Approximation de Semigroupes markoviens

Journées MAS 2014

Vlad Bally et Clément Rey

École Nationale des Ponts et Chaussées

Université Paris-Est Marne-la-Vallé

reyc@cermics.enpc.fr

Outline

Introduction

Soit $T > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Grille de temps : $t_k = k\frac{T}{n}$. $(Z_k)_{k\in\{0,\cdot,n-1\}}$ suite de variables aléatoires indépendantes dans $\mathbb{R}^N$. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $\psi \in \mathcal{C}_b^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^N)$.

- Semigroupe de référence :
  $(\overline{X}_t)_{t\geqslant 0}$ processus de Markov dans $\mathbb{R}^d$.
- Semigroupe d'approximation :
  $(X_k)_{k\in\{0,\cdot,n-1\}}$ chaine de Markov : $X_{k+1} = \psi(X_k, \frac{Z_k}{\sqrt{n}})$.
- Erreur faible :

$$|\mathbb{E}[f(\overline{X}_T) - f(X_n)]| \leqslant \frac{C}{n^h}\mathcal{C}(f)$$

Outline

Semigroupes Markoviens-Definitions

- Semigroupe de référence
  - $(\overline{X}_t)_{t\geqslant 0}$ processus de Markov dans $\mathbb{R}^d$ et $\nu_k(x,dy)=\mathbb{P}(\overline{X}_{t_{k+1}}\in dy|\overline{X}_{t_k}=x)$.
  - Semigroupe Markovien : $Q_0 f(x)=f(x), \quad Q_{t_{k+1}}f(x)=\nu_k Q_{t_k}f(x)=\int_{\mathbb{R}^d} Q_{t_k}f(y)\nu_k(x,dy)$.
  - Interprétation probabiliste : $Q_{t_k}f(x)=\mathbb{E}[f(\overline{X}_{t_k})|\overline{X}_0=x]$.
- Semigroupe d'approximation
  - $(X_k)_{k\in\{0,\cdot,n-1\}}$ chaine de Markov : $X_{k+1}=\psi(X_k,\frac{Z_k}{\sqrt{n}})$ et $\mu_k(x,dy)=\mathbb{P}(X_{k+1}\in dy|X_k=x)$
  - Semigroupe Markovien : $P_0 f(x)=f(x), \quad P_{k+1}f(x)=\mu_k P_k f(x)=\int_{\mathbb{R}^d} P_k f(y)\mu_k(x,dy)$.
  - Interprétation probabiliste : $P_k f(x)=\mathbb{E}[f(X_k)|X_0=x]$

Hypothèses sur les Semigroupes ($\mathbf{H^p}$)

($\mathbf{H^p}$) $\Leftrightarrow$

- Semigroupe de référence
  - Pour tout k, $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^d)$: $Q_{t_k} f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|Q_{t_k} f\|_{p,\infty} \leqslant \|f\|_{p,\infty}$.
- Semigroupe d'approximation
  - Pour tout k, $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^d)$: $P_k f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|P_k f\|_{p,\infty} \leqslant \|f\|_{p,\infty}$
- Approximation en temps court $\Delta_k f(x) = (\nu_k - \mu_k) f(x)$

$$\Delta_k f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)(\nu_k - \mu_k)(x, dy)$$
$$= \mathbb{E}[f(\overline{X}_{t_{k+1}}) - f(X_{k+1}) | \overline{X}_{t_k} = X_k = x]$$

  - Erreur d'approximation : $\|\Delta_k f\|_\infty \leqslant \frac{C}{n^{h+1}} \|f\|_{p,\infty}$

Résultats préliminaires

De l'approximation en temps court $\|\Delta_k f\|_\infty \leqslant \frac{C}{n^{h+1}} \|f\|_{p,\infty}$, à l'approximation en temps long (1).

Théorème

On suppose que ($\mathbf{H^p}$) est vérifiée. Alors,

$$\sup_{k \leqslant n} |\mathbb{E}[f(X_k)] - \mathbb{E}[f(\overline{X}_{t_k})]| \leqslant \frac{C}{n^h} \|f\|_{p,\infty} \tag{1}$$

Preuve : Talay Tubaro (EDP), Lindenberg (Semigroupes)

Outline

Hypothèses sur les Semigroupes ($\mathbf{H_{reg}}$)

($\mathbf{H_{reg}}$) $\Leftrightarrow$

- Semigroupe de référence
  - Pour tout k, f mesurable bornée $x \mapsto Q_{t_k} f(x)$ est continue et $\|Q_{t_k} f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$
  - Régularisation : $\exists \eta > 0, \forall p \in \mathbb{N}, t_k > S, \quad \|Q_{t_k} f\|_{p,\infty} \leqslant \frac{C}{t_k^{\eta p}} \|f\|_\infty$
- Semigroupe d'approximation
  - Pour tout k, f mesurable bornée $x \mapsto P_k f(x)$ est continue et $\|P_k f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$
  - Régularisation duale : $\exists \eta > 0, \forall p \in \mathbb{N}, t_k > S, \quad \|P_k^* f\|_{p,\infty} \leqslant \frac{C}{t_k^{\eta p}} \|f\|_\infty$
- Erreur d'approximation en temps court
  - $\|\Delta_k f\|_\infty \leqslant \frac{C}{n^{h+1}} \|f\|_{p,\infty}$
  - Erreur duale : $|\langle g, \Delta_k f \rangle| \leqslant \frac{C}{n^{h+1}} \|g\|_{p,1} \|f\|_\infty$

Résultat principal

Bally, R.

On suppose que l'hypothèse ($\mathbf{H_{reg}}$) est vérifiée. Alors,

$$\sup_{3S \leqslant t_k \leqslant T} |\mathbb{E}[f(X_k)] - \mathbb{E}[f(\overline{X}_{t_k})]| \leqslant \frac{C}{n^h} \|f\|_\infty \qquad (2)$$

Preuve : Intégrations par parties

Hypothèses sur le Semigroupe d'approximation

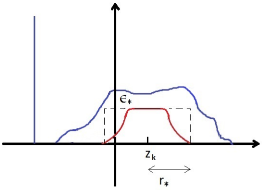
Rappel : $X_{k+1} = \psi(X_k, \frac{Z_k}{\sqrt{n}})$.

Hypothèse sur $(\mathbf{Z_k})_{\mathbf{k}\in\{\mathbf{1},\cdot,\mathbf{n-1}\}}$: La loi de chaque Z_k est bornée inférieurement par la mesure de Lebesgue $\ell(dz)$: $\exists (z_k)_{k\in\{1,\cdot,n\}} \in \mathbb{R}^N$ et $\epsilon_*, r_* > 0$ tels que

$$\forall A \subset \mathbb{R}^N, \quad \mathbb{P}(Z_k \in A \cap B_{r_*}(z_k)) \geqslant \epsilon_* \ell(A \cap B_{r_*}(z_k)) \qquad (3)$$

Alors, $Z_k = \chi_k U_k + (1-\chi_k)V_k$, χ_k suit la loi de Bernoulli, $U_k \sim \varphi_k(z)dz$ avec $\varphi_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad \varphi_k(z)|(\ln \varphi_k)^{(p)}(z)|^q \leqslant C_{q,p}(\epsilon_*, r_*)$$



Hypothèses sur le Semigroupe d'approximation

- Z_k bornées inférieurement par la mesure de Lebesgue
- Non dégénérescence :

$$\exists \lambda_* > 0, \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \inf_{|\xi|=1} \sum_{i=1}^{N} \langle \partial_{z_i} \psi(x, 0), \xi \rangle \geqslant \lambda_*$$

Alors (Malliavin adaptatif),

$$\exists \eta > 0, \forall p \in \mathbb{N}, t_k > S, \quad \|P_k^* f\|_{p,\infty} \leqslant \frac{C}{t_k^{\eta p}} \|f\|_\infty$$

Outline

Exemples

- Schéma d'Euler, $t_k = \frac{kT}{n}$.

$$\begin{aligned} d\overline{X}_t =& b(\overline{X}_t)dt + \sigma(\overline{X}_t)dW_t \\ X_{k+1} =& X_k + b(X_k)(t_{k+1} - t_k) + \sigma(X_k)\sqrt{t_{k+1} - t_k}Z_k \end{aligned}$$

avec b et σ réguliers.

  - $Z_k \sim \mathcal{N}(0,1)$.
  - $\psi(x,z) = x + b(x)\frac{1}{n} + \sigma(x)z, \quad \sigma \geqslant \lambda_* > 0$.

Alors,

$$|\mathbb{E}[f(\overline{X}_T) - f(X_n)]| \leqslant \frac{C}{n}\|f\|_\infty$$

Preuve initiale : Bally Talay

- Ninomiya-Victoir d'ordre 2 (Kusuoka), 3...

Outline

Conclusion

- Erreur faible pour diffusions régulières et fonction test mesurable bornée.
- Perspectives :
  - Diffusions à coefficients irréguliers : CIR, SABR...
  - Processus de Markov constants par morceaux.

Merci pour votre attention.