

Rétablissement d'un réseau cellulaire après un désastre

Anaïs Vergne

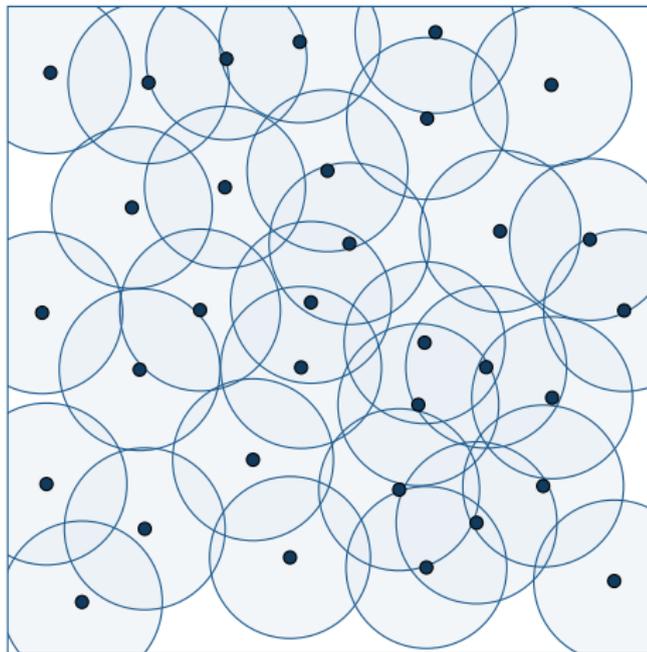
avec Laurent Decreusefond, Ian Flint, et Philippe Martins

Journées MAS 2014

29 août 2014

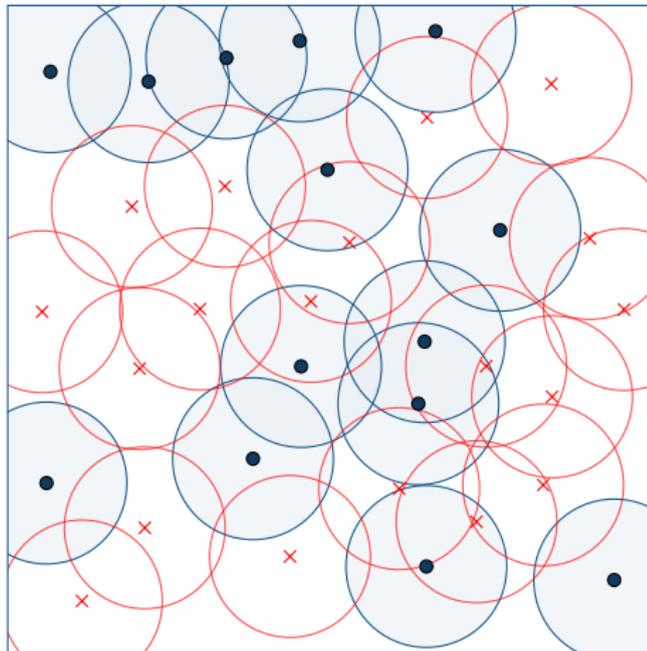
Réseau cellulaire endommagé

- Qualité de service
 - Couverture



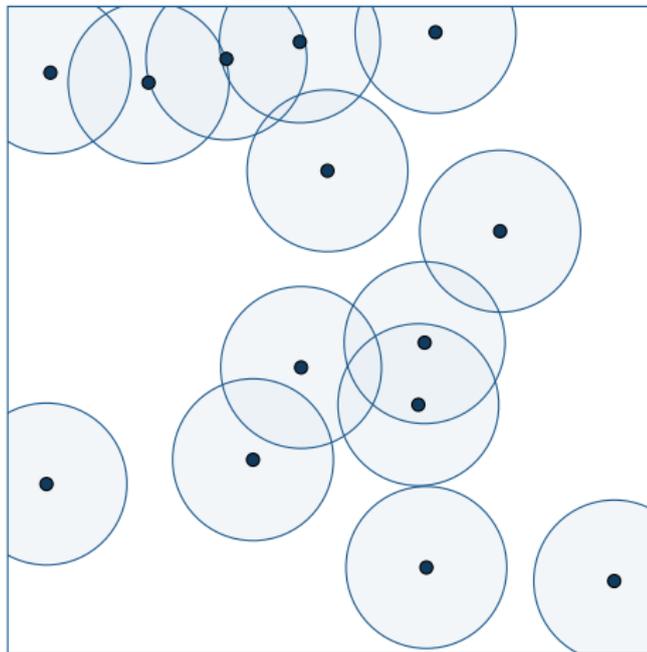
Réseau cellulaire endommagé

- Qualité de service
 - Couverture
- Désastre
 - Noeuds défectueux
 - Plusieurs composantes connexes
 - Trous de couverture



Réseau cellulaire endommagé

- Qualité de service
 - Couverture
- Désastre
 - Noeuds défectueux
 - Plusieurs composantes connexes
 - Trous de couverture



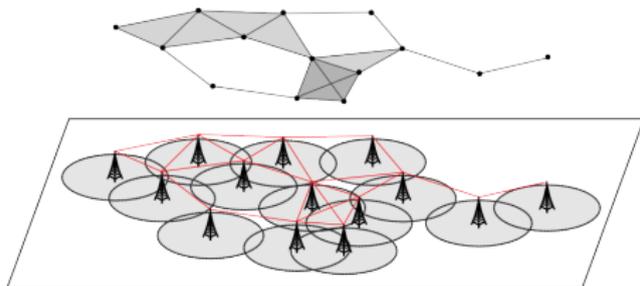
Rétablissement

- Ajout de noeuds temporaires
 - Pas forcément à la même place que les anciens
 - Suffisamment pour réparer le réseau

Questions

- Comment sait-on que le réseau est réparé ?
- Où met-on les nouveaux noeuds ?

Comment sait-on que le réseau est réparé ?



- Données géométriques
- Objet combinatoire
- Structure algébrique
- Interprétation géométrique

Homologie simpliciale

Vocabulaire

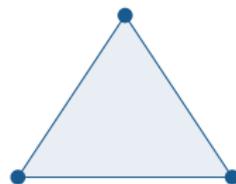
- Un complexe simplicial est une liste de simplexes.
- Un k -simplexe est un ensemble non-ordonné de $k + 1$ sommets.
- Tout sous-ensemble de sommets d'un k -simplexe est une face de celui-ci.



0-simplexe



1-simplexe



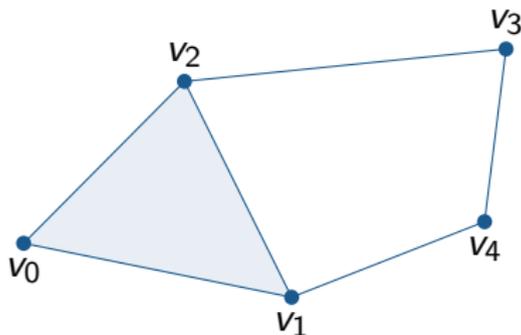
2-simplexe

Homologie simpliciale

Complexe simplicial

X , ensemble de k -simplexes, est un complexe simplicial abstrait si toutes les faces de tous les simplexes de X sont aussi des simplexes de X .

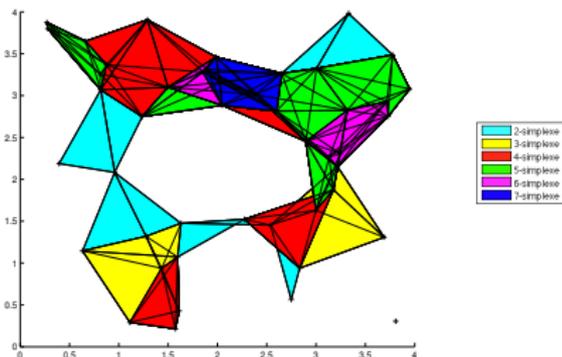
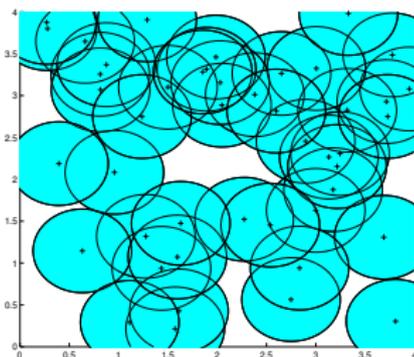
- Cinq 0-simplexes : v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 .
- Six 1-simplexes : $[v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_1, v_2], [v_1, v_4], [v_2, v_3], [v_3, v_4]$.
- Un 2-simplexe : $[v_0, v_1, v_2]$.



Complexe simplicial de couverture

Complexe de Čech

Soient ω un ensemble fini de sommets et ϵ un réel positif, le complexe de Čech $\mathcal{C}_\epsilon(\omega)$ est le complexe défini tel que $k + 1$ sommets forment un k -simplexe si et seulement si l'intersection des $k + 1$ boules de rayon ϵ centrées en ces sommets, est non vide.



Topologie algébrique

Nombres de Betti

Le k -ième nombre de Betti d'un complexe simplicial X est le nombre de trous k -dimensionnels de X .

Exemple

- β_0 est le nombre de composantes connexes
- β_1 est le nombre de trous de couverture
- β_2 est le nombre de vides ($d \geq 3$)

Complexe simplicial de couverture

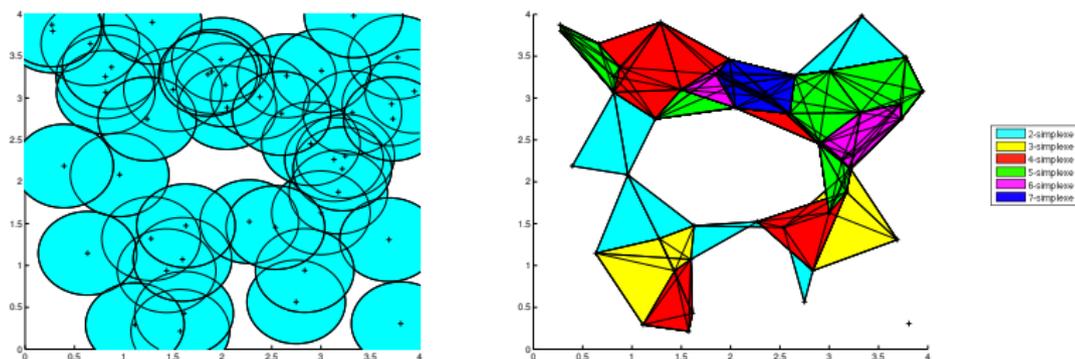
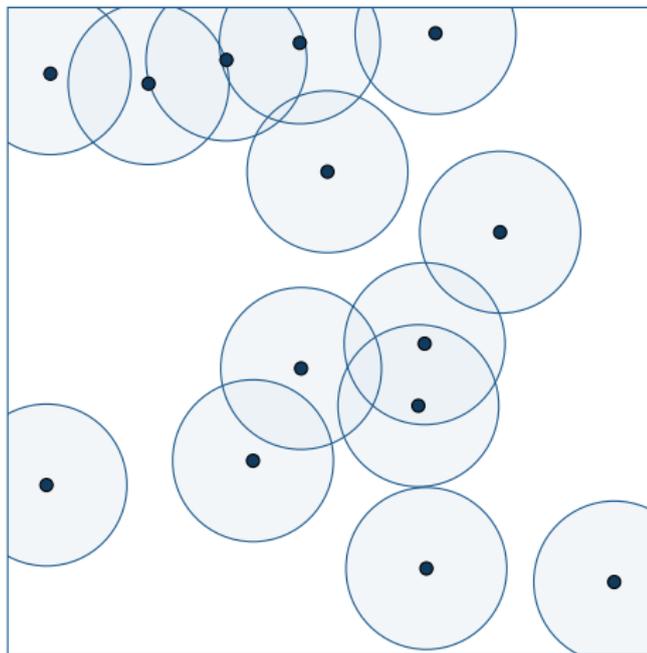


Figure: Un réseau de capteurs et son complexe de couverture associé.

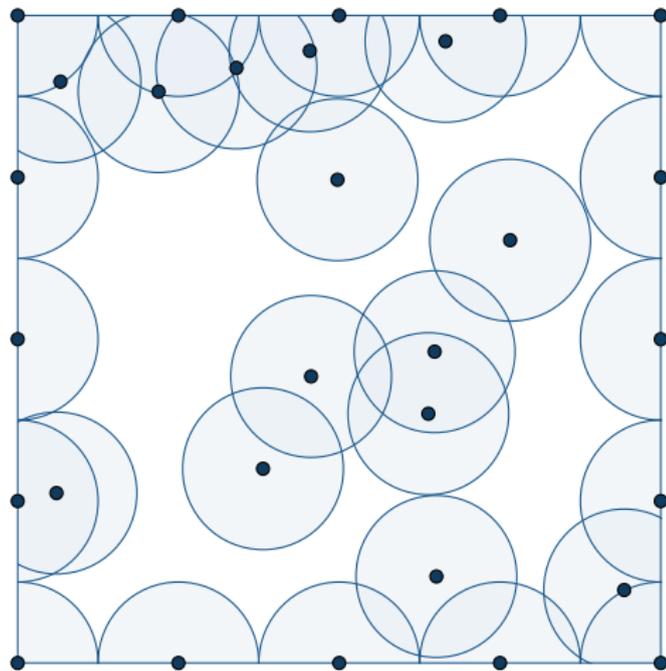
Réseau cellulaire endommagé

- Ajout de noeuds virtuels sur la bordure
 - Pour définir la zone à couvrir



Réseau cellulaire endommagé

- Ajout de noeuds virtuels sur la bordure
 - Pour définir la zone à couvrir



Réseau cellulaire endommagé

- Ajout de noeuds virtuels sur la bordure
 - Pour définir la zone à couvrir
- Calcul des nombres de Betti
 - $\beta_0 = 2$
 - $\beta_1 = 1$



Où met-on les nouveaux noeuds ?

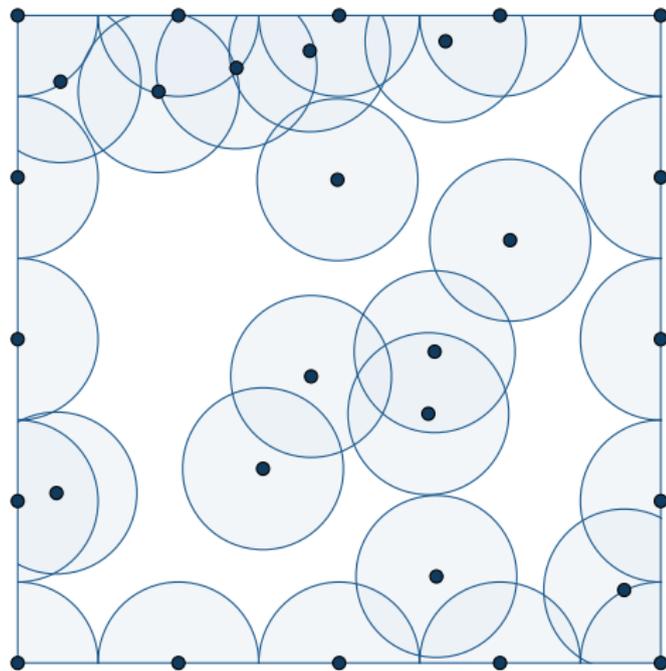
- Contraintes
 - Suffisamment de noeuds pour rétablir le réseau
 - Nombre raisonnable

Méthodes d'ajout

- Grille
- Tirage uniforme
- Avec répulsion

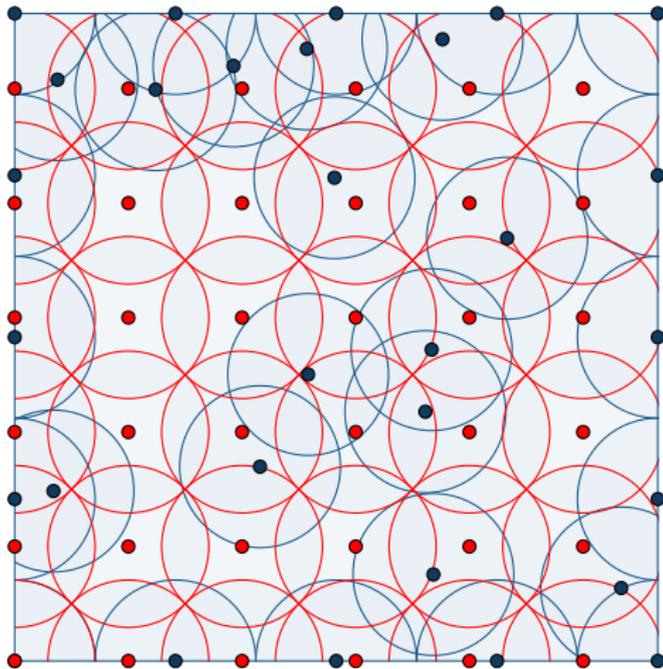
Méthodes d'ajout classiques

- Grille
 - Nombre de noeuds déterministe
 - Positions déterministes



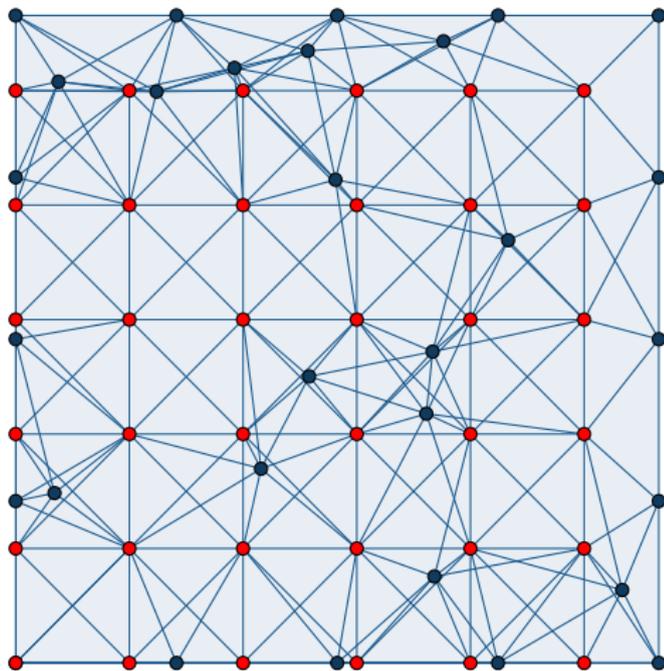
Méthodes d'ajout classiques

- Grille
 - Nombre de noeuds déterministe
 - Positions déterministes



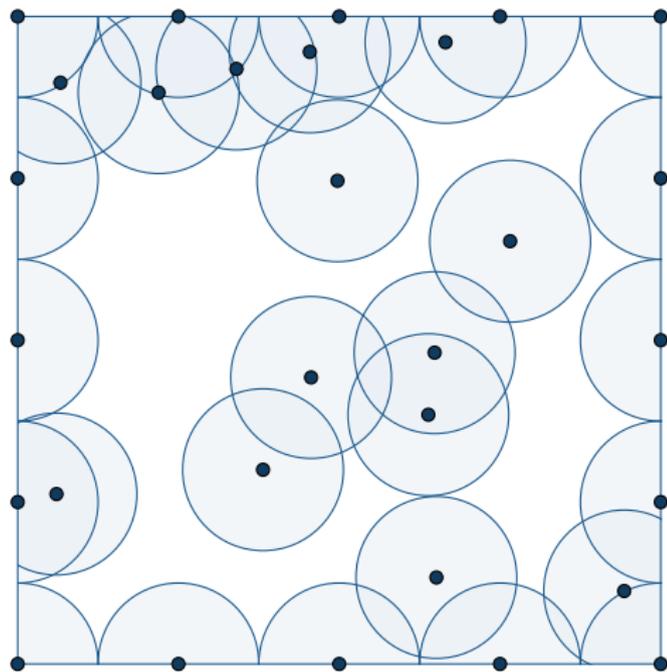
Méthodes d'ajout classiques

- Grille
 - Nombre de noeuds déterministe
 - Positions déterministes



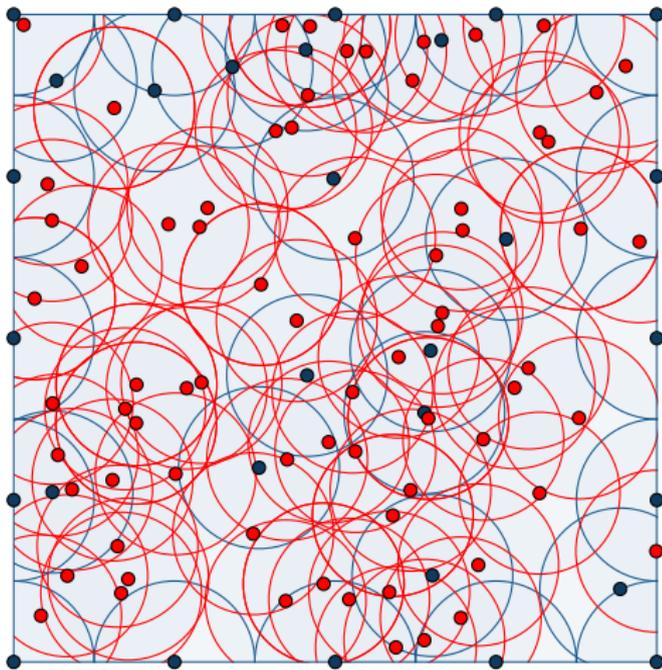
Méthodes d'ajout classiques

- Tirage uniforme
 - Ajout de noeuds jusqu'à ce que le carré soit couvert ($\beta_1 = 0$)
 - Positions aléatoires tirées selon une loi uniforme sur le carré



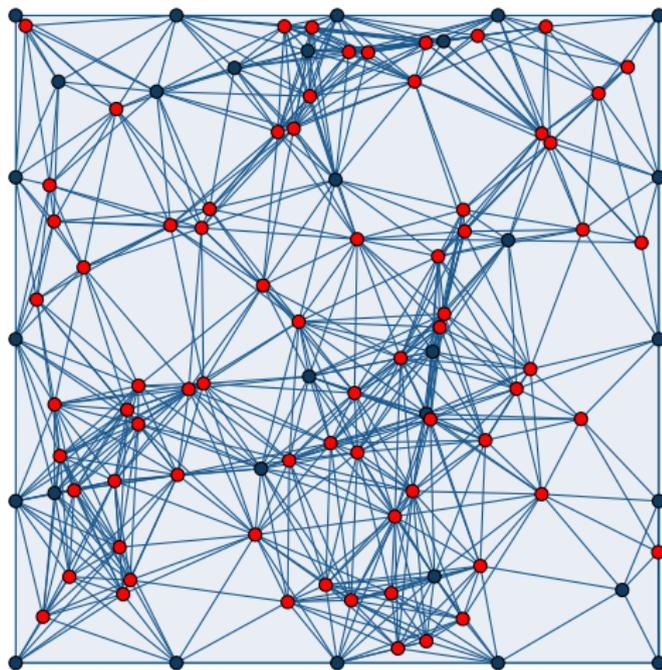
Méthodes d'ajout classiques

- Tirage uniforme
 - Ajout de noeuds jusqu'à ce que le carré soit couvert ($\beta_1 = 0$)
 - Positions aléatoires tirées selon une loi uniforme sur le carré



Méthodes d'ajout classiques

- Tirage uniforme
 - Ajout de noeuds jusqu'à ce que le carré soit couvert ($\beta_1 = 0$)
 - Positions aléatoires tirées selon une loi uniforme sur le carré



Processus ponctuel répulsif

Intensité de Papangelou

Soient x une position et ω la réalisation d'un processus ponctuel donné, $c(x, \omega)$ est la probabilité d'avoir un point dans la région infinitésimale autour de x étant donné l'ensemble de points ω .

- Processus ponctuel de Poisson : $c(x, \omega) = 1 \quad \forall x, \omega$
 - Processus ponctuel répulsif : $c(x, \omega) \geq c(x, \zeta)$ for $\omega \subset \zeta$
 - Processus ponctuel attractif : $c(x, \omega) \leq c(x, \zeta)$ for $\omega \subset \zeta$
-
- Pour un processus ponctuel répulsif, plus l'ensemble de points est grand, plus la probabilité d'avoir un nouveau point est faible.

Processus ponctuel déterminantal

Processus ponctuel déterminantal

Soient X un espace polonais équipé avec la mesure de Radon μ , et K une fonction mesurable complexe sur X^2 , N est un processus ponctuel déterminantal sur X de noyau K si c'est un processus ponctuel sur X et qu'il vérifie les fonctions de corrélations $\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det(K(x_i, x_j)_{1 \leq i, j \leq n})$ pour tout $n \geq 1$ et $x_1, \dots, x_n \in X$.

- Les processus ponctuels déterminantaux sont répulsifs.

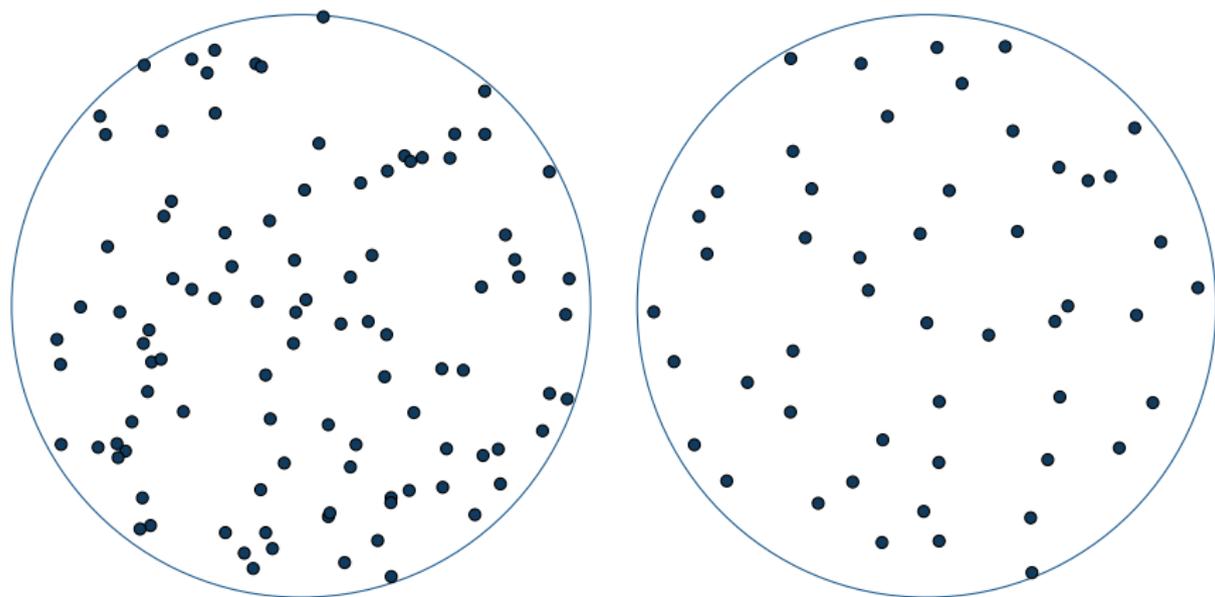
Processus ponctuel déterminantal de Ginibre

Processus ponctuel déterminantal de Ginibre

Le processus ponctuel de Ginibre est le processus ponctuel déterminantal dont le noyau est $K(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \phi_k(x) \overline{\phi_k(y)}$, où $B_k, k = 1, 2, \dots$, sont k variables de Bernoulli indépendantes et $\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi k!}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} x^k$ pour $x \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$.

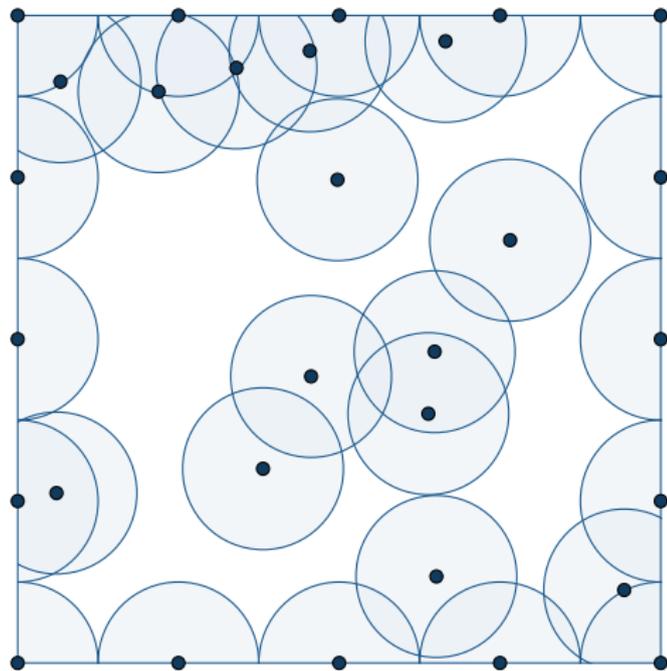
- Relativement simple à simuler sur un compact.
- Répulsion de type électrostatique.
 - \Rightarrow La probabilité de tirer un point augmente avec la distance avec les autres points.

Comparaison processus de Poisson - processus de Ginibre



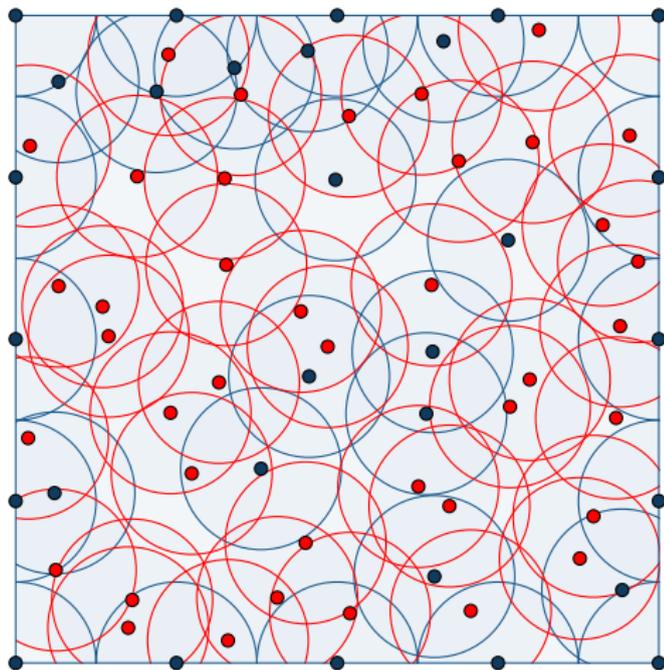
Méthode d'ajout déterminantale

- Avec répulsion
 - Ajout de noeuds jusqu'à ce que le carré soit couvert ($\beta_1 = 0$)
 - Positions aléatoires tirées selon un processus de Ginibre
 - En prenant en compte les noeuds présents



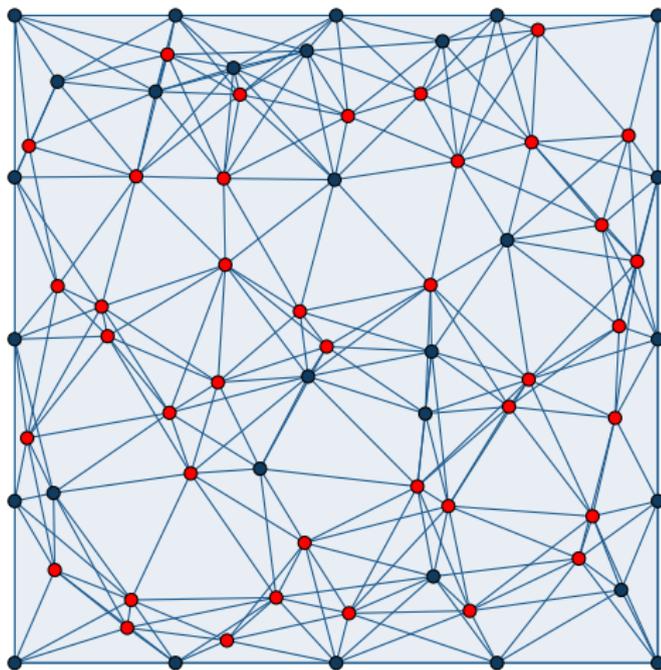
Méthode d'ajout déterminantale

- Avec répulsion
 - Ajout de noeuds jusqu'à ce que le carré soit couvert ($\beta_1 = 0$)
 - Positions aléatoires tirées selon un processus de Ginibre
 - En prenant en compte les noeuds présents



Méthode d'ajout déterminantale

- Avec répulsion
 - Ajout de noeuds jusqu'à ce que le carré soit couvert ($\beta_1 = 0$)
 - Positions aléatoires tirées selon un processus de Ginibre
 - En prenant en compte les noeuds présents



Comparison entre les méthodes d'ajout

- Différents scénarios selon le pourcentage d'aire couverte après le désastre
- Carré de côté 1
- Rayon de couverture de 0.25
- Nombre moyen de noeuds ajoutés :

% d'aire couverte	20%	40%	60%	80%
Grille	9.00	9.00	9.00	9.00
Uniforme	32.51	29.34	24.64	15.63
Déterminantal	16.00	14.62	12.36	7.79

Retrait des noeuds ajoutés superflus

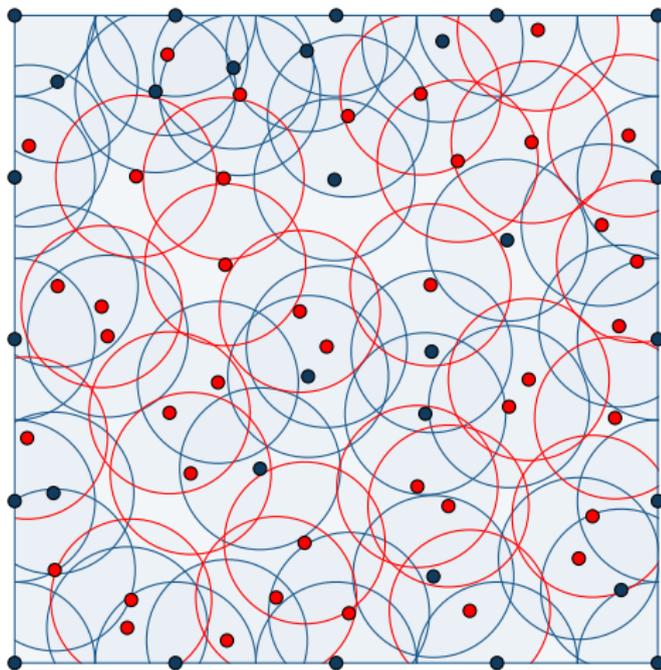
Utilisation de l'algorithme de réduction [1].

Principe

- L'algorithme retire des noeuds parmi ceux ajoutés
- Sans modifier la topologie
- Jusqu'à ce qu'aucun noeud ajouté ne puisse être retiré

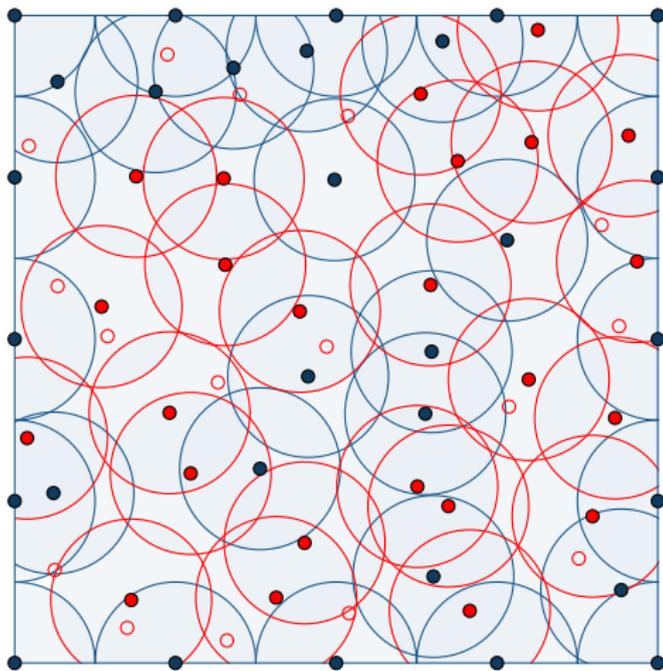
Configuration finale

- Algorithme de réduction
 - Retrait des noeuds ajoutés superflus
 - Nombre de noeuds ajoutés optimisé



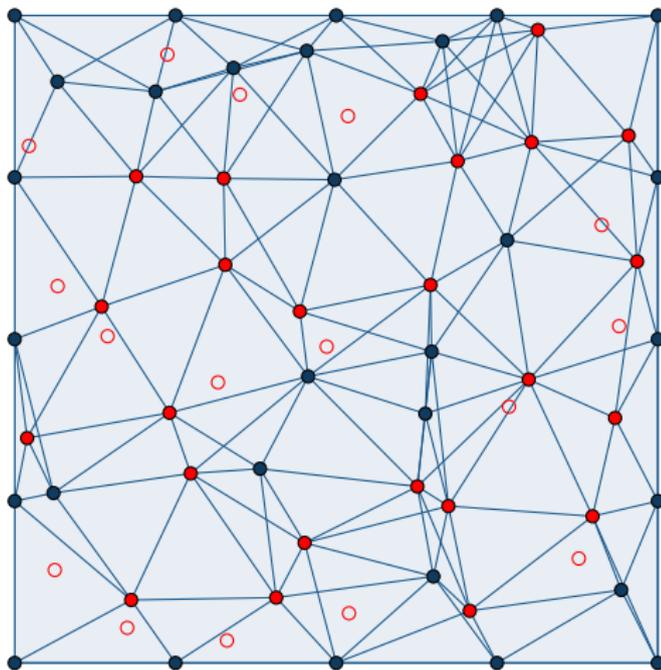
Configuration finale

- Algorithme de réduction
 - Retrait des noeuds ajoutés superflus
 - Nombre de noeuds ajoutés optimisé



Configuration finale

- Algorithme de réduction
 - Retrait des noeuds ajoutés superflus
 - Nombre de noeuds ajoutés optimisé



Comparaison avec un algorithme glouton - Performance

- Algorithme glouton
 - Ajout de noeuds sur une grille
 - Du plus éloigné au plus près
 - Jusqu'à ce que le plus éloigné soit couvert
- Similaire à notre algorithme avec la méthode d'ajout de la grille
- Nombre moyen de noeuds ajoutés au final :

% d'aire couverte	20%	40%	60%	80%
Algorithme glouton	3.69	3.30	2.84	1.83
Algorithme avec homologie	4.42	3.87	2.97	1.78

Comparaison avec un algorithme glouton - Robustesse

- Perturbation Gaussienne sur la position des noeuds ajoutés
- Nombre moyen de trous :

% d'aire couverte	20%	40%	60%	80%
Algorithme glouton	0.68	0.65	0.45	0.35
Algorithme avec homologie	0.62	0.53	0.37	0.26

- Probabilité qu'aucun trou ne soit créé :

% d'aire couverte	20%	40%	60%	80%
Algorithme glouton	40.8%	47.7%	61.0%	69.3%
Algorithme avec homologie	50.9%	58.1%	67.9%	75.3%

Merci pour votre attention.

Bibliography

- [1] A. Vergne, L. Decreasefond, and P. Martins. Reduction algorithm for simplicial complexes. In *INFOCOM, 2013 Proceedings IEEE*, pages 475–479, 2013.
- [2] A. Vergne, I. Flint, L. Decreasefond, and P. Martins. Disaster Recovery in Wireless Networks : A Homology-Based Algorithm. In *International Conference on Telecommunications 2014 (ICT2014)*, May 2014.