Autour du mouvement et du pont browniens unitaires en grande dimension

Mylène Maïda

Université Lille 1, Laboratoire Paul Painlevé

Journées MAS
Toulouse - 28 août 2014

Plan de l'exposé

- Le mouvement brownien unitaire
  - Présentation
  - Convergence vers le mouvement brownien multiplicatif libre
  - Propriétés de la mesure limite ν_t
- Motivations physiques
- Le pont brownien unitaire
  - Présentation
  - Rappel sur les processus déterminantaux
  - Convergence de la densité des valeurs propres
- Conclusion

Partie 1

Le mouvement brownien

sur le groupe unitaire

Définition du mouvement brownien unitaire

- point de vue EDS
  On peut définir un mouvement brownien sur le cercle $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$, en posant $U_1(t) = e^{iB(t)}$, avec B un mouvement brownien réel standard.
  Autrement dit, $dU_1(t) = idB(t)U_1(t) - \frac{1}{2}U_1(t)dt$

$$\text{Pour } N \geq 1, \quad dU_N(t) = dK_N(t)U_N(t) - \frac{1}{2}U_N(t)dt,$$

  avec K_N un mouvement brownien sur $\mathfrak{u}(N)$ muni du produit scalaire $(X, Y)_{\mathfrak{u}(N)} = N\mathrm{Tr}(X^*Y)$.
- point de vue Markov
  On considère Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $\mathcal{U}(N)$
  $[\forall X \in \mathfrak{u}(N), U \in \mathcal{U}(N), f : \mathcal{U}(N) \to \mathbb{R}, \mathcal{L}_X f(U) = \lim_{t\to 0} \frac{d}{dt} f(e^{tX}U)]$,
  $(U_N(t))_{t\geq 0}$ est le processus de Markov de générateur $\frac{1}{2}\Delta$.
- point de vue Lévy
  C'est un processus à accroissements (multiplicatifs) indépendants et stationnaires tel que $U_N(t)$ est de loi $Q_{N,t}m_N$.

Densité de la loi de $U_N(t)$

On rappelle que $U_1(t) = e^{iB(t)}$, avec B un mouvement brownien réel standard.

$$Q_{1,t}(e^{i\theta}) = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{(\theta+2k\pi)^2}{2t}} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{t}{2}\xi^2} e^{i\xi\theta}$$

Formule sommatoire de Poisson : si $\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} f(u)du$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \check{f}(x+2k\pi) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} f(\xi)e^{i\xi x}.$$

En dimension N,

$$Q_{N,t}(U) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^N_\downarrow} e^{-\frac{c_2(\alpha)t}{2N}} s_\alpha(I_N)\overline{s_\alpha(U)}, \text{ avec } \quad \Delta s_\alpha = -c_2(\alpha)s_\alpha$$

Convergence du m.b.u en grande dimension Méthode des moments (Biane, 97)

Si on note $\widehat{\mu}_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_{i,N}(t)}$, $\int_{\mathbb{U}} x^n d\widehat{\mu}_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \lambda_{i,N}(t)^n = \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(U_N(t)^n)$.

On cherche

$$\begin{aligned} c_n(t) &:= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\mathrm{Tr}((U_N(t))^n)\right] \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^N_{\downarrow}} e^{-\frac{c_2(\alpha)t}{2N}} s_\alpha(I_N) \int_{\mathcal{U}(N)} \overline{s_\alpha(U)}\mathrm{Tr}(U^n) dm_N(U). \end{aligned}$$

Or

$$p_n(x_1,\ldots,x_N) := \sum_{i=1}^N x_i^n = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r s_{(n-r,1,1,\ldots,1,0,\ldots,0)}(x_1,\ldots,x_N).$$

Ex : $p_2 := \sum x_i^2 = \sum_{i\leq j} x_i x_j - \sum_{i<j} x_i x_j = s_{(2)} - s_{(1,1)}$

$$\text{et} \quad \int_{\mathcal{U}(N)} \overline{s_\alpha(U)} s_\beta(U) dm_N(U) = \delta_{\alpha,\beta}\mathbf{1}_{\ell(\alpha)\leq N}.$$

Pour $\alpha(n,r,N) := (n-r,1,1,\dots,1,0,\dots,0)$ (avec $r < n \leq N$), on peut calculer explicitement

$$c_2(\alpha(n,r,N)) = Nn + n^2 - (2r+1)n$$

et

$$s_{\alpha(n,r,N)}(I_N) = \frac{(N+n-r-1)!}{(N-r-1)!r!n(n-r-1)!}$$

pour obtenir

Proposition (Biane, 97)

$$c_n(t) = e^{-\frac{nt}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{t^k}{k!} n^{k-1} \binom{n}{k+1} = e^{-\frac{nt}{2}} \frac{1}{n} L_{n-1}(nt).$$

Pour tout $t > 0$, on note ν_t la mesure de probabilité sur $\mathbb{U}$ telle que, pour tout $n \geq 0$, $\int z^{-n} d\nu_t(z) = \int z^n d\nu_t(z) = c_n(t)$.

Convergence vers le mouvement brownien multiplicatif libre

Soit $(\mathcal{A}, \tau)$ un $*$-espace de probabilités. Un mouvement brownien multiplicatif libre est une collection d'éléments unitaires $(u_t)_{t\geq 0}$ telle que

- Pour tout $t \geq 0$, u_t a pour loi ν_t.
- Pour tous $s \leq t$, $u_t u_s^*$ a même loi que u_{t-s}
- Pour tous $0 \leq t_1 \leq \ldots, \leq t_n$, $u_{t_1}, u_{t_2} u_{t_1}^*, \ldots, u_{t_n} u_{t_{n-1}}^*$ sont libres

Théorème (Biane)

Si $U_N^{(1)}, \ldots, U_N^{(n)}$ sont des mouvements browniens unitaires indépendants, cette famille converge en loi (au sens des probabilités libres) vers $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ une famille de mouvements browniens multiplicatifs libres, libres entre eux.

A propos de la loi ν_t

En général, on utilise la transformée de Stieljes $G_\mu(z) := \int \frac{1}{z-\lambda} d\mu(\lambda)$, et on retrouve les propriétés de μ par la formule d'inversion $f_\mu(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Im G_\mu(x + i\varepsilon)$.

Ici, on utilise la transformée suivante : pour $z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$,

$$\kappa(t, z) = \int_{\mathbb{U}} \frac{\omega + z}{\omega - z} d\nu_t(\omega).$$

La formule d'inversion est alors $f_t(e^{i\theta}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Re \kappa(t, (1 - \varepsilon) e^{i\theta})$.

A partir de l'EDS $dU_N(t) = dK_N(t) U_N(t) - \frac{1}{2} U_N(t) dt$, on montre que, pour tout z dans le disque unité,

$$g(t, \kappa(t, z)) := \frac{\kappa(t, z) - 1}{\kappa(t, z) + 1} e^{\frac{t}{2} \kappa(t, z)} = z$$

Le support de la mesure ν_t s'obtient en regardant le bord de l'ensemble

$$\Gamma_t := \{z \in \mathbb{C} / z + \bar{z} > 0, |g(t, z)| < 1\}$$

A propos de la loi ν_t

Théorème (Biane)

Le support de ν_t est donné pour $t < 4$ par

$$I_t := \left\{ e^{i\theta} / -\frac{1}{2}\sqrt{t(4-t)} - \arccos(1-t/2) \leq \theta \leq \frac{1}{2}\sqrt{t(4-t)} + \arccos(1-t/2) \right\}$$

et pour $t \geq 4$, par $\mathbb{U}$ tout entier.
Sa densité au point $\omega \in I_t$ est donnée par $\Re\kappa(t,\omega)$ avec $\kappa(t,\omega)$ la seule solution de partie réelle positive de

$$g(t,z) := \frac{z-1}{z+1} e^{\frac{t}{2}z} = \omega.$$

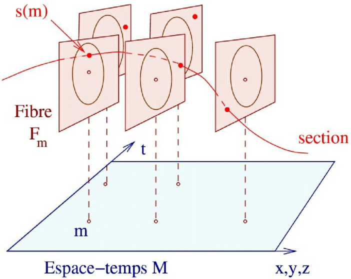
En particulier, elle est strictement positive à l'intérieur de I_t (sauf en -1 pour $t = 4$).

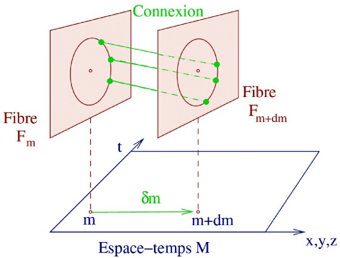
Intermède

Les motivations physiques pour l'étude du mouvement et du pont browniens unitaires

Brève présentation des théories de Yang-Mills

Particule quantique dans un champ électromagnétique classique : décrite par sa fonction d'onde $\psi(x, t)$, à une phase près.





Yang et Mills (1954) : introduction de théories de jauge non-abéliennes

Mesure de Yang-Mills physique : mesure de probabilités sur l'espace des connexions sur un espace fibré

Constructions mathématiques (Sengupta, Lévy $\sim$ 2000) : une connexion sur une surface M associe à chaque lacet un élément de G. On définit donc une mesure de probabilités sur l'ensemble des fonctions de $L_0(M)$ dans G.

Pour $M = \mathbb{R}^2$, si on regarde une suite de lacets simples entourant une aire t, le processus associé est un mouvement brownien sur G; si M est une sphère, on obtient le pont brownien.

"Large N limit" : champ-maître (Singer 1995, Lévy 2011)
Nombreux résultats pour Yang-Mills sur un cylindre ou une sphère : notamment Douglas-Kazakov et Gross-Matytsin (vers 1995).

Partie 2

Le pont brownien

sur le groupe unitaire

Définition du pont brownien unitaire

On conditionne le mouvement brownien unitaire à revenir en l'identité au temps T :

$$\mathbb{E}[F(W_{N,T}(t_1),\dots,W_{N,T}(t_n))] = \int_{\mathcal{U}(N)^n} F(U_1,U_2,\dots,U_n)Q_{N,t_1}(U_1)Q_{N,t_2-t_1}(U_1^{-1}U_2)\dots$$
$$\dots Q_{N,t_n-t_{n-1}}(U_{n-1}^{-1}U_n)Q_{N,T-t_n}(U_n^{-1})\,\frac{dU_1\dots dU_n}{Z_{N,T}}.$$

Pour tout $t\in(0,T)$, la densité $Q^*_{N,t,T}:\mathcal{U}(N)\to\mathbb{R}$ de la loi de $W_{N,T}(t)$ est donnée par

$$Q^*_{N,t,T}(U) = \frac{Q_{N,t}(U)Q_{N,T-t}(U^{-1})}{Z_{N,T}},$$

avec

$$Z_{N,T} := \int_{\mathcal{U}(N)} Q_{N,t}(U)Q_{N,T-t}(U^{-1})dU = Q_{N,T}(I_N) = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^N_\downarrow} e^{-\frac{c_2(\alpha)}{2N}T} s_\alpha(I_N)^2.$$

Rappel sur les processus déterminantaux

On considère un processus ponctuel ξ sur Λ polonais (un fermé de $\mathbb{C}$). Chaque réalisation de ξ donne une configuration de points finie sur les sous-ensembles bornés de Λ.
Pour $n \geq 1$, on note Ξ_n le processus sur Λ^n des configurations de n-uplets de points ξ (à permutation près) et M_n l'intensité de Ξ_n (autrement dit, pour tout $A \subset \Lambda^n$, $M_n(A) = \mathbb{E}(\Xi_n(A))$).
Si elle existe, la densité ρ_n de M_n par rapport à la mesure de Lebesgue sur Λ^n est appelée **fonction de corrélation** à n points de ξ.

S'il existe une fonction $K : \Lambda \times \Lambda \mapsto \mathbb{C}$ telle que, pour tout $n \geq 1$, $x_1, \ldots, x_n \in \Lambda$,

$$\rho_n(x_1, \ldots, x_n) = \det(K(x_i, x_j))_{i,j=1,\ldots,n},$$

on dit que le processus ξ est déterminantal de noyau K.

Critère (Johansson) : si

$$u_N(x_1,\ldots,x_N) = \frac{1}{N!Z_N}\det(\varphi_i(x_j))_{i,j=1,\ldots,N}\det(\psi_i(x_j))_{i,j=1,\ldots,N} \geq 0,$$

l'image de la probabilité $u_N dx_1 \ldots dx_N$ par $(x_1,\ldots,x_N) \mapsto \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$ est un processus ponctuel déterminantal de noyau

$$K_N(x,y) = \sum_{i,j=1}^N \psi_i(x)(A^{-1})_{ij}\varphi_j(y),$$

avec $A_{ij} = \int \varphi_i(x)\psi_j(x)dx$.

Ex : valeurs propres du GUE

Pour le GUE, on a

$$\begin{array}{ccccc} M \in \mathcal{H}_N & \mapsto & (\lambda_1(M), \ldots, \lambda_N(M)) & \mapsto & \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i(M)} \\ \frac{1}{\tilde{Z}_N} e^{-N \mathrm{Tr} M^2} dM & & u_N(x_1, \ldots, x_N) dx_1, \ldots dx_N & & K_N(x,y) \end{array}$$

avec

$$\begin{aligned} u_N(x_1, \ldots, x_N) &= \frac{1}{N! Z'_N} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 \prod_{i=1}^N e^{-N x_i^2} \\ &= \frac{1}{N! Z'_N} (det(x_i^{j-1} e^{-\frac{N}{2} x_i^2})_{i,j=1,\ldots,N})^2 \\ &= \frac{1}{N! Z_N} (det(p_{j-1}(x_i) e^{-\frac{N}{2} x_i^2})_{i,j=1,\ldots,N})^2 \end{aligned}$$

et

$$K_N(x,y) = \sum_{j=0}^{N-1} p_j(x) p_j(y) e^{-\frac{N}{2}(x^2+y^2)}.$$

Le processus ponctuel des valeurs propres du pont brownien est déterminantal

On considère une version discrétisée de la mesure gaussienne :

$$\gamma_{N,T} := \sum_{\xi \in L_N} e^{-\frac{NT}{2}\xi^2} \delta_\xi,$$

$$\text{avec} \quad L_N = \left\{ \frac{k + \tau(N)}{N} : k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et } \tau(N) = \frac{1}{2} \text{ si } N \text{ est pair.}$$

Soit $(p_{N,T,k})_{k \in \mathbb{N}}$ la famille de polynômes orthogonaux de coefficient dominant 1 pour $\gamma_{N,T}$ et les fonctions de $\mathbb{U} \to \mathbb{C}$

$$\varphi_{N,t,T,k}(e^{i\theta}) = \sum_{\xi \in L_N} p_{N,T,k}(\xi) e^{i\theta N \xi} e^{-\frac{Nt}{2}\xi^2}$$

Proposition

Pour tous $T > 0$ et $t \in (0, T)$, la mesure de comptage spectrale d'une matrice U choisie sous la loi $Q^*_{N,t,T}\, m_N$ est un processus déterminantal sur $\mathbb{U}$, de noyau $K_{N,t,T}$ donné par

$$K_{N,t,T}(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sum_{\xi \in L_N} p_{N,T,k}(\xi)^2 e^{-\frac{NT}{2}\xi^2}} \varphi_{N,t,T,k}(z_1) \overline{\varphi_{N,T-t,T,k}(z_2)}.$$

Liechty et Wang (2013) expriment ce noyau sous forme d'une double intégrale de contour : ses asymptotiques se déduisent de ceux des polynômes orthogonaux pour la mesure gaussienne discrète, eux-mêmes obtenus comme solution d'un problème de Riemman-Hilbert.

Proposition

(Liechty-Wang, 2014) Pour $T < T_c = \pi^2$, le comportement asymptotique de la famille $(p_{N,T,k})_{k\in\mathbb{N}}$ est très proche de celle des polynômes d'Hermite et la densité limite des valeurs propres du pont brownien de longueur T est à tout temps $t \in (0, T)$ une loi semi-circulaire d'amplitude $\sqrt{\frac{4t(T-t)}{T}}$.

Proposition

(Liechty-Wang, 2014) Pour $T > T_c = \pi^2$, le comportement asymptotique de la famille $(p_{N,T,k})_{k\in\mathbb{N}}$ diffère de manière substancielle de celle des polynômes d'Hermite et on connaît pour certaines valeurs des paramètres (t, T) la densité limite des valeurs propres du pont brownien de longueur T, qui s'exprime en termes de fonctions elliptiques.

Conséquence (Lévy, M.) : on sait maintenant donner une preuve

rigoureuse des résultats de Douglas-Kazakov, Gross-Matytsin (circa 1995)

Quelques références supplémentaires

- sur les moments du mouvement brownien unitaire : Lévy (2008), Dahlqvist (2012)
- TCL pour le mouvement brownien unitaire : Benaych-Georges (2011), Lévy-M. (2010)
- renforcement de la convergence et du TCL : Kemp (2013)
- sur le mouvement brownien multiplicatif libre : Benaych-Georges et Lévy (2011), Zhong (2012)
- sur le processus de Jacobi : Demni et Hmidi (2013)
- sur les “vicious walkers” : Majumdar et Schehr (2013-2014)