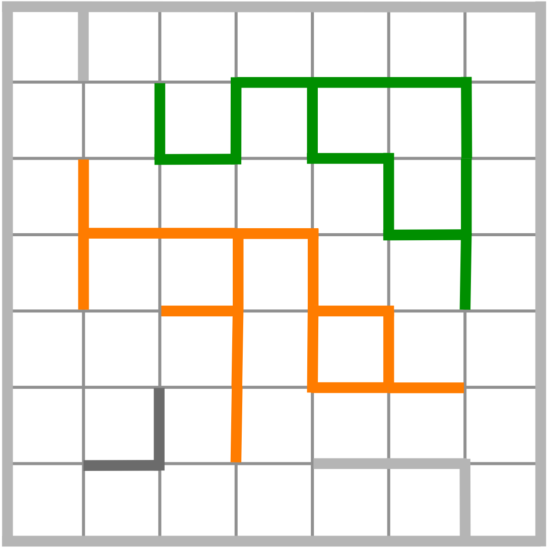


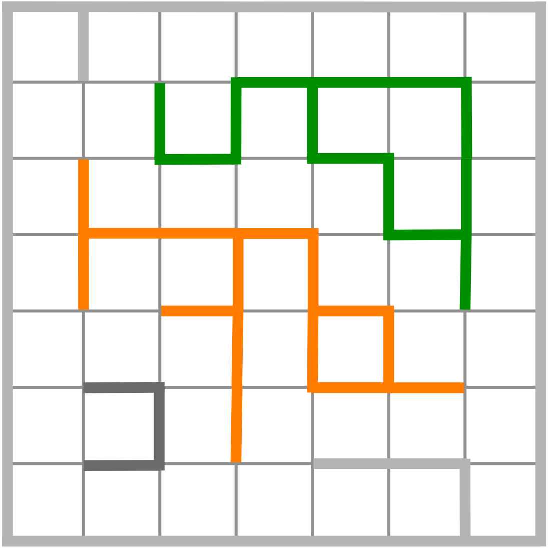


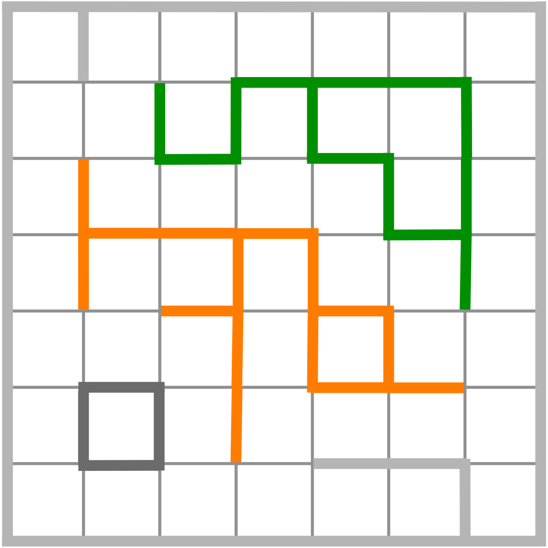


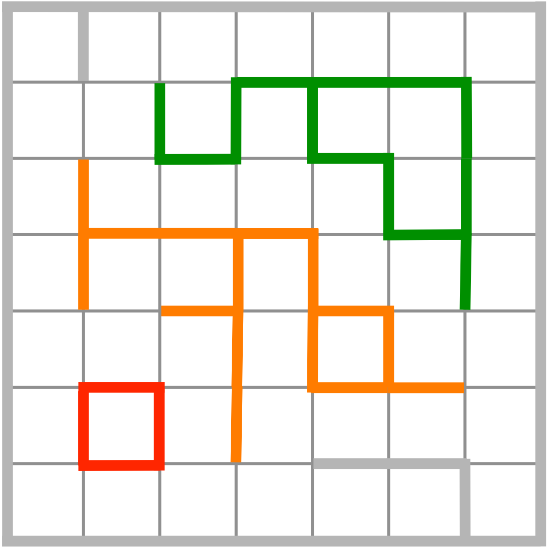


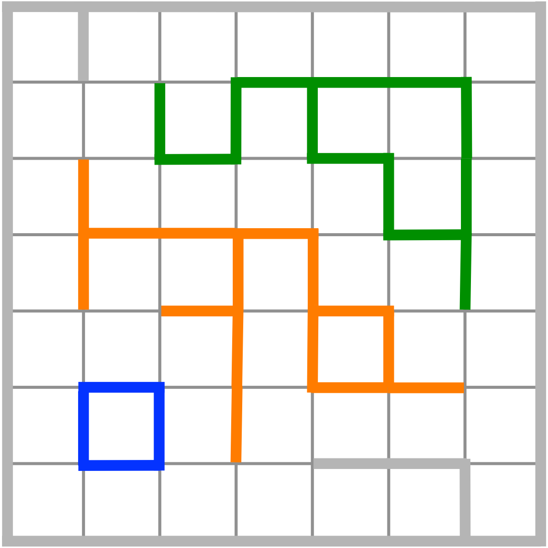


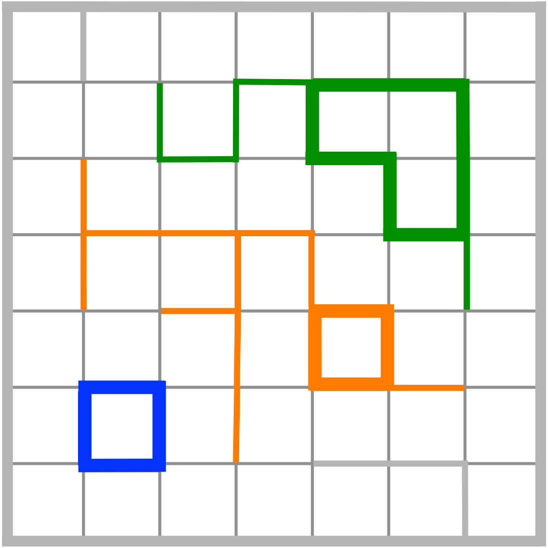












- Il s'agit d'une **forêt couvrante d'unicycles**.

Theorem 2 (K., Kenyon)

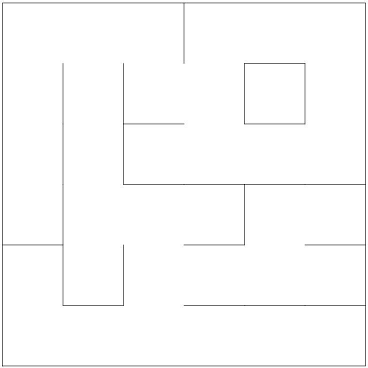
La forêt apparaît avec une probabilité proportionnelle au produit des poids α de ses boucles.

- C'est une généralisation de l'algorithme de Wilson pour les arbres couvrants.
- On comprend très bien la structure locale : processus déterminantal (pour une large famille de poids sur les cycles). Généralise le théorème de Burton et Pemantle.
- La structure globale est plus difficile à étudier.

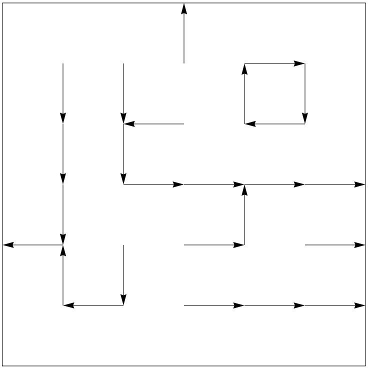
Champ de vecteurs aléatoire

Etant donné le réseau, on peut penser à la forêt couvrante d'unicycles comme à un **champ de vecteurs aléatoire** (avec des bassins d'attraction et des orbites périodiques).

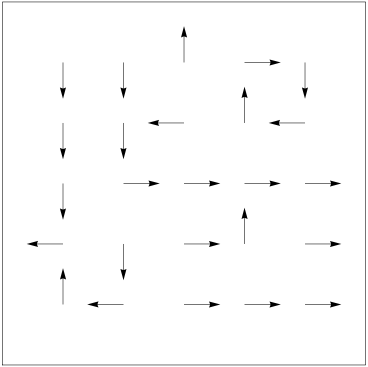
Champ de vecteurs aléatoire



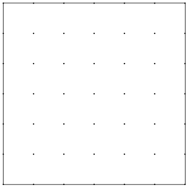
Champ de vecteurs aléatoire



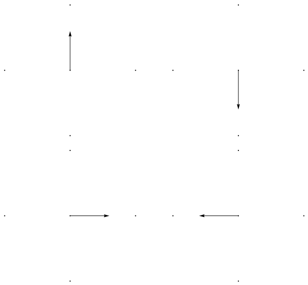
Champ de vecteurs aléatoire



Espace discrétisé :



Vecteurs :



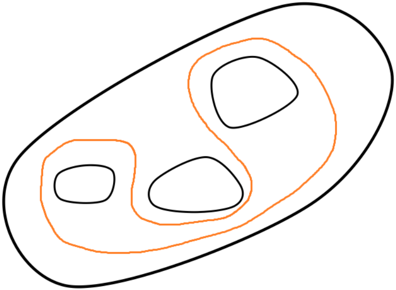
Information locale ne permet pas de répondre aux questions :

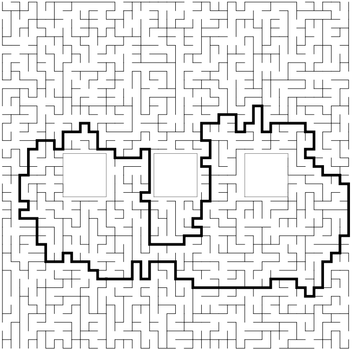
- e est-elle dans une orbite ?
- e et e' sont-elles dans la même composante ?
- e et e' sont-elles dans la même orbite ?

Pour cela, on a besoin :

- de statistiques globales,
- càd, d'étudier la topologie des boucles aléatoires.

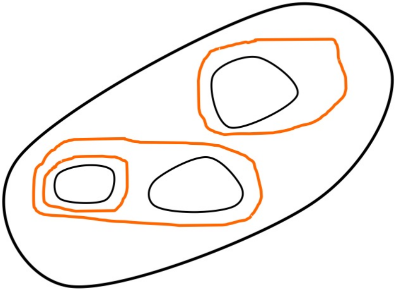
Quelle est la probabilité pour qu'un cycle ait cette topologie ?





Pour étudier cette question, on s'intéresse à la mesure uniforme sur les forêts couvrantes d'unicycles non-contractiles dans le domaine D.

Quelle est la probabilité pour que les cycles aient cette topologie ?



Pour répondre à cette question, on utilise la théorie des représentation de groupes de surface dans SU_2 (connexions plates).

Soit $\mathcal{L}$ l'espace des **laminations**, c'est-à-dire, l'espace des classes d'homotopies de multi-boucles dans D.

Pour répondre à cette question, on utilise la théorie des représentation de groupes de surface dans SU_2 (connexions plates).

Soit $\mathcal{L}$ l'espace des **laminations**, c'est-à-dire, l'espace des classes d'homotopies de multi-boucles dans D.

- Pour toute connexion plate φ, on a (Kenyon 11)

$$\det \Delta_\varphi = \sum_{L \in \mathcal{L}} N_L \, T_L(\varphi)\,,$$

  où N_L est le nombre de forêts couvrantes d'unicycles qui définissent la même lamination L et $T_L(\varphi)$ une fonction ne dépendant que de la surface.

Pour répondre à cette question, on utilise la théorie des représentation de groupes de surface dans SU_2 (connexions plates).

Soit $\mathcal{L}$ l'espace des **laminations**, c'est-à-dire, l'espace des classes d'homotopies de multi-boucles dans D.

- Pour toute connexion plate φ, on a (Kenyon 11)

$$\det \Delta_\varphi = \sum_{L \in \mathcal{L}} N_L \, T_L(\varphi) \, ,$$

  où N_L est le nombre de forêts couvrantes d'unicycles qui définissent la même lamination L et $T_L(\varphi)$ une fonction ne dépendant que de la surface.
- La probabilité, pour la mesure uniforme $\mathbb{P}$ sur les multi-boucles non-contractiles, d'une lamination L est

$$\mathbb{P}(L) = \frac{N_L}{\sum_{L' \in \mathcal{L}} N_{L'}} \, .$$

Soit $\mathcal{M}$ l'espace des connexions plates sur D. On complète l'espace des fonctions réelles sur $\mathcal{M}$ en un espace de Hilbert.

Soit $\mathcal{M}$ l'espace des connexions plates sur D. On complète l'espace des fonctions réelles sur $\mathcal{M}$ en un espace de Hilbert.

- C'est l'espace L^2 associé à une mesure sur $\mathcal{M}$ qui provient de la mesure de Haar sur SU_2.
- Cette mesure est donnée par

$$dh = \frac{\sin 2u}{4\pi^2}\, du\, dr\, ds\,,$$

où

$$\begin{pmatrix} e^{ir}\cos u & e^{is}\sin u \\ -e^{is}\sin u & e^{ir}\cos u \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{M}$ l'espace des connexions plates sur D. On complète l'espace des fonctions réelles sur $\mathcal{M}$ en un espace de Hilbert.

- C'est l'espace L^2 associé à une mesure sur $\mathcal{M}$ qui provient de la mesure de Haar sur SU_2.
- Cette mesure est donnée par

$$dh = \frac{\sin 2u}{4\pi^2}\, du\, dr\, ds\,,$$

  où

$$\begin{pmatrix} e^{ir}\cos u & e^{is}\sin u \\ -e^{is}\sin u & e^{ir}\cos u \end{pmatrix}.$$

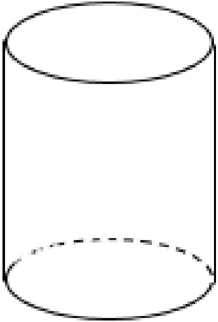
- Les fonctions T_L forment une base de $L^2(\mathcal{M})$ (Fock et Goncharov 06, Durhuus 80)
- On peut extraire le coefficient N_L de $\det \Delta_\varphi$ en intégrant sur les valeurs de φ.

On peut passer à la limite lorsque la maille du réseau tend vers zéro.

III. La mesure sur les boucles d'une surface.

Exemple d'un cylindre (un anneau dans le plan)

Considérons un cylindre de hauteur τ et circonférence 1.



Exemple d'un cylindre

La série génératrice de la distribution du nombre de boucles k est donnée par

$$\mathbb{E}\left(X^k\right) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{q^j + q^{-j} - 2 + X}{q^j + q^{-j} - 1},$$

où $q = e^{\pi/\tau}$.

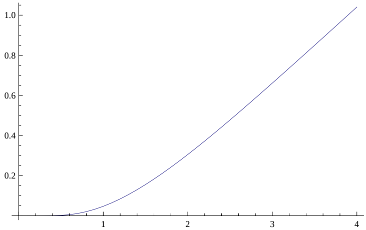


Figure: Valeur moyenne du nombre de boucles en fonction de τ

Soit D une surface non simplement connexe.
Soit Ω l'espace métrique des multiboucles de D.
Soit $\mathcal{G}_n$ une suite de graphes dans $\mathbb{Z}^2/n$ qui approche D.
Soit $\mathbb{P}_n$ la mesure uniforme sur les configurations non-contractiles.

Théorème 3 (K., Kenyon)

Il existe une mesure de probabilités $\mathbb{P}$ sur Ω telle que

$$\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}$$

faiblement. $\mathbb{P}$ ne dépend que de D.

Travaux précédents sur les limites d'échelle de la marche aléatoire à boucles effacées et SLE : Schramm, Lawler, Werner, Kenyon, Wilson, Aizenman, Burchard, Newman, ...

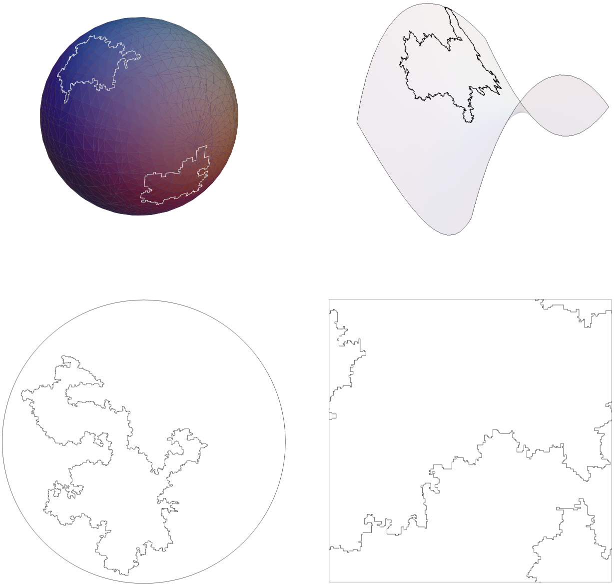


Figure: Zoologie associée à cette mesure

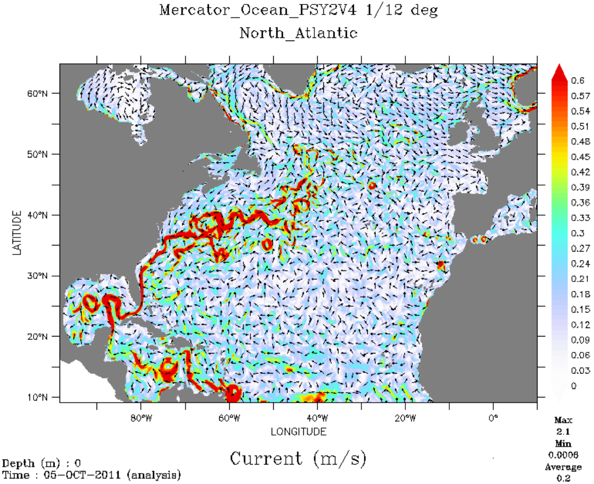
Physique et géométrie

Cette mesure apparait dans la théorie quantique des champs et la géométrie aléatoire en deux dimensions.

Cette construction, reprise et étendue par Benoist et Dubédat, répond partiellement à une conjecture de Kontsevich et Suhov sur l'existence d'une famille à un paramètre de mesures (infinies) sur les boucles de toute surface de Riemann (appelées mesures de Malliavin) : une pour chaque valeur de la dimension fractale. La mesure que nous venons d'étudier correspond à la dimension $5/4$. L'autre exemple connu d'une telle mesure correspond à la dimension fractale $4/3$ (Werner).

Afin d'illustrer le lien avec la géométrie aléatoire en deux dimensions, utilisons une image météorologique.

Représentation sous forme d'un champ de vecteurs discret



Problème de géométrie aléatoire

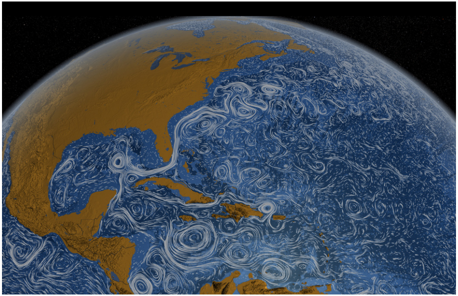


Figure: Les courants marins de surface dans l'Atlantique Nord. *Source: NASA, Perpetual Ocean*

- À quoi ressemble la trajectoire d'une particule dans un flot déterminé aléatoirement ?
- Quelle est la géométrie des orbites périodiques ?

Conclusion

Problèmes ouverts

- Mesure sur d'autres boucles fractales ?
- Exposants critiques du tas de sable ?
- Si l'on ne suppose plus la planarité du réseau ? Dimension supérieure ?

Merci de votre attention