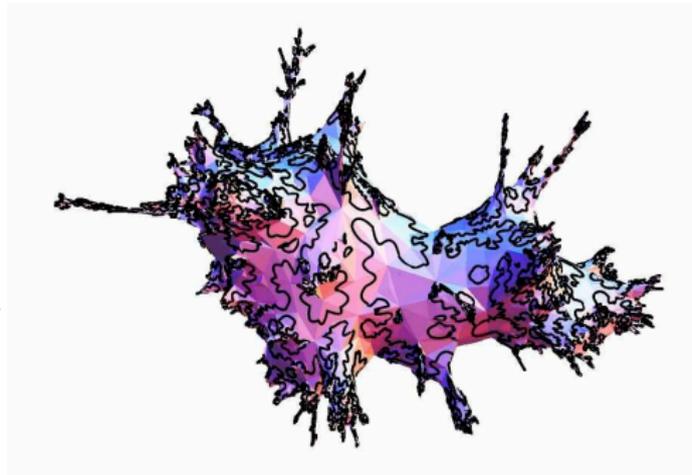
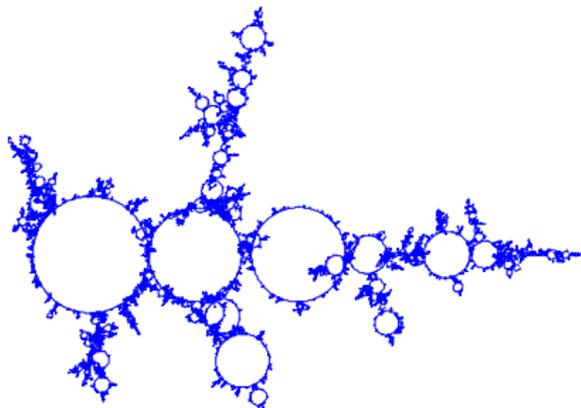


Percolation sur des triangulations aléatoires et arbraboucles



Igor Kortchemski (travail avec Nicolas Curien)
DMA – École Normale Supérieure – Paris

Journées MAS – Toulouse – Août 2014

Plan

I. LIMITES D'ÉCHELLE D'ARBRES DE GALTON–WATSON DE VARIANCE INFINIE

II. ARBRABOUCLES ALÉATOIRES

III. ARBRABOUCLES ET PERCOLATION SUR LES TRIANGULATIONS ALÉATOIRES

Motivations



I. LIMITES D'ÉCHELLE D'ARBRES DE GALTON–WATSON DE VARIANCE INFINIE



II. ARBRABOUCLES ALÉATOIRES

III. ARBRABOUCLES ET PERCOLATION SUR LES TRIANGULATIONS ALÉATOIRES

Limites d'échelle : domaine d'attraction d'une loi stable

On fixe $\alpha \in (1, 2)$. Soit $(\mu_i)_{i \geq 0}$ une loi de reproduction telle que

$$\sum_{i \geq 0} i \mu_i = 1 \quad (\mu \text{ est critique})$$

$$\mu_i \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{c}{i^{1+\alpha}} \quad (\mu \text{ a une queue lourde})$$

Limites d'échelle : domaine d'attraction d'une loi stable

On fixe $\alpha \in (1, 2)$. Soit $(\mu_i)_{i \geq 0}$ une loi de reproduction telle que

$$\sum_{i \geq 0} i \mu_i = 1 \quad (\mu \text{ est critique})$$

$$\mu_i \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{c}{i^{1+\alpha}} \quad (\mu \text{ a une queue lourde})$$

Soit t_n un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

Limites d'échelle : domaine d'attraction d'une loi stable

On fixe $\alpha \in (1, 2)$. Soit $(\mu_i)_{i \geq 0}$ une loi de reproduction telle que

$$\sum_{i \geq 0} i \mu_i = 1 \quad (\mu \text{ est critique})$$

$$\mu_i \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{c}{i^{1+\alpha}} \quad (\mu \text{ a une queue lourde})$$

Soit t_n un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

On munit t_n de la distance de graphe (chaque arête a longueur unité), et on voit t_n comme un **espace métrique compact**.

Limites d'échelle : domaine d'attraction d'une loi stable

On fixe $\alpha \in (1, 2)$. Soit $(\mu_i)_{i \geq 0}$ une loi de reproduction telle que

$$\sum_{i \geq 0} i \mu_i = 1 \quad (\mu \text{ est critique})$$

$$\mu_i \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{c}{i^{1+\alpha}} \quad (\mu \text{ a une queue lourde})$$

Soit t_n un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

On munit t_n de la distance de graphe (chaque arête a longueur unité), et on voit t_n comme un **espace métrique compact**.

À quoi ressemble t_n pour n grand ?

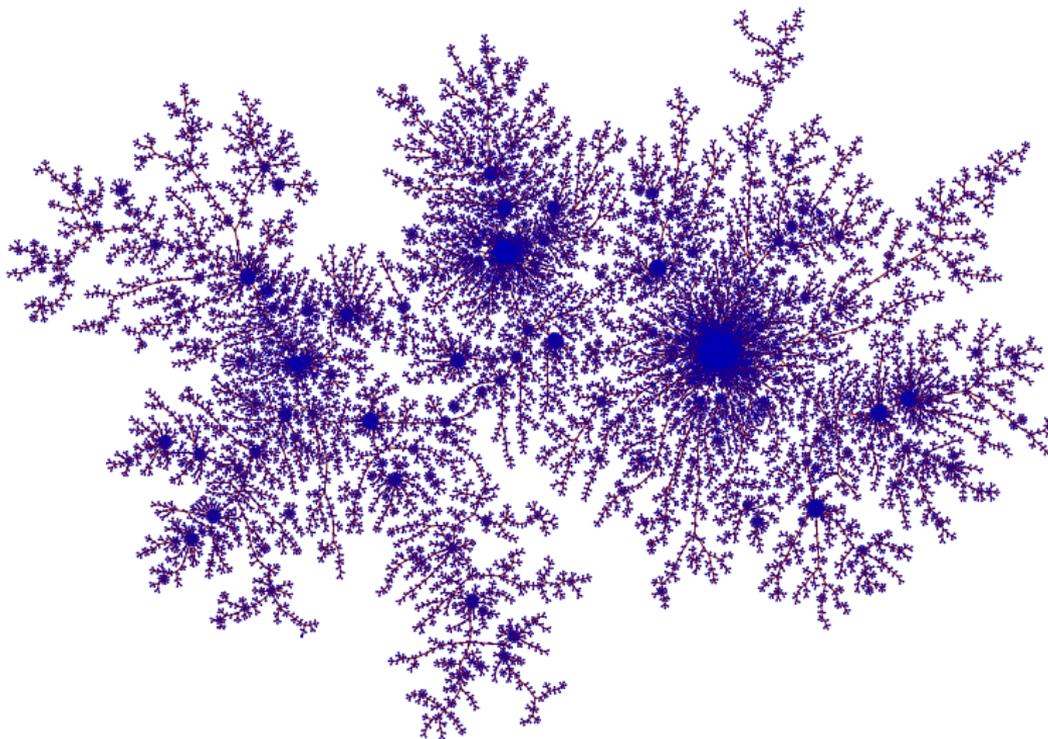


Figure: Un grand $\alpha = 1.1$ – arbre stable

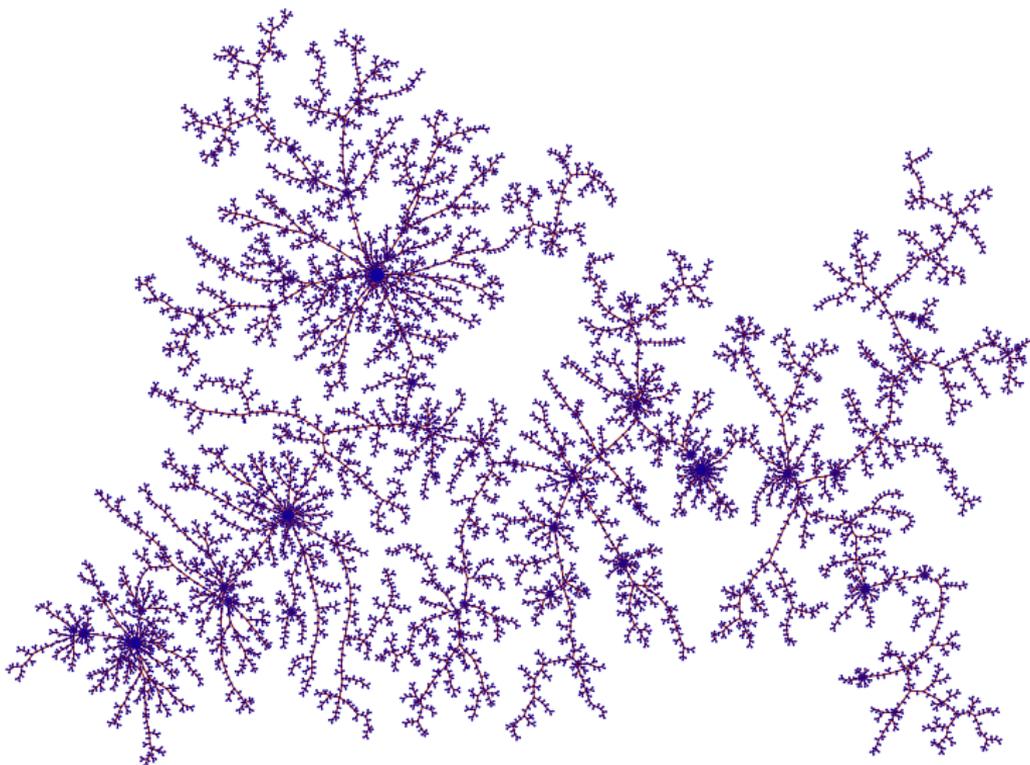


Figure: Un grand $\alpha = 1.5$ – arbre stable

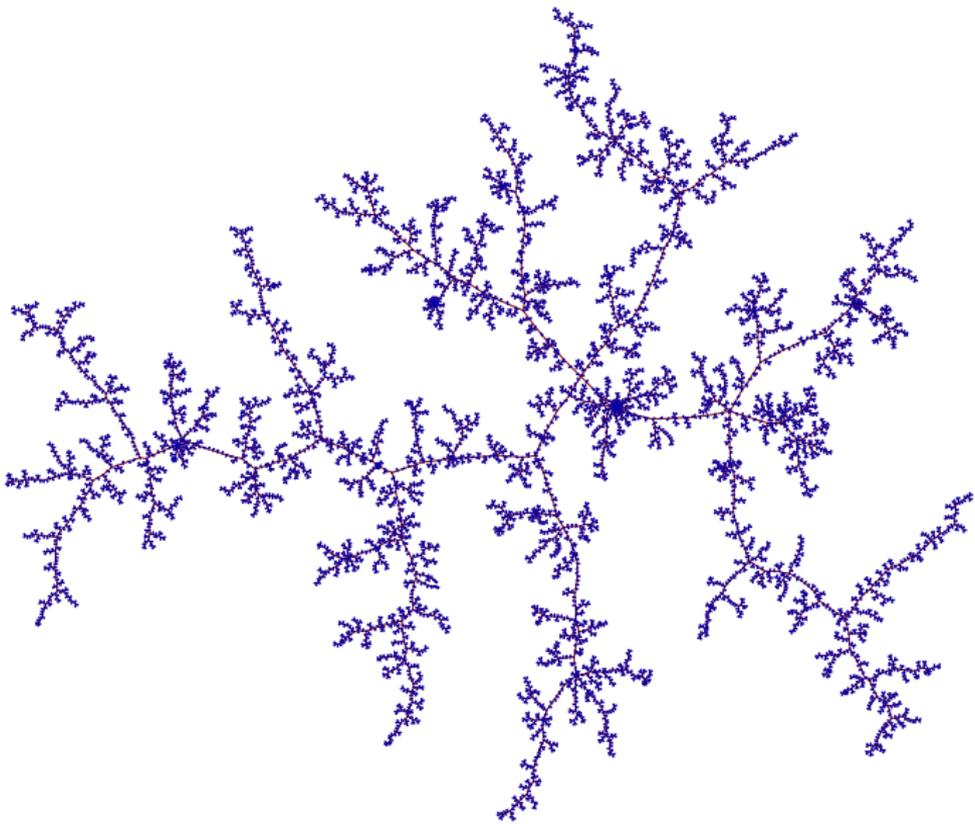


Figure: Un grand $\alpha = 1.9$ – arbre stable

Limites d'échelle : domaine d'attraction d'une loi stable

On fixe $\alpha \in (1, 2)$. Soit μ une loi de reproduction critique telle que $\mu_i \sim c/i^{1+\alpha}$.

Soit t_n un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

On voit t_n comme un **espace métrique compact**.

Limites d'échelle : domaine d'attraction d'une loi stable

On fixe $\alpha \in (1, 2)$. Soit μ une loi de reproduction critique telle que $\mu_i \sim c/i^{1+\alpha}$.

Soit t_n un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

On voit t_n comme un **espace métrique compact**.

Théorème (Duquesne)

Il existe un espace métrique compact aléatoire \mathcal{T}_α tel qu'on ait :

$$\frac{c'}{n^{1-1/\alpha}} \cdot t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{T}_\alpha,$$

Limites d'échelle : domaine d'attraction d'une loi stable

On fixe $\alpha \in (1, 2)$. Soit μ une loi de reproduction critique telle que $\mu_i \sim c/i^{1+\alpha}$.

Soit t_n un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

On voit t_n comme un **espace métrique compact**.

Théorème (Duquesne)

Il existe un espace métrique compact aléatoire \mathcal{T}_α tel qu'on ait :

$$\frac{c'}{n^{1-1/\alpha}} \cdot t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{T}_\alpha,$$

où la convergence a lieu en loi pour la distance de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts.

Limites d'échelle : domaine d'attraction d'une loi stable

On fixe $\alpha \in (1, 2)$. Soit μ une loi de reproduction critique telle que $\mu_i \sim c/i^{1+\alpha}$. Soit t_n un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

On voit t_n comme un **espace métrique compact**.

Théorème (Duquesne)

Il existe un espace métrique compact aléatoire \mathcal{T}_α tel qu'on ait :

$$\frac{c'}{n^{1-1/\alpha}} \cdot t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{T}_\alpha,$$

où la convergence a lieu en loi pour la distance de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts.

L'arbre \mathcal{T}_α est appelé arbre stable d'indice α (introduit par Le Gall & Le Jan).

Limites d'échelle : domaine d'attraction d'une loi stable

On fixe $\alpha \in (1, 2)$. Soit μ une loi de reproduction critique telle que $\mu_i \sim c/i^{1+\alpha}$.
Soit t_n un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

On voit t_n comme un **espace métrique compact**.

Théorème (Duquesne)

Il existe un espace métrique compact aléatoire \mathcal{T}_α tel qu'on ait :

$$\frac{c'}{n^{1-1/\alpha}} \cdot t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{T}_\alpha,$$

où la convergence a lieu en loi pour la distance de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts.

Remarques

$\wedge \rightarrow \mathcal{T}_2$ est l'arbre brownien.

Limites d'échelle : domaine d'attraction d'une loi stable

On fixe $\alpha \in (1, 2)$. Soit μ une loi de reproduction critique telle que $\mu_i \sim c/i^{1+\alpha}$. Soit t_n un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

On voit t_n comme un **espace métrique compact**.

Théorème (Duquesne)

Il existe un espace métrique compact aléatoire \mathcal{T}_α tel qu'on ait :

$$\frac{c'}{n^{1-1/\alpha}} \cdot t_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{T}_\alpha,$$

où la convergence a lieu en loi pour la distance de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts.

Remarques

\curvearrowright \mathcal{T}_2 est l'arbre brownien.

\curvearrowright Le degré maximal de t_n est de l'ordre de $n^{1/\alpha}$.

La distance de Gromov–Hausdorff

Soient X, Y deux espaces métriques compacts.

La distance de Gromov–Hausdorff

Soient X, Y deux espaces métriques compacts.

La distance de Gromov–Hausdorff entre X et Y est la plus petite distance de Hausdorff entre tous les plongements possibles entre X et Y dans un même espace métrique compact Z .

I. LIMITES D'ÉCHELLE D'ARBRES DE GALTON–WATSON DE VARIANCE INFINIE

II. ARBRABOUCLES ALÉATOIRES



III. ARBRABOUCLES ET PERCOLATION SUR LES TRIANGULATIONS ALÉATOIRES

Arbraboucles discrets

Si τ est un arbre **plan**, $\text{Loop}(\tau)$ est le graphe obtenu à partir de τ :

Arbraboucles discrets

Si τ est un arbre **plan**, $\text{Loop}(\tau)$ est le graphe obtenu à partir de τ :

 en remplaçant chaque sommet u par une boucle avec $\text{deg}(u)$ sommets,

Arbraboucles discrets

Si τ est un arbre **plan**, $\text{Loop}(\tau)$ est le graphe obtenu à partir de τ :

- ☞ en remplaçant chaque sommet u par une boucle avec $\text{deg}(u)$ sommets,
- ☞ puis en recollant les boucles suivant la structure d'arbre de τ .

Arbraboucles discrets

Si τ est un **arbre plan**, $\text{Loop}(\tau)$ est le graphe obtenu à partir de τ :

- ☞ en remplaçant chaque sommet u par une boucle avec $\deg(u)$ sommets,
- ☞ puis en recollant les boucles suivant la structure d'**arbre** de τ .

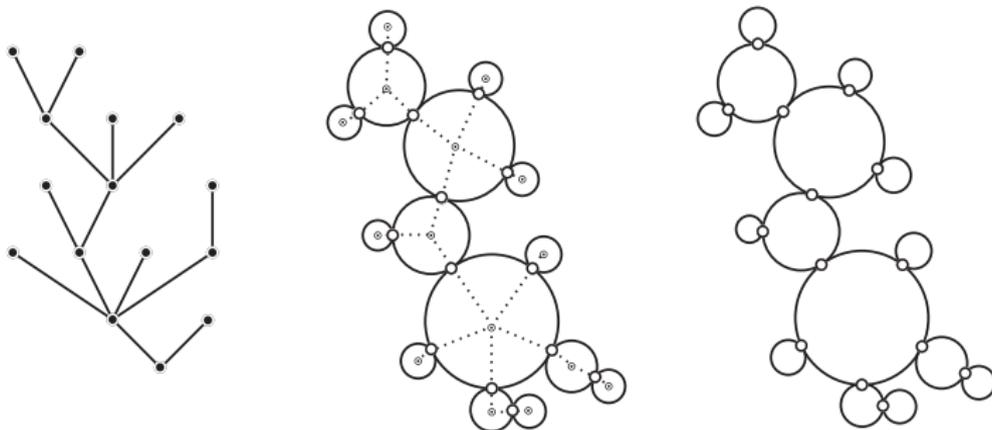


Figure: Un **arbre** τ et son arbraboucle $\text{Loop}(\tau)$ associé.

Arbraboucles discrets

Si τ est un **arbre plan**, $\text{Loop}(\tau)$ est le graphe obtenu à partir de τ :

- ☞ en remplaçant chaque sommet u par une boucle avec $\deg(u)$ sommets,
- ☞ puis en recollant les boucles suivant la structure d'**arbre** de τ .

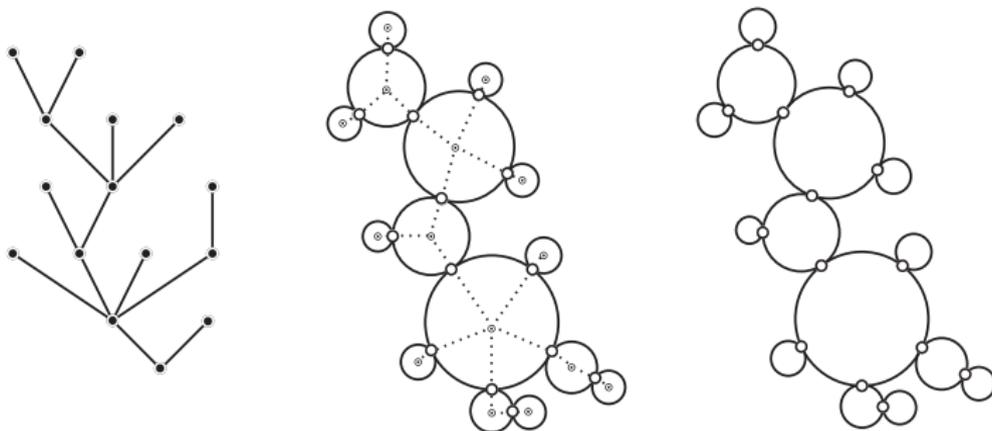


Figure: Un **arbre** τ et son arbraboucle $\text{Loop}(\tau)$ associé.

On munit $\text{Loop}(\tau)$ de la distance de graphe, et on voit $\text{Loop}(\tau)$ comme un espace métrique compact.

Des arbraboucles discrets aux arbraboucles continus

Soient $\alpha \in (1, 2)$ et μ une loi de reproduction critique telle que $\mu_i \sim c/i^{1+\alpha}$.

Des arbraboucles discrets aux arbraboucles continus

Soient $\alpha \in (1, 2)$ et μ une loi de reproduction critique telle que $\mu_i \sim c/i^{1+\alpha}$.
Soit t_n un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

Des arbraboucles discrets aux arbraboucles continus

Soient $\alpha \in (1, 2)$ et μ une loi de reproduction critique telle que $\mu_i \sim c/i^{1+\alpha}$.
Soit \mathbf{t}_n un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

Théorème (Curien & K.).

Il existe un espace métrique compact aléatoire \mathcal{L}_α tel que :

$$\frac{c'}{n^{1/\alpha}} \cdot \text{Loop}(\mathbf{t}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_\alpha,$$

Des arbraboucles discrets aux arbraboucles continus

Soient $\alpha \in (1, 2)$ et μ une loi de reproduction critique telle que $\mu_i \sim c/i^{1+\alpha}$.
Soit \mathbf{t}_n un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

Théorème (Curien & K.).

Il existe un espace métrique compact aléatoire \mathcal{L}_α tel que :

$$\frac{c'}{n^{1/\alpha}} \cdot \text{Loop}(\mathbf{t}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_\alpha,$$

où la convergence a lieu en loi pour la distance de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts.

Des arbraboucles discrets aux arbraboucles continus

Soient $\alpha \in (1, 2)$ et μ une loi de reproduction critique telle que $\mu_i \sim c/i^{1+\alpha}$.
Soit \mathbf{t}_n un GW_μ arbre conditionné à avoir n sommets.

Théorème (Curien & K.).

Il existe un espace métrique compact aléatoire \mathcal{L}_α tel que :

$$\frac{c'}{n^{1/\alpha}} \cdot \text{Loop}(\mathbf{t}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathcal{L}_\alpha,$$

où la convergence a lieu en loi pour la distance de Gromov-Hausdorff sur les espaces métriques compacts.

\mathcal{L}_α est appelé **arbraboucle aléatoire** stable d'indice α .

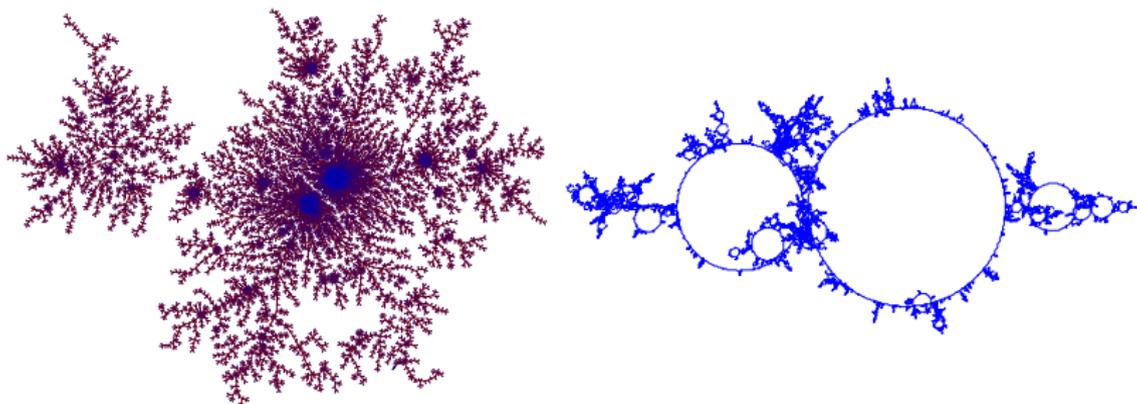


Figure: Un grand $\alpha = 1.1$ arbre et son arbraboucle associé.

I. LIMITES D'ÉCHELLE D'ARBRES DE GALTON–WATSON DE VARIANCE INFINIE

II. ARBRABOUCLES ALÉATOIRES

III. ARBRABOUCLES ET PERCOLATION SUR LES TRIANGULATIONS ALÉATOIRES



LA TRIANGULATION ALÉATOIRE INFINIE DU PLAN



Définitions

On rappelle qu'une **carte** est un graphe fini connexe plongé proprement dans la sphère (à déformations continues près préservant l'orientation).

Définitions

On rappelle qu'une **carte** est un graphe fini connexe plongé proprement dans la sphère (à déformations continues près préservant l'orientation). C'est une **triangulation** lorsque toutes les faces sont des triangles.

Définitions

On rappelle qu'une **carte** est un graphe fini connexe plongé proprement dans la sphère (à déformations continues près préservant l'orientation). C'est une **triangulation** lorsque toutes les faces sont des triangles.

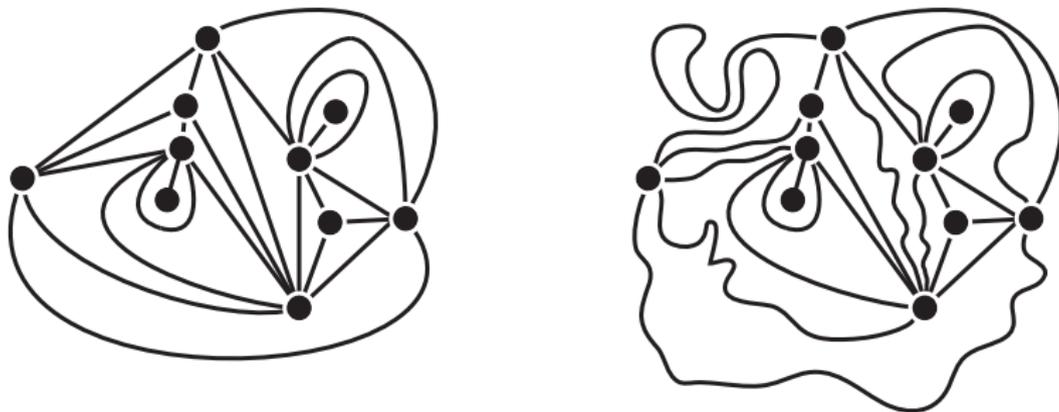


Figure: Deux triangulations identiques.

Définitions

On rappelle qu'une **carte** est un graphe fini connexe plongé proprement dans la sphère (à déformations continues près préservant l'orientation). C'est une **triangulation** lorsque toutes les faces sont des triangles. Elle est **enracinée** lorsqu'une arête orientée est distinguée.

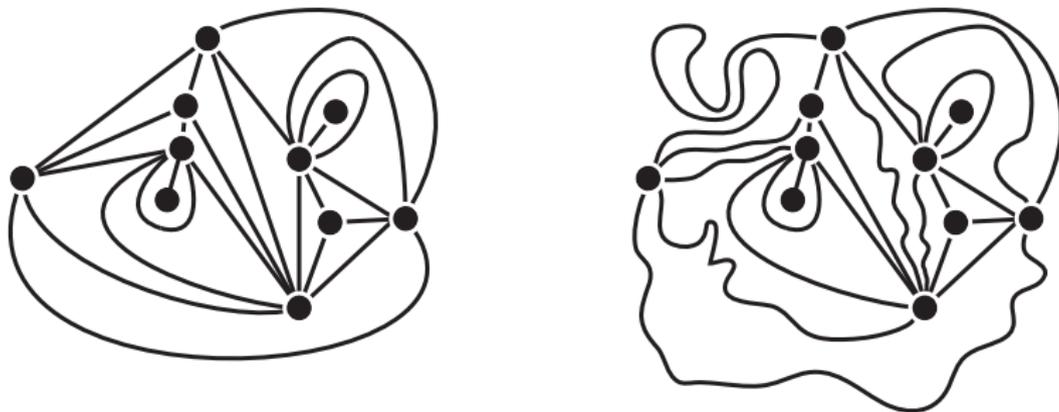


Figure: Deux triangulations identiques.

Définitions

On rappelle qu'une **carte** est un graphe fini connexe plongé proprement dans la sphère (à déformations continues près préservant l'orientation). C'est une **triangulation** lorsque toutes les faces sont des triangles. Elle est **enracinée** lorsqu'une arête orientée est distinguée.

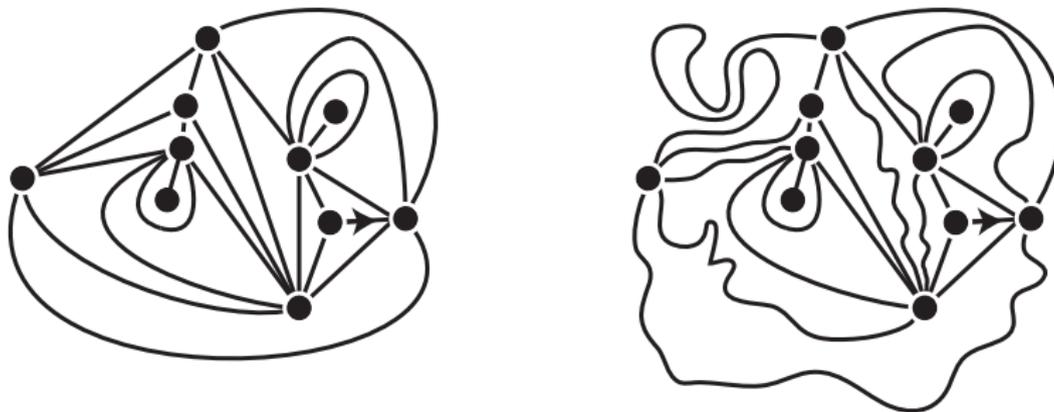


Figure: Deux triangulations enracinées identiques.

La triangulation aléatoire infinie du plan (UIPT)

Théorème (Angel & Schramm '02)

Soit T_n une triangulation aléatoire uniforme parmi les triangulations enracinées à n faces.

La triangulation aléatoire infinie du plan (UIPT)

Théorème (Angel & Schramm '02)

Soit T_n une triangulation aléatoire uniforme parmi les triangulations enracinées à n faces. Il existe une triangulation aléatoire infinie du plan (UIPT), notée T_∞ , telle que

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d, \text{loc})} T_\infty.$$

La triangulations aléatoire infinie du plan (UIPT)

Théorème (Angel & Schramm '02)

Soit T_n une triangulation aléatoire uniforme parmi les triangulations enracinées à n faces. Il existe une triangulation aléatoire infinie du plan (UIPT), notée T_∞ , telle que

$$T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d, \text{loc})} T_\infty.$$

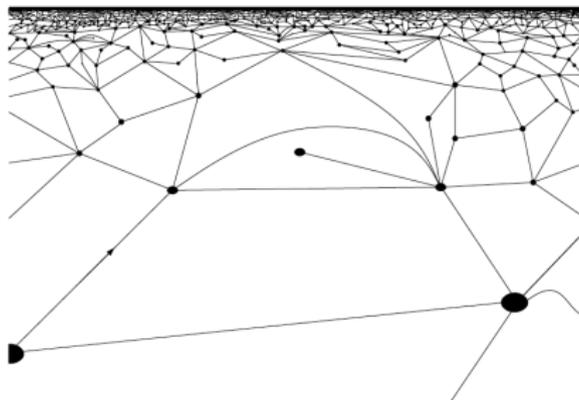


Figure: (N. Curien) : une vue artistique de l'UIPQ.

PERCOLATION SUR L' **UIPT**



Percolation sur l'UIPT

Conditionnellement à T_∞ , on effectue une percolation par sites de paramètre $p \in (0, 1)$

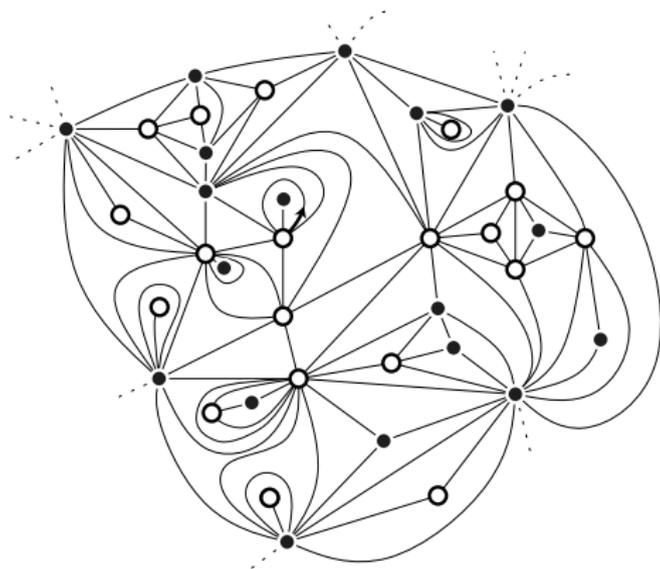


Figure: Une réalisation de la percolation par sites sur l'UIPT.

Percolation sur l'UIPT

Conditionnellement à T_∞ , on effectue une percolation par sites de paramètre $p \in (0, 1)$ avec un conditionnement particulier pour la racine.

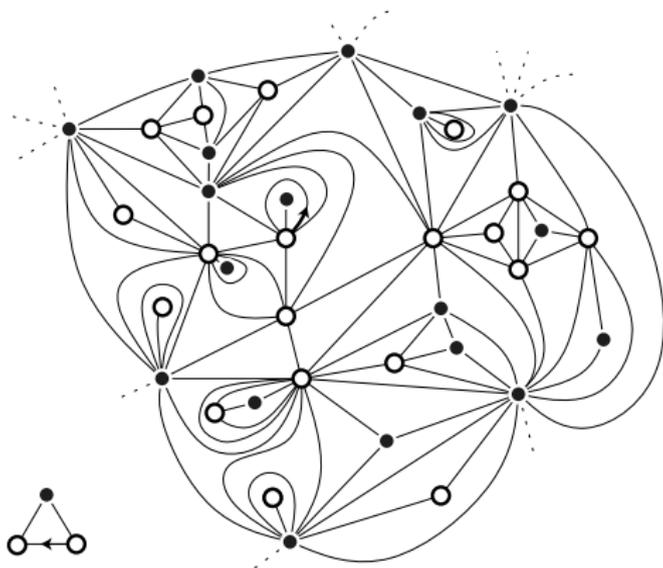


Figure: Une réalisation de la percolation par sites sur l'UIPT.

Percolation sur l'UIT

Conditionnellement à T_∞ , on effectue une percolation par sites de paramètre $p \in (0, 1)$ avec un conditionnement particulier pour la racine.

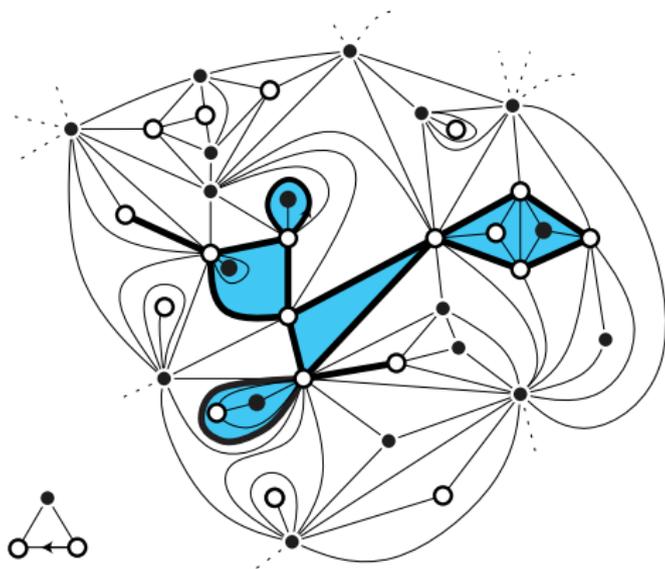


Figure: La composante connexe de l'origine.

Percolation sur l'UIT

Conditionnellement à T_∞ , on effectue une percolation par sites de paramètre $p \in (0, 1)$ avec un conditionnement particulier pour la racine.

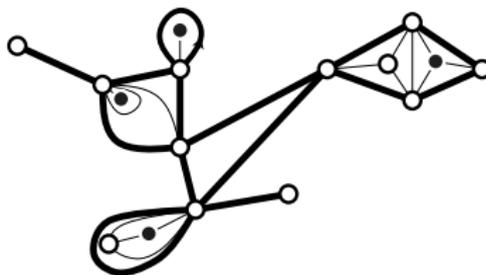


Figure: La composante connexe de l'origine, notée \mathcal{H} .

Percolation sur l'UIT

Conditionnellement à T_∞ , on effectue une percolation par sites de paramètre $p \in (0, 1)$ avec un conditionnement particulier pour la racine.

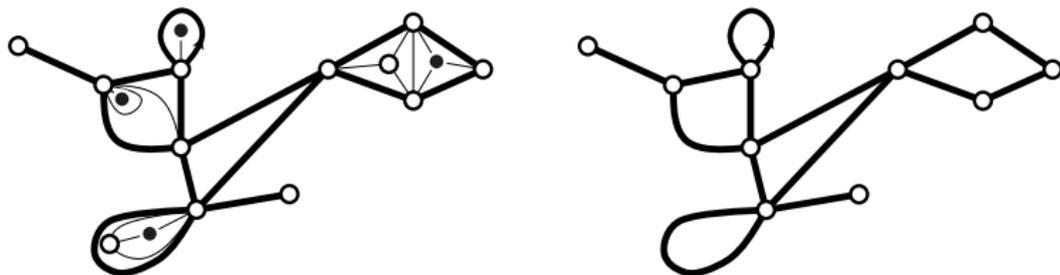


Figure: La composante connexe de l'origine \mathcal{H} et son bord, noté $\partial\mathcal{H}$.

Percolation sur l'UIT

Conditionnellement à T_∞ , on effectue une percolation par sites de paramètre $p \in (0, 1)$ avec un conditionnement particulier pour la racine.

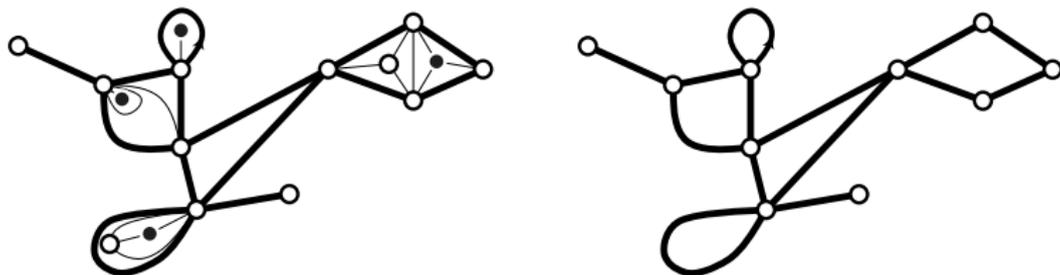


Figure: La composante connexe de l'origine \mathcal{H} et son bord, noté $\partial\mathcal{H}$.

Par définition, $\#\partial\mathcal{H}$ est le nombre de **demi-arêtes** sur $\partial\mathcal{H}$.

Percolation sur l'UIT

Conditionnellement à T_∞ , on effectue une percolation par sites de paramètre $p \in (0, 1)$ avec un conditionnement particulier pour la racine.

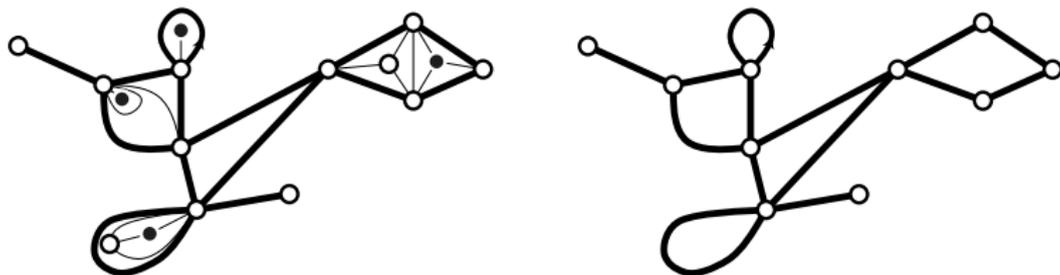


Figure: La composante connexe de l'origine \mathcal{H} et son bord, noté $\partial\mathcal{H}$.

Par définition, $\#\partial\mathcal{H}$ est le nombre de **demi-arêtes** sur $\partial\mathcal{H}$. Ici, $\#\partial\mathcal{H} = 16$.

Percolation sur l'UIT

Conditionnellement à T_∞ , on effectue une percolation par sites de paramètre $p \in (0, 1)$ avec un conditionnement particulier pour la racine.

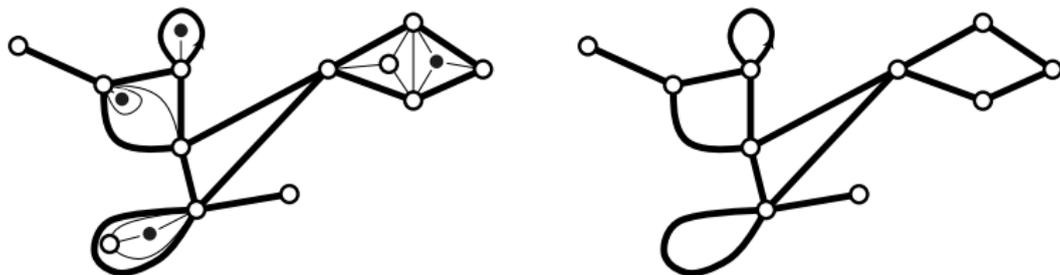


Figure: La composante connexe de l'origine \mathcal{H} et son bord, noté $\partial\mathcal{H}$.

Par définition, $\#\partial\mathcal{H}$ est le nombre de **demi-arêtes** sur $\partial\mathcal{H}$. Ici, $\#\partial\mathcal{H} = 16$.

On voit $\partial\mathcal{H}$ comme un espace métrique compact.

On fixe $p \in (0, 1)$, et pour $m \geq 1$ on note $\partial\mathcal{H}_m^{(p)}$ le bord de la composante connexe de l'origine, conditionnée à avoir taille m , c'est-à-dire la variable aléatoire $\partial\mathcal{H}^{(p)}$ conditionnée par l'événement $\{\#\partial\mathcal{H} = m\}$.

On fixe $p \in (0, 1)$, et pour $m \geq 1$ on note $\partial\mathcal{H}_m^{(p)}$ le bord de la composante connexe de l'origine, conditionnée à avoir taille m , c'est-à-dire la variable aléatoire $\partial\mathcal{H}^{(p)}$ conditionnée par l'événement $\{\#\partial\mathcal{H} = m\}$.

Théorème (Curien & K.).

$$\text{Quand } 0 < p < 1/2, \quad m^{-1/2} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(p)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)}$$

$$\text{quand } p = 1/2, \quad m^{-2/3} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(1/2)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)}$$

$$\text{quand } 1/2 < p < 1, \quad m^{-1} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(p)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)}$$

On fixe $p \in (0, 1)$, et pour $m \geq 1$ on note $\partial\mathcal{H}_m^{(p)}$ le bord de la composante connexe de l'origine, conditionnée à avoir taille m , c'est-à-dire la variable aléatoire $\partial\mathcal{H}^{(p)}$ conditionnée par l'événement $\{\#\partial\mathcal{H} = m\}$.

Théorème (Curien & K.).

$$\text{Quand } 0 < p < 1/2, \quad m^{-1/2} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(p)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} C_p \cdot \mathcal{J}_2,$$

$$\text{quand } p = 1/2, \quad m^{-2/3} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(1/2)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)}$$

$$\text{quand } 1/2 < p < 1, \quad m^{-1} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(p)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)}$$

On fixe $p \in (0, 1)$, et pour $m \geq 1$ on note $\partial\mathcal{H}_m^{(p)}$ le bord de la composante connexe de l'origine, conditionnée à avoir taille m , c'est-à-dire la variable aléatoire $\partial\mathcal{H}^{(p)}$ conditionnée par l'événement $\{\#\partial\mathcal{H} = m\}$.

Théorème (Curien & K.).

$$\text{Quand } 0 < p < 1/2, \quad m^{-1/2} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(p)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} C_p \cdot \mathcal{J}_2,$$

$$\text{quand } p = 1/2, \quad m^{-2/3} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(1/2)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} 3^{1/3} \cdot \mathcal{L}_{3/2},$$

$$\text{quand } 1/2 < p < 1, \quad m^{-1} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(p)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)}$$

On fixe $p \in (0, 1)$, et pour $m \geq 1$ on note $\partial\mathcal{H}_m^{(p)}$ le bord de la composante connexe de l'origine, conditionnée à avoir taille m , c'est-à-dire la variable aléatoire $\partial\mathcal{H}^{(p)}$ conditionnée par l'événement $\{\#\partial\mathcal{H} = m\}$.

Théorème (Curien & K.).

$$\text{Quand } 0 < p < 1/2, \quad m^{-1/2} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(p)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} C_p \cdot \mathcal{J}_2,$$

$$\text{quand } p = 1/2, \quad m^{-2/3} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(1/2)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} 3^{1/3} \cdot \mathcal{L}_{3/2},$$

$$\text{quand } 1/2 < p < 1, \quad m^{-1} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(p)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} \frac{2p-1}{\sqrt{3-1+2p}} \cdot \mathcal{C}_1.$$

On fixe $p \in (0, 1)$, et pour $m \geq 1$ on note $\partial\mathcal{H}_m^{(p)}$ le bord de la composante connexe de l'origine, conditionnée à avoir taille m , c'est-à-dire la variable aléatoire $\partial\mathcal{H}^{(p)}$ conditionnée par l'événement $\{\#\partial\mathcal{H} = m\}$.

Théorème (Curien & K.).

$$\text{Quand } 0 < p < 1/2, \quad m^{-1/2} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(p)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} C_p \cdot \mathcal{J}_2,$$

$$\text{quand } p = 1/2, \quad m^{-2/3} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(1/2)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} 3^{1/3} \cdot \mathcal{L}_{3/2},$$

$$\text{quand } 1/2 < p < 1, \quad m^{-1} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(p)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} \frac{2p-1}{\sqrt{3-1+2p}} \cdot \mathcal{C}_1.$$

avec une constante C_p explicite

On fixe $p \in (0, 1)$, et pour $m \geq 1$ on note $\partial\mathcal{H}_m^{(p)}$ le bord de la composante connexe de l'origine, conditionnée à avoir taille m , c'est-à-dire la variable aléatoire $\partial\mathcal{H}^{(p)}$ conditionnée par l'événement $\{\#\partial\mathcal{H} = m\}$.

Théorème (Curien & K.).

$$\text{Quand } 0 < p < 1/2, \quad m^{-1/2} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(p)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} C_p \cdot \mathcal{J}_2,$$

$$\text{quand } p = 1/2, \quad m^{-2/3} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(1/2)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} 3^{1/3} \cdot \mathcal{L}_{3/2},$$

$$\text{quand } 1/2 < p < 1, \quad m^{-1} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(p)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} \frac{2p-1}{\sqrt{3-1+2p}} \cdot \mathcal{C}_1.$$

avec une constante C_p explicite telle que

$$C_p \underset{p \uparrow 1/2}{\sim} \frac{3^{3/4}}{8} \cdot \frac{1}{(1/2 - p)^{1/2}}.$$

On fixe $p \in (0, 1)$, et pour $m \geq 1$ on note $\partial\mathcal{H}_m^{(p)}$ le bord de la composante connexe de l'origine, conditionnée à avoir taille m , c'est-à-dire la variable aléatoire $\partial\mathcal{H}^{(p)}$ conditionnée par l'événement $\{\#\partial\mathcal{H} = m\}$.

Théorème (Curien & K.).

$$\text{Quand } 0 < p < 1/2, \quad m^{-1/2} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(p)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} C_p \cdot \mathcal{J}_2,$$

$$\text{quand } p = 1/2, \quad m^{-2/3} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(1/2)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} 3^{1/3} \cdot \mathcal{L}_{3/2},$$

$$\text{quand } 1/2 < p < 1, \quad m^{-1} \cdot \partial\mathcal{H}_m^{(p)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{(d)} \frac{2p-1}{\sqrt{3-1+2p}} \cdot \mathcal{C}_1.$$

avec une constante C_p explicite telle que

$$C_p \underset{p \uparrow 1/2}{\sim} \frac{3^{3/4}}{8} \cdot \frac{1}{(1/2 - p)^{1/2}}.$$

Remarque

 Angel a prouvé que $p_c = 1/2$.

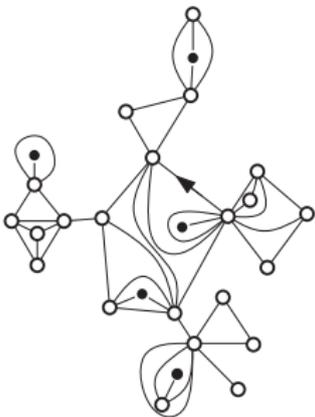
Théorème (Curien & K.).

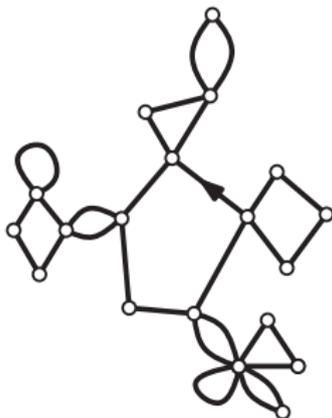
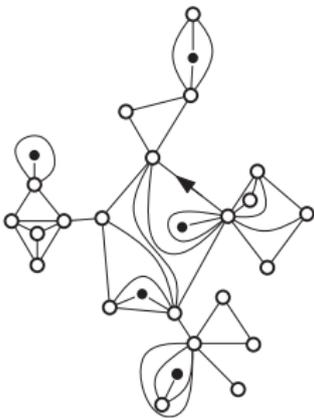
On a :

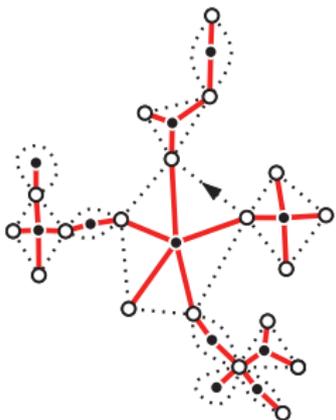
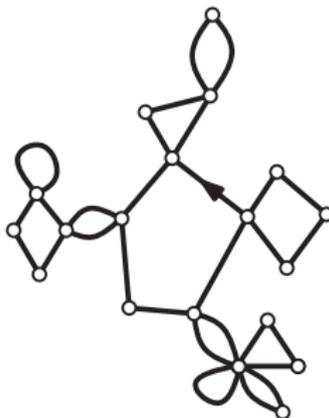
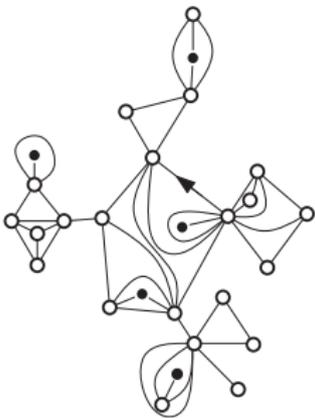
$$\mathbb{P}(\#\partial\mathcal{H}^{(1/2)} = m) \underset{m \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{2 \cdot |\Gamma(-2/3)|^3} \cdot m^{-4/3}.$$

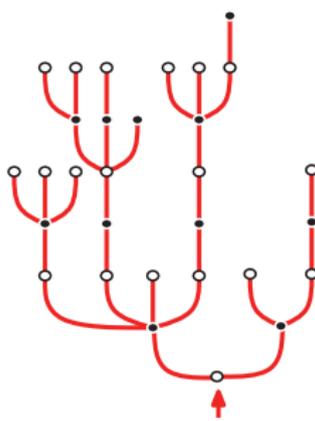
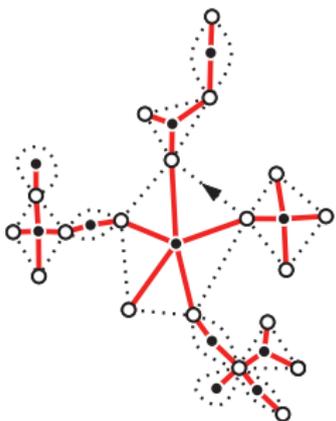
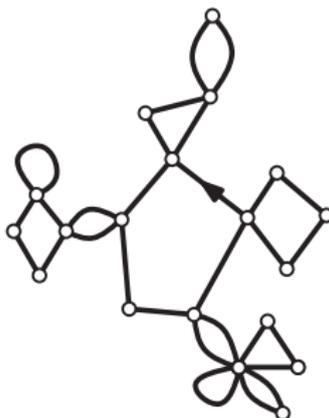
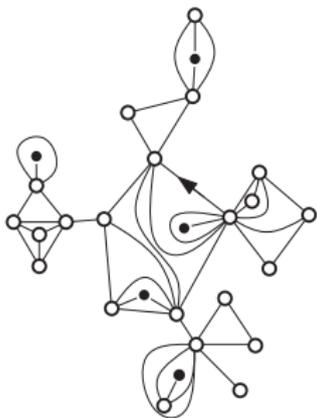
IDÉE DE PREUVE : ARBRES DE GALTON-WATSON











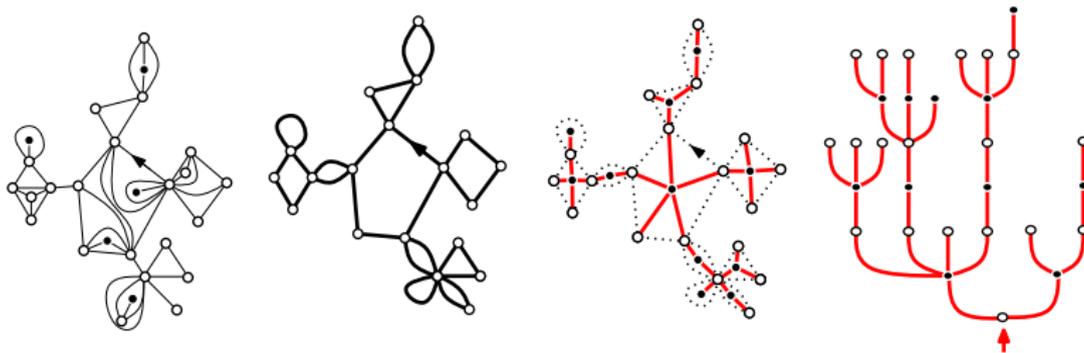


Figure: Construction d'un arbre de Galton-Watson bi-type $\text{Tree}(\partial\mathcal{H})$.

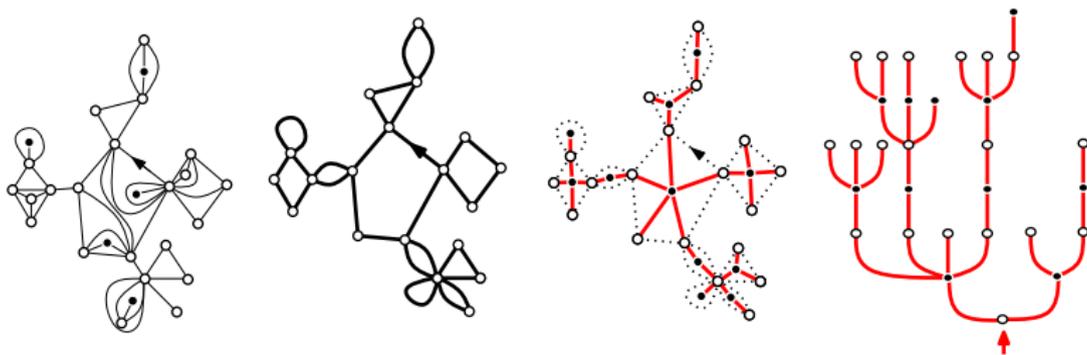


Figure: Construction d'un arbre de Galton-Watson bi-type $\text{Tree}(\partial\mathcal{H})$.

Proposition clé (Curien & K.).

L'arbre $\text{Tree}(\partial\mathcal{H}_m^{(p)})$ est un arbre de GW bi-type

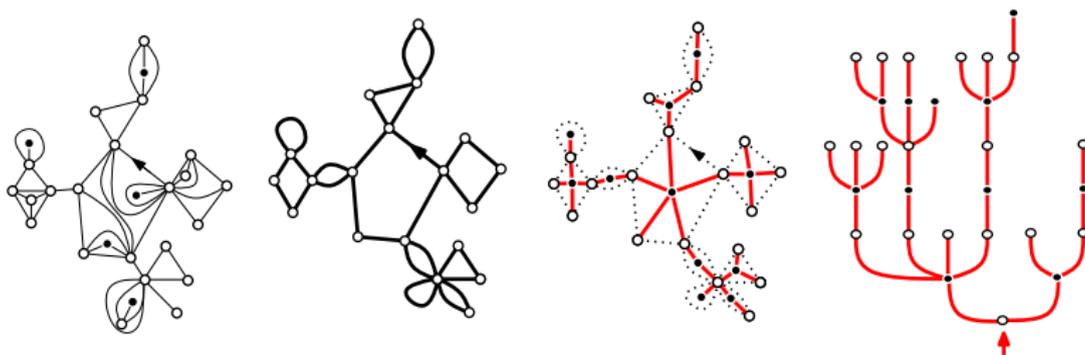


Figure: Construction d'un arbre de Galton-Watson bi-type $\text{Tree}(\partial\mathcal{H})$.

Proposition clé (Curien & K.).

L'arbre $\text{Tree}(\partial\mathcal{H}_m^{(p)})$ est un arbre de GW bi-type, conditionné à avoir $m + 1$ sommets

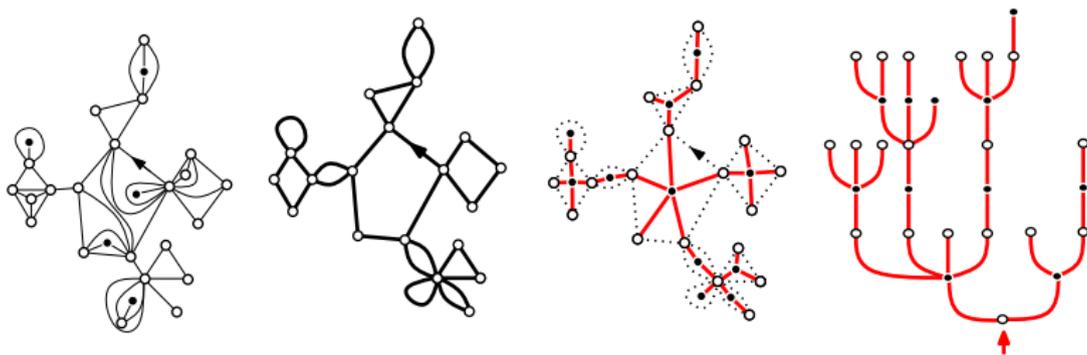


Figure: Construction d'un arbre de Galton-Watson bi-type $\text{Tree}(\partial\mathcal{H})$.

Proposition clé (Curien & K.).

L'arbre $\text{Tree}(\partial\mathcal{H}_m^{(p)})$ est un arbre de GW bi-type, conditionné à avoir $m + 1$ sommets, de lois de reproductions *explicités* notées $\mu_o^{(p)}$ et μ_\bullet .

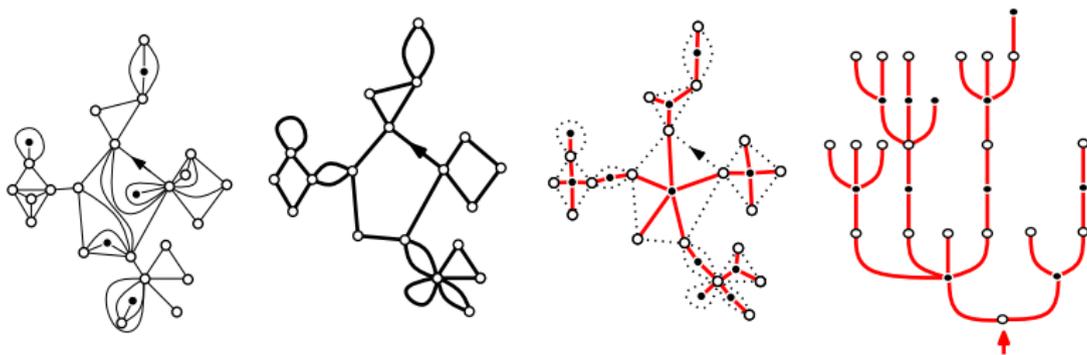
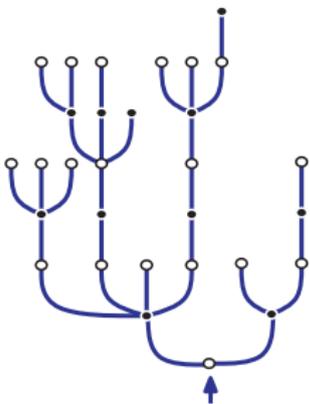


Figure: Construction d'un arbre de Galton-Watson bi-type $\text{Tree}(\partial\mathcal{H})$.

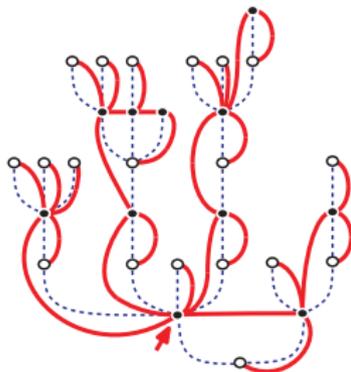
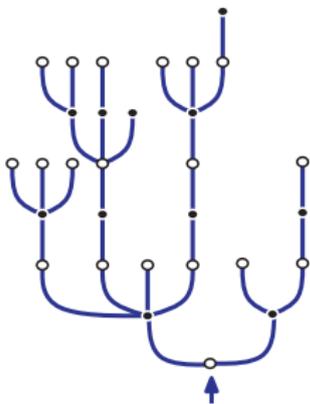
Proposition clé (Curien & K.).

L'arbre $\text{Tree}(\partial\mathcal{H}_m^{(p)})$ est un arbre de GW bi-type, conditionné à avoir $m + 1$ sommets, de lois de reproductions *explicités* notées $\mu_o^{(p)}$ et μ_\bullet . De plus $\mu_o^{(p)}$ est une loi géométrique.

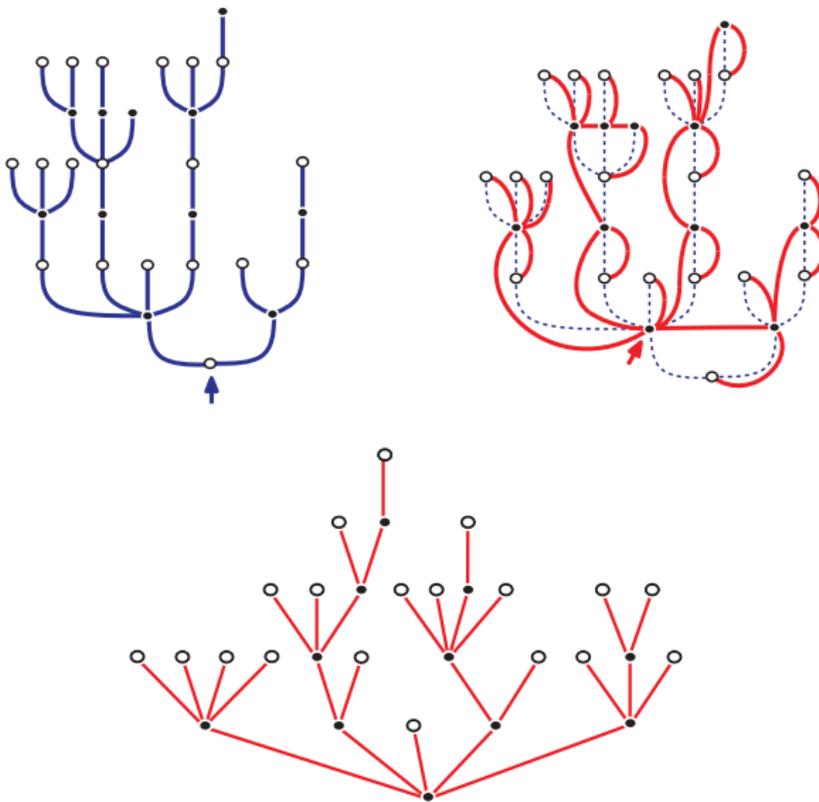
Vers un arbre de Galton–Watson uni-type



Vers un arbre de Galton–Watson uni-type



Vers un arbre de Galton–Watson uni-type



Vers un arbre de Galton–Watson uni-type

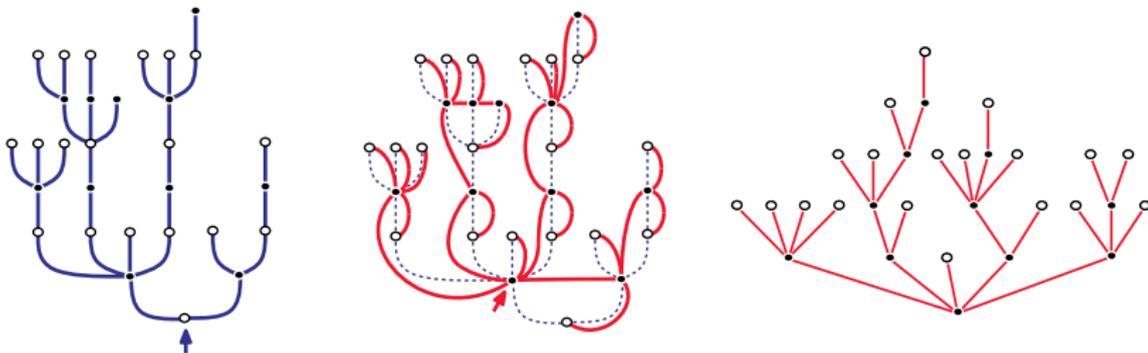


Figure: Construction due à Janson & Stefansson d'un arbre $\mathcal{G}(\tau)$ à partir d'un autre arbre τ .

Vers un arbre de Galton–Watson uni-type

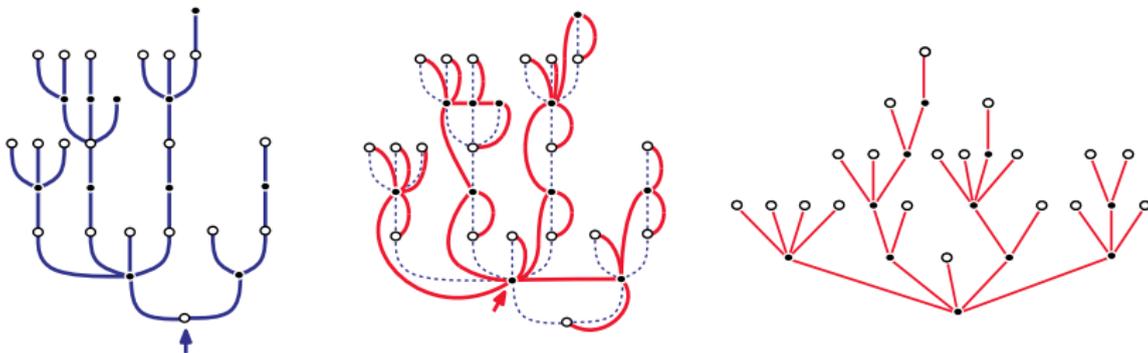


Figure: Construction due à Janson & Stefansson d'un arbre $\mathcal{G}(\tau)$ à partir d'un autre arbre τ .

Proposition (Janson & Stefansson)

Si \mathfrak{t} est un arbre de Galton–Watson bi-type tel que μ_o est géométrique, alors $\mathcal{G}(\mathfrak{t})$ est un arbre de Galton–Watson uni-type.

CONCLUSION



Proposition (Curien & K.).

L'arbre $\mathcal{G}(\mathbf{Tree}(\partial\mathcal{H}_m^{(p)}))$ est un arbre de Galton-Watson

Proposition (Curien & K.).

L'arbre $\mathcal{G}(\mathbf{Tree}(\partial\mathcal{H}_m^{(p)}))$ est un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir $m + 1$ sommets

Proposition (Curien & K.).

L'arbre $\mathcal{G}(\mathbf{Tree}(\partial\mathcal{H}_m^{(p)}))$ est un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir $m + 1$ sommets de loi de reproduction $\nu^{(p)}$ définie par :

$$\sum_{i \geq 0} \nu_i^{(p)} z^i = \frac{2p - 1 + \sqrt{3}z + (1 - z)^{3/2}}{2p - 1 + \sqrt{3}}.$$

Proposition (Curien & K.).

L'arbre $\mathcal{G}(\mathbf{Tree}(\partial\mathcal{H}_m^{(p)}))$ est un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir $m + 1$ sommets de loi de reproduction $\nu^{(p)}$ définie par :

$$\sum_{i \geq 0} \nu_i^{(p)} z^i = \frac{2p - 1 + \sqrt{3}z + (1 - z)^{3/2}}{2p - 1 + \sqrt{3}}.$$

↗ La moyenne de $\nu^{(p)}$ est $\frac{1}{1+2(p-1/2)/\sqrt{3}}$.

Proposition (Curien & K.).

L'arbre $\mathcal{G}(\mathbf{Tree}(\partial\mathcal{H}_m^{(p)}))$ est un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir $m + 1$ sommets de loi de reproduction $\nu^{(p)}$ définie par :

$$\sum_{i \geq 0} \nu_i^{(p)} z^i = \frac{2p - 1 + \sqrt{3}z + (1 - z)^{3/2}}{2p - 1 + \sqrt{3}}.$$

↗ La moyenne de $\nu^{(p)}$ est $\frac{1}{1+2(p-1/2)/\sqrt{3}}$.

↗ Lorsque $p = 1/2$, $\nu^{(1/2)}$ est **critique** et on a

$$\nu_i^{(1/2)} \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{i^{1+3/2}}.$$

Proposition (Curien & K.).

L'arbre $\mathcal{G}(\mathbf{Tree}(\partial\mathcal{H}_m^{(p)}))$ est un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir $m + 1$ sommets de loi de reproduction $\nu^{(p)}$ définie par :

$$\sum_{i \geq 0} \nu_i^{(p)} z^i = \frac{2p - 1 + \sqrt{3}z + (1 - z)^{3/2}}{2p - 1 + \sqrt{3}}.$$

↗ La moyenne de $\nu^{(p)}$ est $\frac{1}{1+2(p-1/2)/\sqrt{3}}$.

↗ Lorsque $p = 1/2$, $\nu^{(1/2)}$ est **critique** et on a

$$\nu_i^{(1/2)} \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{i^{1+3/2}}.$$

↗ Lorsque $p > 1/2$, $\nu^{(p)}$ est **sous-critique**. Il s'agit d'un arbre non générique : un phénomène de condensation a lieu (qui a été étudié par Jonsson & Stefansson, Janson, K.).

Proposition (Curien & K.).

L'arbre $\mathcal{G}(\mathbf{Tree}(\partial\mathcal{H}_m^{(p)}))$ est un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir $m + 1$ sommets de loi de reproduction $\nu^{(p)}$ définie par :

$$\sum_{i \geq 0} \nu_i^{(p)} z^i = \frac{2p - 1 + \sqrt{3}z + (1 - z)^{3/2}}{2p - 1 + \sqrt{3}}.$$

↗ La moyenne de $\nu^{(p)}$ est $\frac{1}{1+2(p-1/2)/\sqrt{3}}$.

↗ Lorsque $p = 1/2$, $\nu^{(1/2)}$ est **critique** et on a

$$\nu_i^{(1/2)} \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{i^{1+3/2}}.$$

↗ Lorsque $p > 1/2$, $\nu^{(p)}$ est **sous-critique**. Il s'agit d'un arbre non générique : un phénomène de condensation a lieu (qui a été étudié par Jonsson & Stefansson, Janson, K.).

↗ Lorsque $p < 1/2$, $\nu^{(p)}$ est **surcritique** et on est dans le cadre brownien.

Proposition (Curien & K.).

L'arbre $\mathcal{G}(\mathbf{Tree}(\partial\mathcal{H}_m^{(p)}))$ est un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir $m + 1$ sommets de loi de reproduction $\nu^{(p)}$ définie par :

$$\sum_{i \geq 0} \nu_i^{(p)} z^i = \frac{2p - 1 + \sqrt{3}z + (1 - z)^{3/2}}{2p - 1 + \sqrt{3}}.$$

↗ La moyenne de $\nu^{(p)}$ est $\frac{1}{1+2(p-1/2)/\sqrt{3}}$.

↗ Lorsque $p = 1/2$, $\nu^{(1/2)}$ est **critique** et on a

$$\nu_i^{(1/2)} \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{i^{1+3/2}}.$$

↗ Lorsque $p > 1/2$, $\nu^{(p)}$ est **sous-critique**. Il s'agit d'un arbre non générique : un phénomène de condensation a lieu (qui a été étudié par Jonsson & Stefansson, Janson, K.).

↗ Lorsque $p < 1/2$, $\nu^{(p)}$ est **surcritique** et on est dans le cadre brownien. Les théorèmes en découlent.