





# Grandes matrices aléatoires de Wishart : fluctuations et indépendance asymptotique aux bords du spectre

Walid Hachem

CNRS LTCI ; Télécom ParisTech

Travail mené avec Adrien Hardy (KTH) et Jamal Najim (CNRS)

## Préliminaires

## Modèle matriciel

Matrice aléatoire  $M = \frac{1}{N} X^* \Sigma X$  où  $\Sigma \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est une matrice de covariance et  $X \in \mathbb{C}^{n \times N}$  est aléatoire à éléments indépendants  $\mathcal{CN}(0, 1)$ .

Mesures spectrales

$$\nu_N = \frac{1}{n} \sum_1^n \delta_{\lambda_i} \qquad \mu_N = \frac{1}{N} \sum_1^N \delta_{x_i}$$
$$\{\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n\} = \sigma(\Sigma), \qquad \{x_1 \leq \dots \leq x_N\} = \sigma(M).$$

On suppose que  $N \rightarrow \infty$ ,  $n/N \rightarrow \gamma > 0$  et  $\nu_N \Rightarrow \nu$  à support compact.

On sait alors que  $\mu_N \xrightarrow{\text{p.s.}} \mu(\gamma, \nu)$ . La loi à support compact  $\mu$  est concrètement caractérisée par le biais de sa transformée de Cauchy

$$m(z) = \int \frac{1}{z - x} \mu(dx).$$

# Fluctuations de la plus grande valeur propre

Soit  $\mathfrak{b}_N = \max \text{support}(\mu(n/N, \nu_N))$ .

Baik *et.al.*'05 et El Karoui'07 ont montré que sous certaines conditions,

$$N^{2/3} \omega \times (x_N - \mathfrak{b}_N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \text{TW}$$

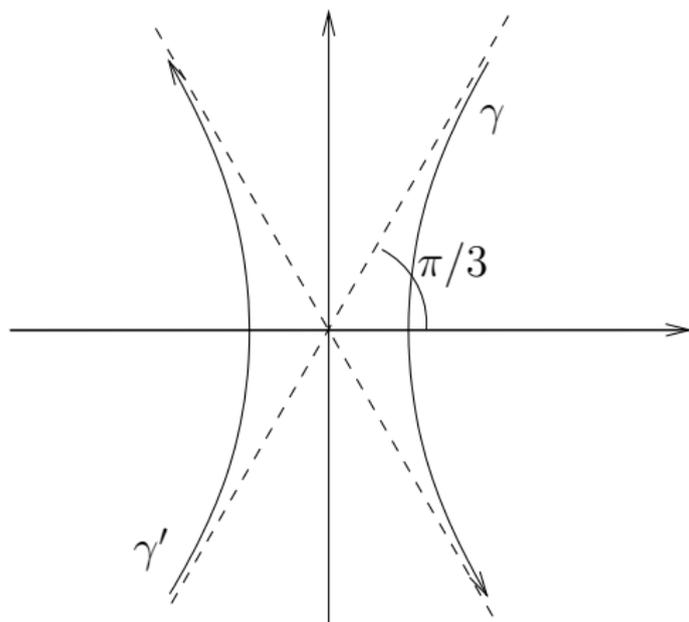
où  $\omega > 0$  est connu et où TW est la loi de **Tracy-Widom** dont la fonction de répartition est

$$F(s) = \det(I - K_{\text{Ai}})_{L^2(s, \infty)} \quad (\text{déterminant de Fredholm})$$

$K_{\text{Ai}}(x, y)$  est le **noyau d'Airy**.

## Une représentation intégrale du noyau d'Airy

$$K_{\text{Ai}}(x, y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \oint_{\gamma} dz \oint_{\gamma'} dw \frac{1}{w-z} e^{-xz+z^3/3+yw-w^3/3}.$$



# Approche de Baik *et.al.* et d'El Karoui

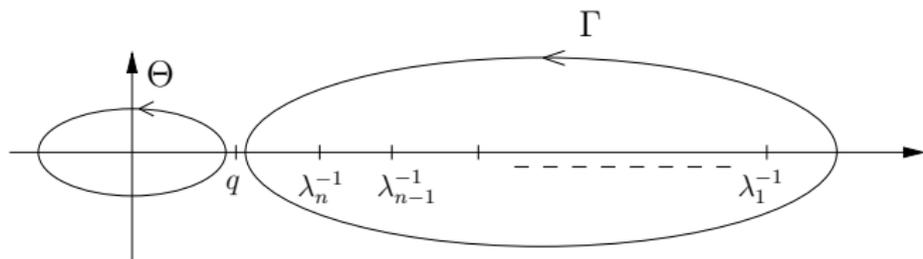
$$\mathbb{P}[(x_N - \mathfrak{b}_N) \leq s] = \mathbb{P}[\text{aucun } x_i \text{ dans } (\mathfrak{b}_N + s, \infty)].$$

Les  $x_i$  non triviaux forment un **processus ponctuel déterminantal** :

$$\mathbb{P}[\text{aucun } x_i \text{ dans un borélien } B] = \det(I - K)_{L^2(B)},$$

$$K(x, y) = \frac{N}{(2i\pi)^2} \oint_{\Gamma} dz \oint_{\Theta} dw \frac{1}{w - z} e^{-Nx(z-q) + Ny(w-q)} \frac{z^N}{w^N} \prod_{j=1}^n \frac{w - \lambda_j^{-1}}{z - \lambda_j^{-1}}$$

(Johansson).



## Approche de Baik *et.al.* et d'El Karoui

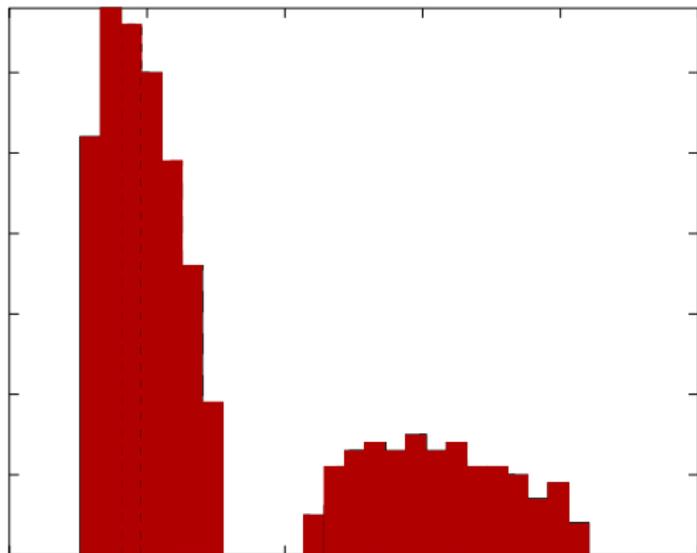
$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N^{2/3}\omega(x_N - b_N) \leq s] &= \det(I - K)_{L^2(b_N + \omega^{-1}N^{-2/3}s, \infty)} \\ &= \det(I - \tilde{K})_{L^2(s, \infty)}\end{aligned}$$

où  $\tilde{K}$  est obtenu par changement de variable.

Par une déformation des contours  $\Theta$  et  $\Gamma$  et une **analyse de point selle**, on prouve que  $\tilde{K} \rightarrow K_{Ai}$  en **norme nucléaire**. Ceci assure que  $\det(I - \tilde{K})_{L^2(s, \infty)} \rightarrow \det(I - K_{Ai})_{L^2(s, \infty)}$ .

## Notre problème

On sait que  $\mu$  possède une densité sauf éventuellement en 0 et que son support peut consister en plusieurs composantes connexes.



Cas où  $\gamma = 0.1$  et  $\nu = 0.7\delta_1 + 0.3\delta_3$ .

Histogramme d'une réalisation des valeurs propres non nulles,  $n = 500$ .

# Notre problème

Nous cherchons à

- ▶ Généraliser les résultats de Baik *et.al.* et d'El Karoui **aux bords de toutes les composantes connexes**,
- ▶ Etablir **l'indépendance asymptotique** des valeurs propres aux bords de ces composantes,
- ▶ Montrer que les fluctuations asymptotiques de la plus petite valeur propres sont décrites par **le noyau de Bessel** quand  $M_N$  est carrée ou presque.

## Fluctuations aux bords du spectre

Description du support et résultats de séparation

Fluctuations aux bords

Etapas de la preuve

## Support de $\mu$

La transformée de Cauchy  $m(z)$  de  $\mu$  est caractérisée par l'équation

$$m = \frac{1}{z - \gamma \int \frac{\lambda}{1 - m\lambda} \nu(d\lambda)}, \quad \Im z > 0, \Im m < 0.$$

Son inverse est

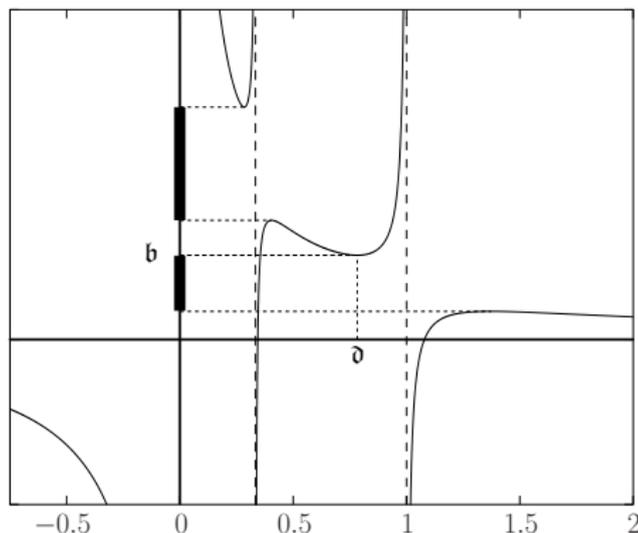
$$g(m) = \frac{1}{m} + \gamma \int \frac{\lambda}{1 - m\lambda} \nu(d\lambda)$$

Sur  $\mathbb{R}$ , toute transformée de Cauchy est  $\searrow$  en dehors du support de la mesure. Idem de son inverse.

## Support de $\mu$

Marchenko-Pastur'67, formalisation par Silverstein-Choi'95 :  
étudier  $g(m)$  sur le domaine  $m \in \mathbb{R}$ ,  $m \neq 0$  et  $m^{-1} \notin \text{support}(\nu)$ .

$g(m)$  où  $g$  est  $\searrow \equiv$  **complément de support**( $\mu$ ) hormis  $\{0\}$ .



Tracé de  $g(m)$  pour  $\gamma = 0.1$  et  $\nu = 0.7\delta_1 + 0.3\delta_3$ .

# Séparation des valeurs propres

Résultats de Bai-Silverstein'98. D'une façon informelle, avec la probabilité un et pour  $N$  grand,

- ▶  $M$  n'a aucune valeur propre dans tout compact en dehors des supports des  $\mu(n/N, \nu_N)$ ,
- ▶ Les nombres de ces valeurs propres de part et d'autre de ce compact sont déterministes et connus.

## Fluctuations aux bords du spectre

Description du support et résultats de séparation

**Fluctuations aux bords**

Étapes de la preuve

# La condition de régularité

Soit

$$g_N(m) = \frac{1}{m} + \frac{n}{N} \int \frac{\lambda}{1 - m\lambda} \nu_N(d\lambda).$$

Un bord  $\mathfrak{b}$  de support  $(\mu)$  satisfait **la condition de régularité** s'il existe  $\vartheta$  tel que  $\mathfrak{b} = g(\vartheta)$  et si

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \min_{i=1}^n |\vartheta - \lambda_i^{-1}| > 0.$$

Si  $\mathfrak{b}$  est un bord droit,

- ▶  $g'(\vartheta)$  existe et est nul. De plus,  $g''(\vartheta) > 0$ .
- ▶  $(\mathfrak{b}, \vartheta)$  possède un équivalent déterministe  $(\mathfrak{b}_N, \vartheta_N)$  tel que  $\mathfrak{b}_N = g_N(\vartheta_N)$  et  $g'_N(\vartheta_N) = 0$ . Il satisfait  $\mathfrak{b}_N \rightarrow \mathfrak{b}$  et pour toute dérivée,  $g_N^{(k)}(\vartheta_N) \rightarrow g^{(k)}(\vartheta)$ .

Résultat analogue pour les bords gauches.

# Fluctuations des valeurs propres aux bords

**Théorème 1** : Supposons que les supports des  $\nu_N$  soient dans un compact de  $(0, \infty)$ . Soit  $\mathfrak{b} = g(\partial)$  un bord droit **régulier** de support  $(\mu)$ . Alors il existe une suite déterministe  $\phi(N)$  connue telle que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} x_{\phi(N)} = \mathfrak{b} \quad \text{et} \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} (x_{\phi(N)+1} - \mathfrak{b}) > 0 \quad \text{p.s.}$$

Par ailleurs,

$$N^{2/3} \omega_N (x_{\phi(N)} - \mathfrak{b}_N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} TW$$

où  $\omega_N = (2/g_N''(\partial_N))^{1/3}$ .

Résultat analogue pour les bords gauches.

## Fluctuations aux bords du spectre

Description du support et résultats de séparation

Fluctuations aux bords

Étapes de la preuve

# Représentation déterminantale

- L'existence de la suite  $\phi(N)$  découle des **résultats de séparation**.  
Grâce à ces résultats, on a aussi

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[N^{2/3}\omega_N(x_{\phi(N)} - \mathfrak{b}_N) \leq s] \\ &= \mathbb{P}[\text{aucun } x_i \text{ dans } (\mathfrak{b}_N + N^{-2/3}\omega_N^{-1}s, \mathfrak{b}_N + \varepsilon)] + o(1), \quad \varepsilon > 0 \text{ petit} \\ &= \det(I - K)_{L^2(\mathfrak{b}_N + N^{-2/3}\omega_N^{-1}s, \mathfrak{b}_N + \varepsilon)} + o(1) \end{aligned}$$

- **Décalage et dilatation** :

$$\det(I - K)_{L^2(\mathfrak{b}_N + N^{-2/3}\omega_N^{-1}s, \mathfrak{b}_N + \varepsilon)} = \det(I - \tilde{K})_{L^2(s, \varepsilon N^{2/3}\omega_N)},$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}(x, y) &= \frac{N^{1/3}}{(2i\pi)^2 \omega_N} \oint_{\Gamma} \oint_{\Theta} \frac{dz dw}{w - z} e^{-N^{1/3}x \frac{z - \mathfrak{d}_N}{\omega_N} + N(f_N(z) - f_N(\mathfrak{d}_N))} \\ &\quad \times e^{N^{1/3}y \frac{w - \mathfrak{d}_N}{\omega_N} - N(f_N(w) - f_N(\mathfrak{d}_N))}, \end{aligned}$$

$$f_N(z) = -\mathfrak{b}_N(z - \mathfrak{d}_N) + \log(z) - \frac{n}{N} \int \log(1 - \lambda z) \nu_N(d\lambda).$$

# Une observation fondamentale

$$f'_N(z) = g_N(z) - g_N(\vartheta_N).$$

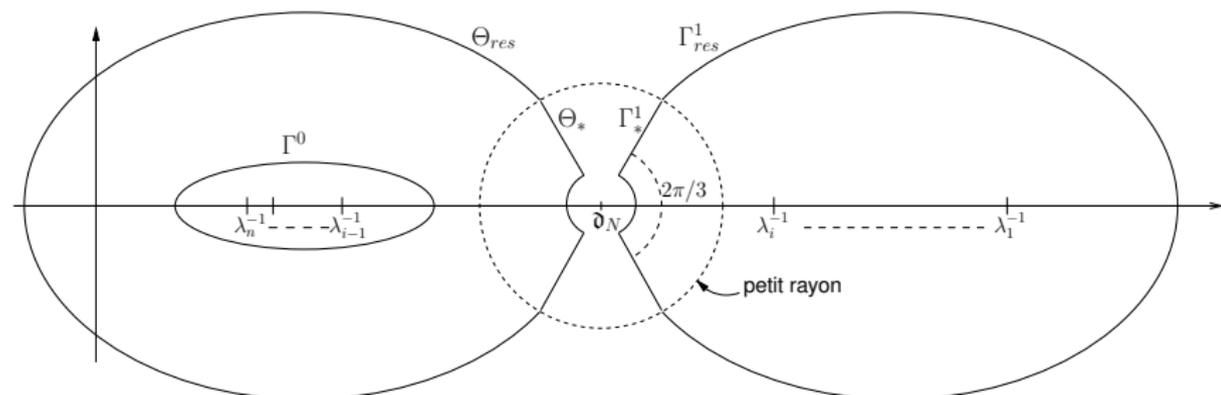
Au voisinage de  $\vartheta_N$  :

$$\begin{aligned} f_N(z) - f_N(\vartheta_N) &= \frac{f^{(3)}(\vartheta_N)}{3!} (z - \vartheta_N)^3 + O(|z - \vartheta_N|^4) \\ &= \frac{(z - \vartheta_N)^3}{3\omega_N^3} + O(|z - \vartheta_N|^4). \end{aligned}$$

$\vartheta_N$  est un **point-selle** d'ordre 2 de  $f_N(z)$ .

## Modification des contours

On cherche à remplacer  $\Gamma$  par deux contours  $\Gamma^0$  et  $\Gamma^1$  et à déformer  $\Theta$  de façon à rendre l'analyse du point-selle possible :



On écrit  $\Gamma^1 = \Gamma_*^1 \cup \Gamma_{res}^1$  et  $\Theta = \Theta_* \cup \Theta_{res}$ .

## Près de $\partial_N$

$$\begin{aligned} & \frac{N^{1/3}}{(2i\pi)^2 \omega_N} \oint_{\Gamma_*^1} \oint_{\Theta_*} \dots \\ & \approx \frac{N^{1/3}}{(2i\pi)^2 \omega_N} \oint_{\Gamma_*^1} \oint_{\Theta_*} \frac{dz dw}{w-z} \exp\left(-N^{1/3} x \frac{z - \partial_N}{\omega_N} + \frac{N(z - \partial_N)^3}{3\omega_N^3}\right. \\ & \quad \left.+ N^{1/3} y \frac{w - \partial_N}{\omega} - \frac{N(w - \partial_N)^3}{3\omega_N^3}\right) \end{aligned}$$

converge vers  $K_{A_i}$  en trace et en norme de Hilbert-Schmidt  
( $\Rightarrow$  convergence des déterminants).

## Loin de $\partial_N$

On prouve qu'il existe un chemin de longueur bornée  $\Gamma_{res}^1$  où  $\Re f_N(z) - \Re f_N(\partial_N) \leq Cste < 0$ . Ainsi,

$$N^{1/3} \oint_{\Gamma_{res}^1} e^{-N^{1/3} x \frac{z - \partial_N}{\omega} + N(f_N(z) - f_N(\partial_N))} dz$$

est négligeable. On ne construit pas explicitement  $\Gamma_{res}^1$ .  
Idem pour  $\Theta_{res}$  et  $\Gamma^0$ .

**Idée** (Delvaux et Kuijlaars'10) : la limite

$$\Re f(z) = -b \Re(z - \partial) + \log |z| - \gamma \int \log |1 - \lambda z| \nu(d\lambda)$$

contient une différence de deux fonctions potentiel. De ce fait, elle est surharmonique sur  $\mathbb{C} - \{0\}$  et sous-harmonique sur  $\mathbb{C} -$  l'image de  $\nu$  par  $x \mapsto x^{-1}$ . L'argument est alors basé sur le **principe du maximum**.

## Indépendance asymptotique

**Théorème 2** : Dans les conditions du théorème 1, soit  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{b}'$  deux bords réguliers quelconques de support( $\mu$ ). Soit  $\phi(N)$ ,  $\phi'(N)$ , ... les paramètres qui leur sont associés comme dans l'énoncé de ce théorème. Alors

$$\left( N^{2/3} \omega_N(x_{\phi(N)} - \mathfrak{b}_N), N^{2/3} \omega'_N(x_{\phi'(N)} - \mathfrak{b}'_N) \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} TW \otimes TW.$$

## Principe de la preuve, cf. Bornemann'10

Comme dans la preuve du théorème 1,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N^{2/3}\omega_N(x_{\phi(N)} - \mathbf{b}_N) \leq s, N^{2/3}\omega'_N(x_{\phi'(N)} - \mathbf{b}'_N) \leq s'] \\ = \det(I - K)_{L^2(B_1 \cup B_2)} + o(1)\end{aligned}$$

où  $B_1$  et  $B_2$  sont deux intervalles disjoints.

Ce déterminant admet la représentation matricielle

$$\det(I - K)_{L^2(B_1 \cup B_2)} = \det\left(I - \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}\right)_{L^2(B_1) \oplus L^2(B_2)}$$

où  $K_{ij} : L^2(B_j) \rightarrow L^2(B_i)$  est l'opérateur intégral

$$K_{ij}h(x) = \int_{B_j} K(x, y)h(y) dy, \quad x \in B_i.$$

Après décalage, dilatation, etc., en utilisant la représentation intégrale de Bleher et Kuijlaars'05, on prouve que **les termes non diagonaux**  $\rightarrow 0$  **en norme de Hilbert-Schmidt.**

La plus petite valeur propre

**Théorème 3** : Supposons que les supports des  $\nu_N$  soient dans un compact de  $(0, \infty)$ , et que  $n = N + \alpha$  où  $\alpha \geq 0$  est fixe. Alors  $x_1 \rightarrow 0$  p.s.

Soit

$$\sigma_N = \frac{4}{N} \sum_1^n \frac{1}{\lambda_j}.$$

Alors, pour tout  $s > 0$ ,

$$\mathbb{P}[N^2 \sigma_N x_1 \geq s] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \det(I - K_{Be, \alpha})_{L^2(0, s)}$$

où  $K_{Be, \alpha}$  est le **noyau de Bessel** de paramètre  $\alpha$ .

En particulier, si  $N = n$ , alors  $\mathbb{P}[N^2 \sigma_N x_1 \geq s] \rightarrow \exp(-s)$ .

Preuve basée sur une représentation intégrale du noyau de Bessel.