Tests portmanteau d'adéquation de modèles ARMA faibles: une approche basée sur l'auto-normalisation

Yacouba Boubacar Maïnassara

Université de Franche Comté, UFR Sciences et Techniques
Laboratoire de Mathématiques de Besançon - UMR 6623 CNRS-UFC

Travail joint avec Bruno Saussereau

Plan

Représentation ARMA(p, q) faible

Un processus stationnaire au second ordre, tel que

$$X_t - \sum_{i=1}^{p} a_{0i} X_{t-i} = \epsilon_t - \sum_{j=1}^{q} b_{0i} \epsilon_{t-j}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

- Les paramètres a_{0i}, $i \in \{1, \dots, p\}$ et b_{0j}, $j \in \{1, \dots, q\}$ sont des réels,
- p et q sont des entiers appelés ordres.
- Le terme d'erreur ϵ_t est un bruit blanc faible *i.e* une suite de v.a. centrées ($\mathbb{E}\epsilon_t = 0$), non corrélé ($\mathrm{Cov}\,(\epsilon_t, \epsilon_{t+h}) = 0 \quad \forall\, h, t \in \mathbb{Z},\ h \neq 0$), de même variance σ_0^2.

Il existe de nombreux cas où l'hypothèse de processus d'erreur iid gaussien n'est pas vérifiée:

$\rightarrow$ Modèles pouvant être ajustés au processus d'innovation linéaire, dont les autocorrélations sont nulles mais qui peut néanmoins présenter des dépendances temporelles (modèles GARCH Bollerslev (1986), modèles all-pass Andrews, Davis et Breidt,...).
$\rightarrow$ Approximation de transformations de processus ARMA forts par de processus ARMA faibles (agrégation temporelle Drost et Nijman (1993),...).

→ Observations $X_1, \dots, X_n$ de longueur n.
→ Pour $0 < t \leq n$, les variables aléatoires $e_t(\theta)$ sont définies récursivement par

$$e_t(\theta) = X_t - \sum_{i=1}^{p} a_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} b_j e_{t-j}(\theta),$$

où les valeurs initiales inconnues sont remplacées par zéro:
$e_0(\theta) = \cdots = e_{1-q}(\theta) = X_0 = \cdots = X_{1-p} = 0$.

Estimateur des moindres carrés ordinaires (MCO):

→ Un estimateur des MCO de θ_0 est défini comme toute solution, p.s., mesurable $\hat{\theta}_n$ de

$$Q_n(\hat{\theta}_n) = \min_{\theta \in \Theta} Q_n(\theta), \text{ où } Q_n(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{t=1}^{n} e_t^2(\theta).$$

→ Francq et Zakoïan (1998).

Normalité asymptotique (FZ1998):

Théorème: (Normalité asymptotique)

Sous des hypothèses de régularité, nous avons

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Omega := J^{-1} I J^{-1}),$$

où $J = J(\theta_0)$ et $I = I(\theta_0)$, avec

$$J(\theta) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2 Q_n(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'} \quad p.s., \quad I(\theta) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\sqrt{n}\frac{\partial}{\partial\theta} Q_n(\theta)\right).$$

Tests portmanteau d'adéquation (ARMA):

On veut tester pour des ordres p et q donnés:

H_0 : (X_t) satisfait une représentation ARMA(p, q)
contre l'alternative

H_1 : (X_t) n'admet pas une représentation ARMA ou admet une représentation ARMA(p', q'), $p' > p$ ou $q' > q$.

Enjeux:

- Choisir des ordres trop grands $\Rightarrow$ introduction d'un grand nombre de paramètres non pertinents à estimer, $\Rightarrow$ une perte de précision de l'estimation des paramètres.
- Choisir des ordres trop petits $\Rightarrow$ perte d'information détectable par une corrélation des résidus ou estimation non convergente des paramètres.

Autocovariances empiriques du bruit:

de retard h définies par

- $\gamma(h) = n^{-1} \sum_{t=h+1}^{n} \epsilon_t \epsilon_{t-h}$ pour $0 \leq h < n$.

$\rightarrow$ Les $\gamma(h)$ ne sont pas des statistiques (sauf si $p_0 = q_0 = 0$) puisqu'elles dépendent des innovations théoriques $\epsilon_t = \epsilon_t(\theta_0)$.
$\rightarrow$ Nous considérons des vecteurs des m (pour $m \geq 1$) premières autocovariances empiriques du bruit

- $\gamma_m = (\gamma(1), \dots, \gamma(m))'$

Autocovariances et autocorrélations résiduelles:

- Autocovariances résiduelles de retard h définies par

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=h+1}^{n} \hat{e}_t\hat{e}_{t-h} \quad \text{pour} \quad 0 \leq h < n.$$

- Nous utilisons des vecteurs de ces autocovariances résiduelles

$$\hat{\gamma}_m = (\hat{\gamma}(1), \dots, \hat{\gamma}(m))'$$

- et les vecteurs suivants des autocorrélations résiduelles

$$\hat{\rho}_m = (\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(m))', \quad \text{pour} \quad m \geq 1 \quad \text{et}$$

$\hat{\rho}(\ell) = \hat{\gamma}(\ell)/\hat{\gamma}(0)$, avec $\gamma(0) := \sigma^2$.

Nous introduisons les notations suivantes:

- Nous définissons la matrice

$$\Phi_m = \mathbb{E}\left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_{t-1} \\ \vdots \\ \epsilon_{t-m} \end{pmatrix} \frac{\partial \epsilon_t(\theta_0)}{\partial \theta'} \right\}.$$

- Soit Γ la matrice bloc de $\mathbb{R}^{m\times(p+q+m)}$ définie par

$$\Gamma = \left(-\Phi_m J^{-1} | I_m\right),$$

où I_m est la matrice identité d'ordre m

- et où la matrice d'information de Fisher

$$J(\theta_0) = \mathbb{E}\left(\frac{\partial \epsilon_t(\theta_0)}{\partial \theta}\frac{\partial \epsilon_t(\theta_0)}{\partial \theta'}\right)$$

Distributions asymptotiques des autocovariances et autocorrélations résiduelles:

Théorème FRZ2005: (NA des autocorrélations)

Supposons $p > 0$ ou $q > 0$. Sous des hypothèses de régularité, quand $n \to \infty$, nous avons

$$\sqrt{n}\hat{\gamma}_m \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \Sigma_{\hat{\gamma}_m}\right) \quad \text{et} \quad \sqrt{n}\hat{\rho}_m \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \Sigma_{\hat{\rho}_m}\right) \quad \text{où,}$$

$$\Sigma_{\hat{\gamma}_m} = \Sigma_{\gamma_m} + \Phi_m \Sigma_{\hat{\theta}_n} \Phi'_m + \Phi_m \Sigma_{\hat{\theta}_n, \gamma_m} + \Sigma'_{\hat{\theta}_n, \gamma_m} \Phi'_m$$
$$\Sigma_{\hat{\rho}_m} = \Sigma_{\hat{\gamma}_m} / \sigma^4$$

où les matrices Σ_{γ_m}, $\Sigma_{\hat{\theta}_n}$ et $\Sigma'_{\hat{\theta}_n, \gamma_m}$, de tailles appropriées, sont issues de la distribution asymptotique jointe de l'estimateur MCO et des autocovariances empiriques du bruit.

Statistiques de tests portmanteau:

- Statistique du test portmanteau (BP, 1970)

$$Q_m^{\mathsf{BP}} = n \sum_{h=1}^{m} \hat{\rho}^2(h)$$

- et statistique modifiée du test portmanteau (LB, 1978)

$$Q_m^{\mathsf{LB}} = n(n+2) \sum_{h=1}^{m} \frac{\hat{\rho}^2(h)}{n-h}.$$

Théorème: (Comportement asymptotique des statistiques des tests portmanteau)

Sous des hypothèses des hypothèses de régularité, les statistiques Q_m^{BP} et Q_m^{LB} convergent en distribution, quand $n \to \infty$, vers

$$Z_m(\xi_m) = \sum_{i=1}^{m} \xi_{i,m} Z_i^2$$

où $\xi_m = (\xi_{1,m}, \ldots, \xi_{m,m})'$ est un vecteur des valeurs propres de la matrice

$$\Sigma_{\hat{\rho}_m} = \Sigma_{\hat{\gamma}_m} / \sigma^4,$$

et $Z_1, \ldots, Z_m$ sont des variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Estimation de Ξ (matrice de variance issue de la distribution asymptotique jointe de $\hat{\theta}_n$ et γ_m):

Pour estimer Ξ, dans la littérature économique, il existe deux méthodes

- La méthode d'estimation non paramètrique du noyau aussi appelée HAC (Heteroscedasticity and Autocorrelation Consistent). Cette approche est semblable à celle de Andrews, 1991, Newey et West, 1994.
- La méthode d'estimation paramètrique de la densité spectrale (notée SP). Cette approche a été étudiée par Berk (1974) (voir aussi den Haan and Levin, 1997).

Probabilité de rejet:

→ Pour un niveau asymptotique α, le test portmanteau de LB (resp. de BP) consiste à rejeter l'adéquation de modèle ARMA(p, q) faible quand

$$Q_m^{\mathsf{LB}} > S_m(1-\alpha) \quad (\text{resp.} \quad Q_m^{\mathsf{BP}} > S_m(1-\alpha))$$

où $S_m(1-\alpha)$ est telle que $\mathbb{P}\left\{Z_m(\hat{\xi}_m) > S_m(1-\alpha)\right\} = \alpha$.

→ $\hat{\xi}_m = (\hat{\xi}_{1,m}, \ldots, \hat{\xi}_{m,m})'$ le vecteur des valeurs propres de $\hat{\Sigma}_{\hat{\rho}_m}$.

→ Évaluer $Z_m(\hat{\xi}_m)$ par Imhof (1961).

BUT: Trouver une loi qui ne dépend pas (d'un ou) de paramètres inconnus.

Notations:

- Soit $(B_k(r))_{r\geq 0}$ un mouvement brownien vectoriel de dimension k, commençant à 0.
- Notons, pour $k \geq 1$, la variable aléatoire U_k définie par

$$\mathrm{U}_k = B_k'(1)V_k^{-1}B_k(1) \text{ où}$$
$$V_k = \int_0^1 \left(B_k(r) - rB_k(1)\right)\left(B_k(r) - rB_k(1)\right)' dr.$$

- Enfin, nous posons

$$\Upsilon_t = \left(-\epsilon_t(\theta_0)\frac{\partial \epsilon_t(\theta_0)}{\partial \theta}, \epsilon_t\epsilon_{t-1}, \ldots, \epsilon_t\epsilon_{t-m}\right)' \text{ et}$$
$$S_t = \sum_{j=1}^{t}\left(\Upsilon_j - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Upsilon_i\right).$$

Distribution asymptotique jointe de l'estimateur MCO et des autocovariances empiriques du bruit:

Théorème:

Sous des hypothèses de régularité, quand $n \to \infty$, nous avons

$$n(\hat{\theta}_n - \theta_0, \gamma_m)' C_{k_0+m}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_n - \theta_0 \\ \gamma_m \end{pmatrix} \stackrel{d}{\Rightarrow} \mathrm{U}_{k_0+m}$$

où

$$\mathrm{U}_{k_0+m} := B'_{k_0+m}(1) V_{k_0+m}^{-1} B_{k_0+m}(1),$$

avec $C_{k_0+m} = n^{-2} \sum_{t=1}^{n} S_t S_t'$ est une matrice de taille $(k_0+m) \times (k_0+m)$.

Théorème: (Comportement asymptotique des autocovariances et autocorrélations résiduelles normalisées.)

Sous des hypothèses de régularité, nous avons

$$n\hat{\gamma}_m'\tilde{C}_m^{-1}\hat{\gamma}_m \stackrel{d}{\Rightarrow} \mathrm{U}_m := B_m'(1)V_m^{-1}B_m(1) \text{ et } n\sigma^4\hat{\rho}_m'\tilde{C}_m^{-1}\hat{\rho}_m \stackrel{d}{\Rightarrow} \mathrm{U}_m,$$

où

$$\tilde{C}_m = \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\tilde{S}_t\tilde{S}_t' = \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\Gamma S_t S_t'\Gamma' = \Gamma C_{k_0+m}\Gamma'$$

avec

$$V_m = \int_0^1 \left(B_m(r) - rB_m(1)\right)\left(B_m(r) - rB_m(1)\right)' dr.$$

Statistiques modifiées de tests portmanteau:

- Posons

$$\hat{C}_m = \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\hat{\tilde{S}}_t\hat{\tilde{S}}_t' = \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\hat{\Gamma}\hat{S}_t\hat{S}_t'\hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}\hat{C}_{k_0+m}\hat{\Gamma}'$$

- Statistique modifiée du test portmanteau (BP)

$$Q_m^{\mathsf{SN}} = n\,\hat{\sigma}^4\,\hat{\rho}_m'\hat{C}_m^{-1}\hat{\rho}_m$$

- et la statistique modifiée du test portmanteau (LB)

$$\tilde{Q}_m^{\mathsf{SN}} = n(n+2)\,\hat{\sigma}^4\,\hat{\rho}_m'D_{n,m}\hat{C}_m^{-1}\hat{\rho}_m$$

où la matrice diagonale $D_{n,m}$ a pour entrée $(1/(n-1), ..., 1/(n-m))$.

Théorème: (Comportement asymptotique des statistiques modifiées des tests portmanteau)

Sous des hypothèses de régularité, les statistiques Q_m^{SN} et $\tilde{Q}_m^{\mathsf{SN}}$ convergent en distribution, quand $n \to \infty$, vers la variable aléatoire

$$\mathrm{U}_m = B_m'(1) V_m^{-1} B_m(1)$$

où $V_m = \int_0^1 \left(B_m(r) - rB_m(1)\right)\left(B_m(r) - rB_m(1)\right)' dr$ et dont les valeurs critiques sont tabulées dans Lobato (2001) et que nous avons retabulées.

Table des quantiles de la variable aléatoire U_m:

Table : Upper Critical Values of the Distribution of U_m.

$m \backslash \alpha$	90	95	97.5	99	99.5
1	28.43	45.73	66.57	100.02	129.26
2	70.68	102.94	138.85	194.00	239.47
3	126.58	174.62	227.21	304.16	370.03
4	194.23	258.68	330.13	429.21	510.05
5	274.32	357.02	444.63	566.13	665.13
6	365.09	466.60	571.74	717.55	836.68
10	838.06	1023.06	1205.85	1462.63	1654.02
20	2734.79	3161.32	3572.52	4122.45	4541.10
22	3232.17	3707.30	4176.87	4782.44	5243.65
23	3499.66	4011.67	4516.08	5157.49	5646.50
24	3772.57	4313.92	4835.70	5491.94	5990.39
36	7789.22	8710.34	9587.04	10701.47	11566.64
48	13126.85	14515.20	15754.06	17328.84	18466.33

Application numérique: ARMA(1,1)

Considérons le modèle ARMA$(1,1)$ suivant

$$X_t = aX_{t-1} + \epsilon_t + b\epsilon_{t-1},$$

où $\epsilon_t = \eta_t\sqrt{1+\alpha_1\epsilon_{t-1}^2}$ et $\eta_t \sim \mathrm{IID}\,\mathcal{N}(0,1)$. Pour la puissance des tests, nous considérons le modèle ARMA$(2,1)$ défini par

$$X_t = X_{t-1} - 0.2X_{t-2} + \epsilon_t + 0.8\epsilon_{t-1}.$$

Résultat empirique des tests portmanteau: DGP ARMA fort

Table : Empirical size (in %) of the standard and modified versions of the BP test in the case of the strong ARMA$(1,1)$: model (1), with the parameter $\theta_0 = (0.95, -0.6)'$ and $\alpha_1 = 0$. The nominal asymptotic level of the tests is $\alpha = 5\%$.

	$m=1$		$m=2$		$m=3$	
Length n	500	$1,000$	500	$1,000$	500	$1,000$
LB$_{SN}$	5.1	5.4	5.7	5.4	4.2	3.9
BP$_{SN}$	5.0	5.2	5.7	5.4	4.2	3.9
LB$_{FRZ}$	5.6	4.9	5.5	4.9	3.5	3.3
BP$_{FRZ}$	5.3	4.8	5.5	4.9	3.3	3.3
LB$_S$	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	15.3	13.8
BP$_S$	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	15.0	13.5

Résultat empirique des tests portmanteau: DGP ARMA fort

Table : Empirical size (in %) of the standard and modified versions of the BP test in the case of the strong ARMA$(1,1)$: model (1), with the parameter $\theta_0 = (0.95, -0.6)'$ and $\alpha_1 = 0$. The nominal asymptotic level of the tests is $\alpha = 5\%$.

	$m = 6$		$m = 12$		$m = 18$	
Length n	500	$1,000$	500	$1,000$	500	$1,000$
LB_{SN}	7.2	5.8	6.4	6.0	5.4	7.1
BP_{SN}	7.0	5.7	6.2	5.8	4.7	6.5
LB_{FRZ}	2.6	1.8	2.2	1.5	3.3	1.8
BP_{FRZ}	2.2	1.7	1.9	1.3	2.4	1.7
LB_{S}	8.3	7.6	7.2	5.9	7.6	7.7
BP_{S}	7.8	7.5	6.9	5.6	6.4	6.5

Résultat empirique des tests portmanteau: DGP ARMA faible

Table : Empirical size (in %) of the standard and modified versions of the BP test in the case of the weak ARMA$(1,1)$: model (1), with the parameter $\theta_0 = (0.95, -0.6)'$ and $\alpha_1 = 0.4$. The nominal asymptotic level of the tests is $\alpha = 5\%$.

	$m=1$		$m=2$		$m=3$	
Length n	$1,000$	$2,000$	$1,000$	$2,000$	$1,000$	$2,000$
LB$_{SN}$	4.6	4.8	5.0	4.8	3.8	2.9
BP$_{SN}$	4.5	4.7	5.0	4.8	3.8	2.9
LB$_{FRZ}$	4.3	4.8	3.9	4.7	2.1	2.7
BP$_{FRZ}$	4.3	4.8	3.8	4.7	2.1	2.7
LB$_S$	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	25.4	26.8
BP$_S$	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	25.4	26.7

Résultat empirique des tests portmanteau: DGP ARMA faible (suite)

Table : Empirical size (in %) of the standard and modified versions of the BP test in the case of the weak ARMA$(1,1)$: model (1), with the parameter $\theta_0 = (0.95, -0.6)'$ and $\alpha_1 = 0.4$. The nominal asymptotic level of the tests is $\alpha = 5\%$.

	$m = 6$		$m = 12$		$m = 18$	
Length n	$1,000$	$2,000$	$1,000$	$2,000$	$1,000$	$2,000$
LB_{SN}	6.2	5.7	5.7	4.1	3.6	4.7
BP_{SN}	6.2	5.6	5.3	3.8	3.5	4.6
LB_{FRZ}	1.2	1.0	0.7	0.6	0.8	0.6
BP_{FRZ}	1.2	1.0	0.7	0.6	0.6	0.6
LB_{S}	13.4	15.2	9.6	10.7	7.7	9.6
BP_{S}	13.3	15.0	9.0	10.6	7.2	8.9

Puissance empirique des tests portmanteau: cas faible

Table : Empirical power (in %) of the standard and modified versions of the BP test in the case of the weak ARMA$(2,1)$ model (1) and $\alpha_1 = 0.4$.

	$m=1$		$m=2$		$m=3$	
Length n	500	$1,000$	500	$1,000$	500	$1,000$
LB_{SN}	60.7	84.6	49.1	72.9	30.3	56.1
BP_{SN}^{Lo}	60.6	84.6	48.7	72.7	29.9	56.1
BP_{SN}	60.5	84.4	49.1	72.9	29.9	56.1
LB_{FRZ}	81.7	97.6	75.1	95.1	29.6	59.4
BP_{FRZ}	81.8	97.5	74.8	94.9	29.4	59.3
LB_{S}	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	91.1	99.5
BP_{S}	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	91.0	99.5

Puissance empirique des tests portmanteau: cas faible (suite)

Table : Empirical power (in %) of the standard and modified versions of the BP test in the case of the weak ARMA$(2,1)$ model (1) and $\alpha_1 = 0.4$.

	$m=4$		$m=6$		$m=10$	
Length n	500	$1,000$	500	$1,000$	500	$1,000$
LB_{SN}	35.5	63.7	27.6	54.6	23.2	50.0
BP_{SN}^{Lo}	35.2	63.7	27.8	54.5	22.8	49.3
BP_{SN}	35.4	63.7	27.5	54.5	22.4	49.1
LB_{FRZ}	43.2	77.5	45.9	81.9	36.0	75.2
BP_{FRZ}	42.9	77.4	45.1	81.9	35.3	74.8
LB_{S}	84.7	98.5	81.8	97.5	75.0	95.8
BP_{S}	84.2	98.4	81.5	97.5	74.2	95.5

Rendement CAC40

Table : $\alpha = 5\%$ Standard and modified versions of portmanteau tests to check the null hypothesis that the CAC40 returns is a white noise.

Lag m	2	3	4	5	10	18	24
$\mathrm{p}_{\mathrm{sn}}^{\mathrm{bp}}$	0.2417	0.2757	0.1825	0.2244	0.4381	0.9067	0.9851
$\mathrm{p}_{\mathrm{frz}}^{\mathrm{bp}}$	0.2972	0.0349	0.0381	0.0091	0.0210	0.1754	0.2448
$\mathrm{p}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{bp}}$	0.0868	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Carré du rendement du CAC40

Table : Standard and modified versions of portmanteau tests to check the null hypothesis that the CAC40 squared returns follow an ARMA$(1,1)$.

Lag m	1	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{p}_{\mathrm{sn}}^{\mathrm{bp}}$	0.3006	0.4599	0.6618	0.8439	0.9382	0.9770	0.9899
$\mathrm{p}_{\mathrm{frz}}^{\mathrm{bp}}$	0.1178	0.1831	0.3421	0.4868	0.2936	0.3615	0.3889
$\mathrm{p}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{bp}}$	n.a.	n.a.	0.0003	0.0015	0.0000	0.0000	0.0000
Lag m	8	9	10	12	18	20	24
$\mathrm{p}_{\mathrm{sn}}^{\mathrm{bp}}$	0.9960	0.9989	0.9927	0.9967	0.9998	0.9999	0.9999
$\mathrm{p}_{\mathrm{frz}}^{\mathrm{bp}}$	0.3382	0.4025	0.3389	0.3919	0.4882	0.4563	0.4550
$\mathrm{p}_{\mathrm{S}}^{\mathrm{bp}}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Conclusion:

- Les versions modifiées des tests portmanteau (LB et BP) sont plus faciles à implementer que celles existantes dans la littérature (par exemple FRZ2005) car leurs valeurs critiques ne sont plus calculées à partir des données.
- Non validité des versions standard en présence de dépendance temporelle.
- Les résultats numériques confirment bien qu'en présence ou non de dépendance temporelle, les tests proposés donnent des résultats très satisfaisant.

Merci de votre attention!