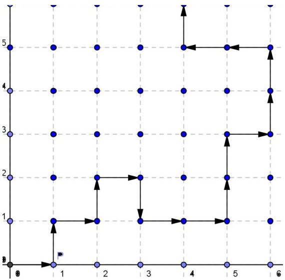
Marches aléatoires sur des graphes aléatoires engendrés par des processus ponctuels dans $\mathbb{R}^d$

Récurrence/transience - Principes d'invariance

Arnaud Rousselle

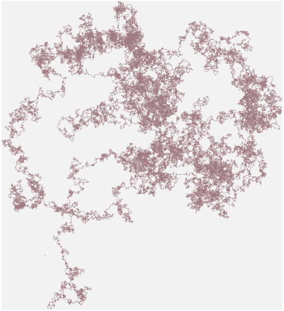
Journées MAS 2014
Université Paul Sabatier, Toulouse, 29 août 2014

Cadre classique



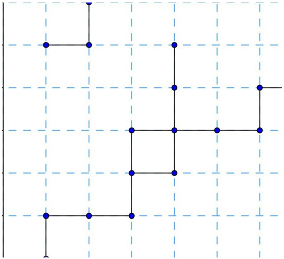
- Espace d'états déterministe
- Probabilités de transition fixées à l'avance
- Grille $\mathbb{Z}^d$, marches au plus proche voisin :
  - Récurrentes $d = 1, 2$; transitoires $d \geq 3$ [Pólya, '21]

Cadre classique



- Espace d'états déterministe
- Probabilités de transition fixées à l'avance
- Grille $\mathbb{Z}^d$, marches au plus proche voisin :
  - Récurrentes $d = 1, 2$; transitoires $d \geq 3$ [Pólya, '21]
  - Principe d'invariance [Donsker, '51]

Cadre classique

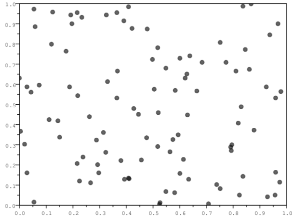


- Espace d'états déterministe
- Probabilités de transition fixées à l'avance
- Grille $\mathbb{Z}^d$, marches au plus proche voisin :
  - Récurrentes $d = 1, 2$; transitoires $d \geq 3$ [Pólya, '21]
  - Principe d'invariance [Donsker, '51]

Dans la littérature, avec un espace d'états aléatoire

- Marches au hasard sur l'amas de percolation (sur-critique)
  - [Grimmett *et al.*, '93], [De Masi *et al.*, '89], [Sidoravicius et Sznitman, '04]

Cadre classique



- Espace d'états déterministe
- Probabilités de transition fixées à l'avance
- Grille $\mathbb{Z}^d$, marches au plus proche voisin :
  - Récurrentes $d = 1, 2$; transitoires $d \geq 3$ [Pólya, '21]
  - Principe d'invariance [Donsker, '51]

Dans la littérature, avec un espace d'états aléatoire

- Marches au hasard sur l'amas de percolation (sur-critique)
  - [Grimmett *et al.*, '93], [De Masi *et al.*, '89], [Sidoravicius et Sznitman, '04]
- Marches au hasard sur le graphe complet engendré par un processus ponctuel, avec des probabilités de transition décroissantes avec la distance
  - [Caputo *et al.*, '09], [Faggionato *et al.*, '06], [Caputo *et al.*, '13]

Processus ponctuel simple : sous-ensemble aléatoire de $\mathbb{R}^d$ localement fini

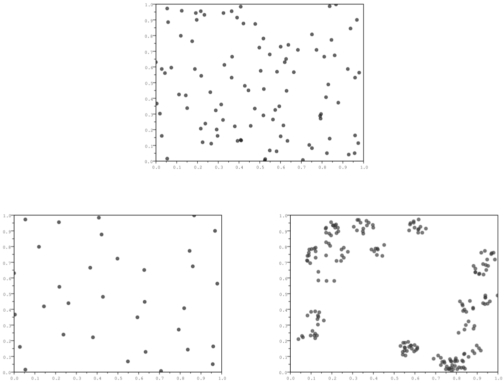
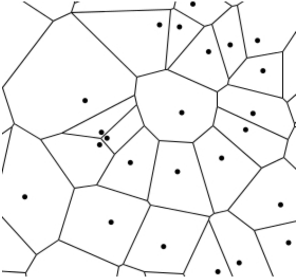


Figure : Processus ponctuel de Poisson (PPP, haut), processus de Matérn ≪ Hardcore ≫ (MHP, gauche) et de Matérn ≪ Cluster ≫ (MCP, droite)

Mosaïque de Voronoï

- Partition de $\mathbb{R}^d$ en des polyèdres convexes
- Cellule de Voronoï de germe $u \in \xi$:

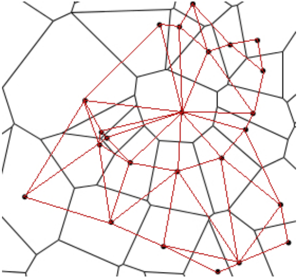
$$\mathrm{Vor}_\xi(u) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \|x-u\|_2 \leq \|x-v\|_2, \forall v \in \xi \right\}$$



VS(ξ) : Squelette de la mosaïque de Voronoï de ξ

Triangulation de Delaunay

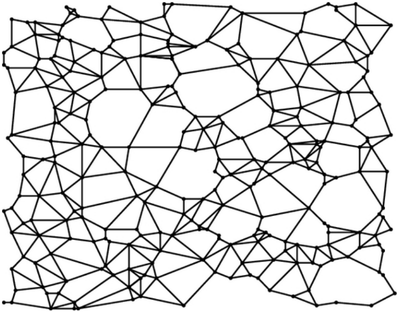
- Dual de la mosaïque de Voronoï de ξ
  $\hookrightarrow$ ensemble de sommets : ξ
  $\hookrightarrow$ une arête entre u et v **ssi** $\mathrm{Vor}_\xi(u)$ et $\mathrm{Vor}_\xi(v)$ partagent une face $(d-1)$-dim.
- Caractérisation par les sphères circonscrites



DT(ξ) : Triangulation de Delaunay de ξ

Graphe de Gabriel

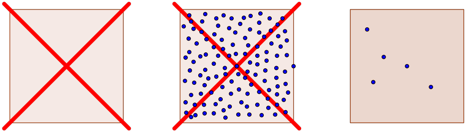
- Sous-graphe de la triangulation de Delaunay
  $\hookrightarrow$ ensemble de sommets : ξ
  $\hookrightarrow$ une arête entre u et v **ssi** la boule de diamètre $[u, v]$ est vide



Gab(ξ) : Graphe de Gabriel engendré par ξ

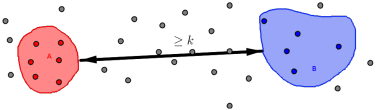
(BR) ≪ **Bonne** ≫ **répartition des points :**

$$\exists c_1, c_2\, \forall L \text{ large} : \mathbb{P}\left[1 \leq \#\left([0,L]^d \cap \xi\right) \leq c_1 L^d\right] \geq 1 - e^{-c_2 L^d}.$$



(RF) **Rang de dépendance fini** k ($d \geq 3$)

$$\forall A, B \subset \mathbb{R}^d \text{ t.q. } \mathrm{d}(A,B) \geq k,\ \xi \cap A \text{ et } \xi \cap B \text{ sont indépendants.}$$



Théorème

Soit ξ distribué selon un processus ponctuel simple, stationnaire, presque sûrement en position générale dans $\mathbb{R}^d$ satisfaisant **(BR)**.

Récurrence pour d $= 2$: pour presque toute réalisation de ξ, les marches simples sur $\mathrm{DT}(\xi)$, $\mathrm{Gab}(\xi)$ et $\mathrm{VS}(\xi)$ sont récurrentes (nulles).

Transience pour d ≥ 3 : si le processus ponctuel satisfait de plus **(RF)** , alors, pour presque toute réalisation de ξ les marches simples sur $\mathrm{DT}(\xi)$ et $\mathrm{VS}(\xi)$ sont transitoires.

Si ξ n'a presque sûrement pas de chaîne descendante, la même conclusion est vraie pour la marche simple sur $\mathrm{Gab}(\xi)$.

Exemples de processus ponctuels :

- processus ponctuel de Poisson (indépendance),
- processus de Matérn « Cluster » (attractivité),
- processus de Matérn « Hardcore » (répulsivité),
- processus déterminantal stationnaire ($d = 2$, répulsivité).

Introduction

Récurrence et transience

Réseaux électriques et esquisse d'une preuve

Principes d'invariance

Réf : [Doyle et Snell, '84 ; Lyons et Peres, '14]

- $G = (S_G, A_G)$ graphe connexe non orienté, chaque sommet de degré fini

Conductance

C fonction positive sur l'ensemble d'arêtes A_G.

$\hookrightarrow$ **Résistance :** $R = \frac{1}{C}$

Marche aléatoire dans G associée à C

Chaîne de Markov dont les probabilités de transition sont données par :

$$\pi(x, y) = \frac{C(\{x, y\})}{w_G(x)},$$

où $w_G(x) := \sum_{y \sim x} C(\{x, y\})$.

Potentiel électrique, $A, Z \subset S_G$ disjoints fixés

V définie sur S_G spécifiée sur $A \cup Z$ et *harmonique* sur $(A \cup Z)^c$, *i.e.* telle que :

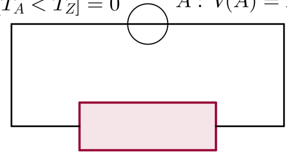
$$\forall x \notin A \cup Z,\ V(x) = \frac{1}{w_G(x)} \sum_{y \sim x} C(\{x, y\}) V(y).$$

Le *principe d'unicité* implique que

Si $V_{|A} \equiv 1$, $V_{|Z} \equiv 0$, alors

$$\forall x \in S_G,\ V(x) = \mathbb{P}^x[T_A < T_Z].$$

$Z:\ V(Z) = \mathbb{P}^Z[T_A < T_Z] = 0$ $A:\ V(A) = \mathbb{P}^A[T_A < T_Z] = 1$



Hors de $A \cup Z$, V et $\mathbb{P}^{\cdot}[T_A < T_Z]$ harmoniques

Conductance efficace

$$C_{\text{eff}}(a \leftrightarrow Z) = w_G(a)\mathbb{P}[a \to Z] \text{ quand } V_{|Z} \equiv 0,$$

où $\mathbb{P}[a \to Z] := \mathbb{P}^a[T_Z < T_a^1]$.

- $(G_n)_n \uparrow G$,
- Pour $a \in S_G$, $\mathbb{P}[a \longrightarrow G_n^c] \downarrow \mathbb{P}[a \longrightarrow \infty]$=≪ probabilité d'échappement depuis a ≫

Récurrence, transience et conductance efficace

La marche aléatoire associée à C est transitoire **ssi** il existe $a \in S_G$ tel que :

$$C_{\text{eff}}(a \leftrightarrow \infty) > 0.$$

Principe de monotonie de Rayleigh

Si $C \leq C'$, alors $C_{\text{eff}}(a \leftrightarrow \infty) \leq C'_{\text{eff}}(a \leftrightarrow \infty)$.

- **Cadre :** G graphe **aléatoire** plongé dans $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{d \geq 3}$
- **Principe de monotonie** $\Rightarrow$ G est transitoire s'il a un sous-graphe H transitoire
- Comparer avec les marches aléatoires sur l'amas de percolation

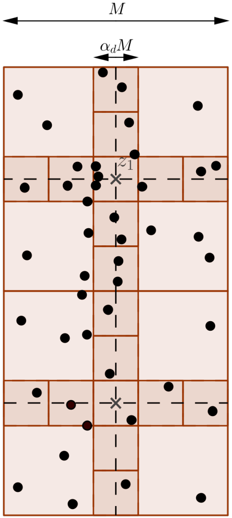
Théoreme [Grimmett, Kesten et Zhang, '93]

Si $d \geq 3$, la marche aléatoire simple au plus proche voisin sur l'amas de percolation sur-critique est presque sûrement transitoire.

- **Renormalisation**
  $\hookrightarrow$ découper $\mathbb{R}^d$ en des boîtes

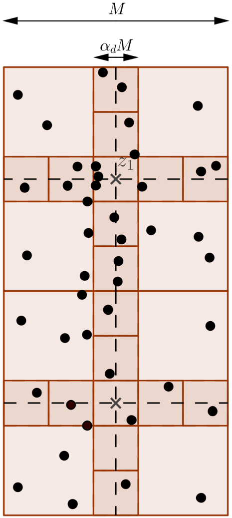
$$B_{\mathbf{z}} := M\mathbf{z} + \left[-\frac{M}{2}, \frac{M}{2}\right]^d, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$$

$\hookrightarrow$ définir des ≪ bonnes boîtes ≫ telles que le processus $\{\mathbf{1}_{B_{\mathbf{z}} \text{ est bonne}}\}_{\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d}$ domine stochastiquement un processus de percolation sur-critique dans $\mathbb{Z}^d$
$\hookrightarrow$ exhiber un sous-graphe H de G qui ≪ ressemble ≫ à l'amas de percolation



Définition des bonnes boîtes pour la triangulation de Delaunay

- chaque sous-boîte de côté $\alpha_d M$ intersectant la ≪ croix centrale ≫ contient au moins un point de ξ
- la boîte contient au plus K points de ξ

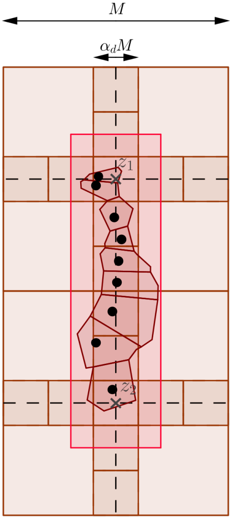


Définition des bonnes boîtes pour la triangulation de Delaunay

- chaque sous-boîte de côté $\alpha_d M$ intersectant la $\ll$ croix centrale $\gg$ contient au moins un point de ξ
- la boîte contient au plus K points de ξ

Conséquences

- le processus des bonnes boîtes domine stochastiquement un processus de percolation indépendant sur $\mathbb{Z}^d$ (M et K bien choisis)
- on peut choisir le germe v_i de la cellule de Voronoï de $M\mathbf{z}_i$ comme sommet de référence pour $B_{\mathbf{z}_i}$

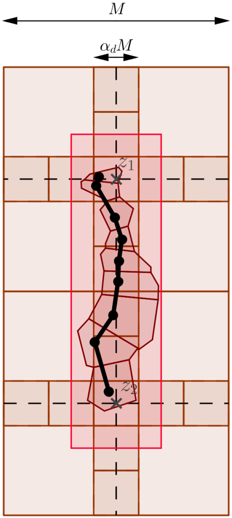


Définition des bonnes boîtes pour la triangulation de Delaunay

- chaque sous-boîte de côté $\alpha_d M$ intersectant la ≪ croix centrale ≫ contient au moins un point de ξ
- la boîte contient au plus K points de ξ

Conséquences

- le processus des bonnes boîtes domine stochastiquement un processus de percolation indépendant sur $\mathbb{Z}^d$ (M et K bien choisis)
- on peut choisir le germe v_i de la cellule de Voronoï de $M\mathbf{z}_i$ comme sommet de référence pour $B_{\mathbf{z}_i}$
- les germes des cellules de Voronoï intersectant $[M\mathbf{z}_1, M\mathbf{z}_2]$ sont dans un rectangle épaississant $[M\mathbf{z}_1, M\mathbf{z}_2]$



Définition des bonnes boîtes pour la triangulation de Delaunay

- chaque sous-boîte de côté $\alpha_d M$ intersectant la ≪ croix centrale ≫ contient au moins un point de ξ
- la boîte contient au plus K points de ξ

Conséquences

- le processus des bonnes boîtes domine stochastiquement un processus de percolation indépendant sur $\mathbb{Z}^d$ (M et K bien choisis)
- on peut choisir le germe v_i de la cellule de Voronoï de $M\mathbf{z}_i$ comme sommet de référence pour $B_{\mathbf{z}_i}$
- les germes des cellules de Voronoï intersectant $[M\mathbf{z}_1, M\mathbf{z}_2]$ sont dans un rectangle épaississant $[M\mathbf{z}_1, M\mathbf{z}_2]$
- le chemin entre v_1 et v_2 obtenu en reliant les germes des cellules successives intersectant $[M\mathbf{z}_1, M\mathbf{z}_2]$ est contenu dans $B_{\mathbf{z}_1} \cup B_{\mathbf{z}_2}$ et a une longueur (de graphe) au plus $L := 2K$

Introduction

Récurrence et transience

Réseaux électriques et esquisse d'une preuve

Principes d'invariance

Cadre :

- ξ^0 distribué selon la mesure de Palm $\mathbb{P}_0$ d'un PPP, d'un MCP ou d'un MHP
- $(X_n^{\xi^0})_{n\in\mathbb{N}}$: marche aléatoire simple sur DT(ξ^0) ou Gab(ξ^0)
- $P_0^{\xi^0}$: loi de $(X_n^{\xi^0})_{n\in\mathbb{N}}$ partant de l'origine

Théorème

Le processus mis à l'échelle $\left(\varepsilon X^{\xi^0}_{\lfloor \varepsilon^{-2} t\rfloor}\right)_{t\geq 0}$ converge faiblement en $\mathbb{P}_0$-probabilité vers un mouvement brownien de matrice de covariance $\sigma^2\mathbf{I}$ où σ^2 est positif et ≪ explicite ≫.

Quelques éléments de la preuve :

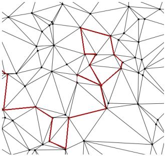
- l'environnement vu par la particule
  $\hookrightarrow$ permet de reconstruire le processus original à partir d'un processus de Markov
- principe d'invariance pour des fonctionnelles additives de processus de Markov [De Masi *et al.*, '89]
- minoration du coefficient de diffusion

Cadre :

- ξ distribué selon un PPP, un MCP ou un MHP dans $\mathbb{R}^d$
- $(X_n^\xi)_{n\in\mathbb{N}}$: marche aléatoire simple sur $DT(\xi)$
- P_x^ξ : loi de $(X_n^\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ partant de $x \in \xi$

Théorème

Pour presque tout ξ, pour tout $x \in \xi$, le processus mis à l'échelle $\left(\varepsilon X^\xi_{\lfloor \varepsilon^{-2} t\rfloor}\right)_{t\geq 0}$ converge faiblement, sous P_x^ξ, vers un mouvement brownien non dégénéré.



$$\xrightarrow[\varepsilon \longrightarrow 0]{}$$

Éléments de la preuve :

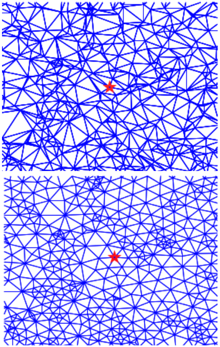


FIGURE : Triangulation de Delaunay et sa déformation harmonique ; source : [Ferrari *et al.*, '13]

- $X_n^\xi = \underbrace{\varphi_\xi(X_n^\xi)}_{\text{martingale}} + \underbrace{\chi_\xi(X_n^\xi)}_{\text{correcteur}}$
- TCL fonctionnel de Lindeberg-Feller pour les martingales
- Sous-linéarité du correcteur :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \max_{x\in\xi\cap[-n,n]^d} \|\chi_\xi(x)\| = 0 \text{ p.s.}$$

Éléments de la preuve :

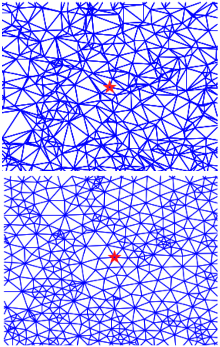


FIGURE : Triangulation de Delaunay et sa déformation harmonique ; source : [Ferrari *et al.*, '13]

- $X_n^\xi = \underbrace{\varphi_\xi(X_n^\xi)}_{\text{martingale}} + \underbrace{\chi_\xi(X_n^\xi)}_{\text{correcteur}}$
- TCL fonctionnel de Lindeberg-Feller pour les martingales
- Sous-linéarité du correcteur :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \max_{x\in\xi\cap[-n,n]^d} \|\chi_\xi(x)\| = 0 \text{ p.s.}$$

$\hookrightarrow$ adapter la méthode de [Biskup et Prescott, '07]

- Il existe un sous-graphe $\mathcal{G}_\infty(\xi)$ connexe et infini tel que les composantes connexes de $\mathrm{DT}(\xi) \setminus \mathcal{G}_\infty(\xi)$ sont finies

Éléments de la preuve :

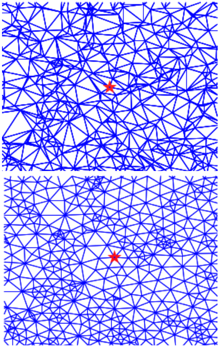


FIGURE : Triangulation de Delaunay et sa déformation harmonique ; source : [Ferrari *et al.*, '13]

- $X_n^\xi = \underbrace{\varphi_\xi(X_n^\xi)}_{\text{martingale}} + \underbrace{\chi_\xi(X_n^\xi)}_{\text{correcteur}}$
- TCL fonctionnel de Lindeberg-Feller pour les martingales
- Sous-linéarité du correcteur :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \max_{x\in\mathcal{G}_\infty(\xi)\cap[-n,n]^d} \|\chi_\xi(x)\| = 0 \text{ p.s.}$$

$\hookrightarrow$ adapter la méthode de [Biskup et Prescott, '07]

- Il existe un sous-graphe $\mathcal{G}_\infty(\xi)$ connexe et infini tel que φ_ξ est harmonique pour

$$\left(\mathcal{L}^\xi f\right)(x) = \sum_{y\in\mathcal{G}_\infty(\xi)} P^\xi\left[X_{T_1}^\xi = y\right]\left(f(y) - f(x)\right)$$

- $(Y_t^\xi)_{t\geq 0}$ marche aléatoire de générateur $\mathcal{L}^\xi$

Éléments de la preuve :

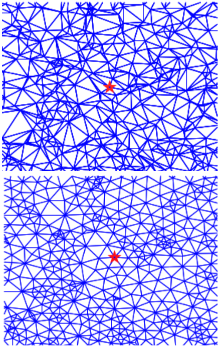


FIGURE : Triangulation de Delaunay et sa déformation harmonique ; source : [Ferrari *et al.*, '13]

- $X_n^\xi = \underbrace{\varphi_\xi(X_n^\xi)}_{\text{martingale}} + \underbrace{\chi_\xi(X_n^\xi)}_{\text{correcteur}}$
- TCL fonctionnel de Lindeberg-Feller pour les martingales
- Sous-linéarité du correcteur :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \max_{x\in\mathcal{G}_\infty(\xi)\cap[-n,n]^d} \|\chi_\xi(x)\| = 0 \text{ p.s.}$$

$\hookrightarrow$ adapter la méthode de [Biskup et Prescott, '07]

- Sous-linéarité en moyenne

$$\forall\varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^d} \sum_{x\in\mathcal{G}_\infty(\xi)\cap[-n,n]^d} \mathbf{1}_{\|\chi_\xi(x)\|\geq\varepsilon n} = 0$$

Éléments de la preuve :

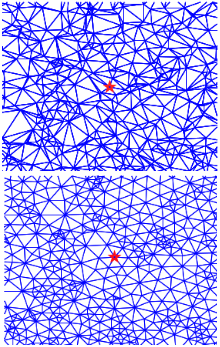


FIGURE : Triangulation de Delaunay et sa déformation harmonique ; source : [Ferrari *et al.*, '13]

- $X_n^\xi = \underbrace{\varphi_\xi(X_n^\xi)}_{\text{martingale}} + \underbrace{\chi_\xi(X_n^\xi)}_{\text{correcteur}}$
- TCL fonctionnel de Lindeberg-Feller pour les martingales
- Sous-linéarité du correcteur :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \max_{x\in\mathcal{G}_\infty(\xi)\cap[-n,n]^d} \|\chi_\xi(x)\| = 0 \text{ p.s.}$$

$\hookrightarrow$ adapter la méthode de [Biskup et Prescott, '07]

- Croissance polynômiale

$$\exists\theta > 0,\ \lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathcal{G}_\infty(\xi)\cap[-n,n]^d} \frac{\|\chi_\xi(x)\|}{n^\theta} = 0$$

Éléments de la preuve :

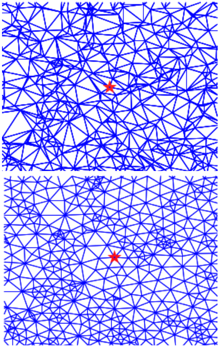


FIGURE : Triangulation de Delaunay et sa déformation harmonique ; source : [Ferrari *et al.*, '13]

- $X_n^\xi = \underbrace{\varphi_\xi(X_n^\xi)}_{\text{martingale}} + \underbrace{\chi_\xi(X_n^\xi)}_{\text{correcteur}}$
- TCL fonctionnel de Lindeberg-Feller pour les martingales
- Sous-linéarité du correcteur :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \max_{x\in\mathcal{G}_\infty(\xi)\cap[-n,n]^d} \|\chi_\xi(x)\| = 0 \text{ p.s.}$$

$\hookrightarrow$ adapter la méthode de [Biskup et Prescott, '07]

- Bornes diffusives

$$\sup_{n\geq 1} \max_{x\in\mathcal{G}_\infty(\xi)\cap[-n,n]^d} \sup_{t\geq n} t^{-\frac{1}{2}} E_x^\xi \left[\|Y_t^\xi - x\|\right] < +\infty \text{ p.s.}$$

et

$$\sup_{n\geq 1} \max_{x\in\mathcal{G}_\infty(\xi)\cap[-n,n]^d} \sup_{t\geq n} t^{-\frac{d}{2}} P_x^\xi \left[Y_t^\xi = x\right] < +\infty \text{ p.s.}$$

Généralisations et perspectives

- D'autres graphes
  $\hookrightarrow$ *creek-crossing graphs*,...
- D'autres processus ponctuels
  $\hookrightarrow$ supprimer le rang de dépendance fini
- Des conductances plus générales
- Estimées précises de la résistance efficace en volume fini
  $\hookrightarrow$ nombre moyen de retours au point de départ avant la sortie d'une fenêtre
- Bornes précises sur le noyau de la chaleur
- Un troisième niveau d'aléa
  $\hookrightarrow$ Piéger les marches
  $\hookrightarrow$ Scènes aléatoires

Merci pour votre attention !