Convergence à l'équilibre d'EDS fractionnaires multiplicatives d'ordre $H > 1/2$

Fabien Panloup, Institut de Mathématiques de Toulouse (Collaboration avec J. Fontbona).

Toulouse
28 août 2014

Plan de l'exposé

Objectif

- $(X_t)_{t\geq 0}$ solution à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t^H$$

  où $(B_t^H)_{t\geq 0}$ est un fBm d'ordre $H > 1/2$, b et σ sont (au minimum) continus et σ non constant.
- Objectif : Sous hypothèses de rappel sur le drift et de non-dégénérescence de σ, établir des résultats de vitesse de convergence à l'équilibre pour cette EDS.
- Pas de résultats existants pour les EDS multiplicatives.

Résultats dans le cas additif

Dans le cas σ constant, on a un résultat dû à Hairer (2004) : si

- σ est non dégénérée,
- b est (fortement) contractant en dehors d'un compact :

$$(b(x) - b(y)|x - y) \leq \min(\beta - \alpha|x - y|^2, C|x - y|^2),$$

alors

- Théorème (Hairer04) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall t \geq 0, \quad \|\mathcal{L}(X_t^x) - \bar{\mu}\|_{TV} \leq Ct^{-(\alpha-\varepsilon)}$$

avec

$$\alpha = \begin{cases} 1/8 & \text{si } H > 1/4 \\ H(1-2H) & \text{si } H < 1/4 \end{cases}$$

où $\bar{\mu}$ est la "loi invariante".

Remarques

- Résultat obtenu par méthode de couplage "$\Longrightarrow$" Résultat fonctionnel : la loi du processus shifté converge vers la loi de la "solution stationnaire".

- Si $\beta = 0$ dans l'hypothèse, alors la vitesse est exponentielle (en distance de Wasserstein et en variation totale) mais ce cas n'est pas représentatif. Dans le cas non trivialement contractant, la mémoire du système dynamique "implique" une vitesse non exponentielle.

- L'objectif de la suite est donc d'étendre le théorème précédent au cas multiplicatif lorsque $H > 1/2$.

Rappels standards

- B^H est un processus gaussien à accroissements stationnaires tel que

$$\forall 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}[B_t^H - B_s^H|^2] = d(t-s)^{2H}.$$

$\Longrightarrow$ (Kolmogorov) B^H est à trajectoires θ-Hölderiennes pour tout $\theta < H$.

- Ainsi, lorsque $H > 1/2$, pas de vrais problèmes pour la définition des intégrales (intégrales définies au sens de Young).

- Existence et unicité des solutions sous l'hypothèse

$(\mathbf{H_0})$: b est localement lipschitzienne sous-linéaire et σ est une fonction bornée $(1+\gamma)$-lipschitzienne avec $(\gamma \in (\frac{1}{H} - 1, 1])$.

Structure Markovienne ?

- $(X_t)_{t\geq 0}$ est non Markovien (puisque les accroissements du fBm ne sont pas indépendants). Afin de définir correctement la notion de mesure invariante, on doit cependant munir la dynamique d'une structure markovienne.
- Heuristique à temps discret : $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, suite stationnaire et

$$X_0 = x, \quad \text{et } \forall n \geq 1, \quad X_{n+1} = F(X_n, \Delta_{n+1}),$$

- Random Dynamical System : Θ opérateur de shift sur $\Omega = (\mathbb{R}^q)^{\mathbb{Z}}$ (muni de la topologie produit) défini pour tout $w \in \Omega$ par : $\forall j \in \mathbb{Z}$, $(\Theta(w))_j = w_{j+1}$. Le système peut alors être vu comme la projection sur la première coordonnée du système grossi $(X_n, \Theta^n\Delta)_{n\geq 0}$ de condition initiale $(x, (\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}})$ et d'évolution donnée par la fonctionnelle φ :

$$\varphi(x, w) = (F(x, (\Theta w)_0), \Theta w)$$

  Dynamique déterministe homogène : μ mesure invariante sur l'espace produit $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^q)^{\mathbb{Z}}$ si point fixe pour $\pi \mapsto \pi \circ \varphi^{-1}$.
- Défaut : Espace trop gros (filtration de la dynamique constante).

Structure Markovienne ?

- Stochastic Dynamical System : on suppose que $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ admet une représentation en moyenne mobile :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \Delta_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \xi_{n-k} = \langle \mathbf{a}, \xi_{n-.} \rangle, \tag{1}$$

où $(a_k)_{k\geq 0}$ est une suite de réels positifs tels que $a_0 \neq 0$ et $\sum a_k^2 < +\infty$, $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ (processus d'innovation) *i.i.d.*, $\xi_1 \sim \mathcal{N}(0, I_q)$. Notons $\sqcup$ l'opérateur de *concaténation* de $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^q \to \bar{\Omega}$ défini par

$$\forall w \in \bar{\Omega},\ \forall \delta \in \mathbb{R}^q, \quad (w \sqcup \delta)_k = \begin{cases} w_{k+1} & \text{si } k \leq -1 \\ \delta & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

et $\psi : \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^q)^{\mathbb{Z}^-} \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^q)^{\mathbb{Z}^-}$ définie par

$$\psi(x, w, \delta) = (F(x, \langle \mathbf{a}, w \sqcup \delta \rangle)), w \sqcup \delta).$$

Structure Markovienne / Loi stationnaire

- La dynamique peut alors être représentée au travers du noyau de transition Q défini sur $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^q)^{\mathbb{Z}^-}$ par

$$Qf((x,w)) = \int f(\psi(x,w,\delta))\mathbb{P}_{\xi_1}(d\delta).$$

- Condition initiale : loi sur $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^q)^{\mathbb{Z}^-}$ (en termes probabilistes, couple $(X_0, (\xi_k)_{k\leq 0})$).
- Mesure invariante : condition initiale μ telle que $\mu Q = \mu$.
- $\mathbb{P}_\mu$: loi de $(X_t)_{t\geq 0}$ de condition initiale μ. Si μ est invariante, c'est la loi du processus en régime stationnaire.
- On dit qu'il y a unicité de la mesure invariante si $\mathbb{P}_\mu$ est unique (voir articles de Hairer-Ohashi, H.-Pillai pour critères d'unicité de type "Feller fort+ irréductibilité topologique").

A temps continu

- A temps continu, la représentation “moyenne mobile” du fBm est connue sous le nom de représentation de Mandelbrot-Van Ness.

$$B_t^H = \alpha_H \int_{-\infty}^0 (-r)^{H-\frac{1}{2}} \left(dW_{r+t} - dW_r\right), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

  où $(W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un mouvement brownien d-dimensionnel (indexé par $\mathbb{R}$) et α_H est un coefficient de normalisation dépendant de H.

- Le même type d'idée de construction est alors possible mais nécessite la définition d'espaces adéquats (espaces de type hölderien sur $\mathbb{R}^-$) que nous ne détaillerons pas ici.

- Dans ce qui précède, on a choisi de travailler sur l'espace des innovations (où vit le Brownien). On peut de manière équivalente travailler sur l'espace où vit B^H (bijection entre les deux espaces).

Couplage : généralités

- Idée : construire deux copies $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ issues respectivement de μ_0 et μ (terminologie un peu abusive car dans ce cadre les conditions initiales sont couplées) et tenter de les "coller". Supposons que ça soit possible et notons

$$\tau_\infty := \inf\{t > 0, \forall s \geq t, X_s = \tilde{X}_s\}.$$

  $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ étant de loi initiale la mesure invariante, il est donc stationnaire et pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{L}(\tilde{X}_{t+.}) = \mathbb{P}_\mu$. Ainsi, via la définition de τ_∞,

$$\|\mathcal{L}(X_{t+.}) - \mathbb{P}_\mu\|_{TV} \leq \mathbb{P}(\tau_\infty > t).$$

- Dans un cadre markovien, rester collé n'a pas de coût (i.e. est possible avec proba 1).

- Ici, assurer que les accroissements du fBm soient identiques après collage nécessite des innovations différentes, *i.e.* un couplage non trivial (sauf si le passé est identique ce qui n'est pas raisonnable).

Couplage : généralités

Notons τ_{k-1} le début de la k-ième tentative de couplage (en supposant que les précédentes ont échoué). On suppose que le système est dans un *état admissible*.

- Etape 1 : On tente de coller les positions sur un intervalle de longueur 1.

- Etape 2 : si $X_{\tau_{k-1}+1} = \tilde{X}_{\tau_{k-1}+1}$, alors on tente de garder les trajectoires collées sur des intervalles successifs de longueur 2^N, *i.e* d'assurer que $dB_t^H = d\tilde{B}_t^H$.

  Etape 3 : si l'une des étapes précédentes rate, on attend le temps suffisant pour être à nouveau dans un état admissible puis on tente la $(k+1)$-ème tentative. Sur cette étape, les innovations sont les mêmes.

Admissibilité

- On dit que le système est dans un état admissible si les conditions sont réunies pour que la probabilité que les étapes 1 et 2 soient réussies est strictement positive (minorée par $\delta > 0$ indépendemment de k). Cela suppose que

- Les positions $X_{\tau_{k-1}}$ et $\tilde{X}_{\tau_{k-1}}$ ne soient pas trop éloignées (Etape 1)

- Le passé de chaque bruit n'est pas trop “violent” (plutôt spécifique au cadre multiplicatif).

- Les passés des fBms B et $\tilde{B}$ soient suffisamment proches (Etape 2). On va pour cela exploiter que le fBm oublie progressivement son passé.
- Remarque : lorsque σ est constant, l'hypothèse de contraction en dehors d'un compact permet d'assurer que les positions se rapprochent naturellement, contrôlée de manière déterministe si les bruits sont identiques (“quasi-déterministe” si les bruits ne diffèrent

Proximité des passés

- Hypothèse 1 : on réalise une construction où les fBms et les innovations diffèrent d'un drift (fondamental) :

$$d\tilde{B}_t^H = dB_t^H + g_B(t)dt \quad \text{et} \quad d\tilde{W}_t = dW_t + g_w(t)dt.$$

- Sous hypothèses de régularité, g_B et g_w sont reliées par des relations intégrales. Par exemple,

$$g_w(t) = \alpha_H \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{\frac{1}{2}-H} g_B(s)ds.$$

- Pour assurer que les trajectoires restent collées après un instant t_0, on doit assurer que $g_B(t) = 0$ pour $t > t_0$. Dans ce cas, on a (si bien défini) pour $t > t_0$, $g_w(t) = \mathcal{R}_0 g_w^{t_0}(t)$ où $g_w^{t_0}(t) = g_w(t+t_0)$ et pour une fonction g et $T \geq 0$,

$$(\mathcal{R}_T g)(t) = C \int_{-\infty}^{0} \frac{t^{\frac{1}{2}-H}(T-s)^{H-\frac{1}{2}}}{t+T-s} g(s)ds.$$

Remarque : La fonction g_w qui permet d'assurer le succès de l'étape 2 est $\mathcal{F}_{t_0}$-mesurable.

Définition de la (K,α)-admissibilité

Définition : Soient $K,\alpha>0$ et τ un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Le système est dit (K,α)-admissible à l'instant τ si $\tau(\omega)<+\infty$ et si $(X_\tau(\omega),\tilde{X}_\tau(\omega),(W(\omega),\tilde{W}(\omega))_{t\leq\tau})$ satisfait:

$$\sup_{T\geq 0}\int_0^{+\infty}(1+t)^{2\alpha}|(\mathcal{R}_T g_w^\tau)(t)|^2 dt \leq 1. \tag{3}$$

et si

$$|X_\tau(\omega)|\leq K, \quad |\tilde{X}_\tau(\omega)|\leq K, \quad \varphi_{\tau,\varepsilon_\theta}(W(\omega))\leq K \quad \varphi_{\tau,\varepsilon_\theta}(\tilde{W}(\omega))\leq K, \tag{4}$$

où $\varepsilon_\theta=\frac{H-\theta}{2}$ et pour $\varepsilon>0$,

$$\varphi_{\tau,\varepsilon}(w)=\sup_{\tau\leq s\leq t\leq\tau+1}\left|\frac{1}{t-s}\int_{-\infty}^{\tau-1}(t-r)^{H-\frac{1}{2}}-(s-r)^{H-\frac{1}{2}}dw_r\right|+\|w\|_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\tau-1,\tau}$$

Commentaires

- La première hypothèse traduit la proximité des passés avant le début de la tentative. La valeur de α est fondamentale et "déterminera" l'ordre de la vitesse.
- La seconde hypothèse est spécifique au cas non constant : on suppose que les positions sont dans un compact et que le passé de chaque trajectoire est contrôlé de manière déterministe. Point important : elle ne sera pas assurée avec probabilité 1 mais seulement avec probabilité strictement positive (différent du Meyn-Tweedie classique) : difficulté principale du travail.
- Sous ces hypothèses, on est capable d'assurer la réussite de la tentative (couplage asymptotique) avec probabilité strictement positive.

A propos de l'étape 1

- 1er point : construire à la main un terme de drift g_B^S sur $[\tau_k, \tau_k + 1]$ tel que $X_{\tau_k+1} = \tilde{X}_{\tau_k+1}$. Dans le cas σ constant, on pose $\rho_t = \tilde{X}_t - X_t$ de sorte que

$$d\rho_t = (b(X_t) - b(X_t + \rho_t))dt + \sigma g_B^S(t)dt$$

  Si σ est non dégénérée et que $(b(x) - b(y)|x - y) \leq C|x - y|^2$, on peut alors construire g_B de manière à ce que $|\rho_t|$ "décroisse" vers 0 en un temps 1 ($g_B^S(t) = -\sigma^{-1}C\rho_t - \rho_t/|\rho_t|^{3/2}$).

- Si σ est non constant, (ρ_t) n'est pas un drift. On choisit ici de se ramener plus ou moins à ce cas en supposant que :
  $(\mathbf{H_1})$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\sigma(x)$ est inversible and il existe une fonction $\mathcal{C}^1$ $h = (h_1, \ldots, h_d) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ telle que sa matrice jacobienne $\nabla h = (\partial_{x_j} h_i)_{i,j \in \{1,\ldots,d\}}$ vérifie $\nabla h(x) = \sigma^{-1}(x)$ et telle que ∇h est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$.

A propos de l'étape 1 (suite)

- Commentaires sur $(\mathbf{H_1})$: assure que h est un $\mathcal{C}^1$-difféormorphisme global car ∇h est inversible et $x \mapsto [(\nabla h)(x)]^{-1} = \sigma(x)$ est bornée (théorème de Hadamard-Lévy). Ainsi, $h(x) = h(\tilde{x})$ implique que $x = \tilde{x}$. Vrai dès que
$$\sigma(x) = P\mathrm{Diag}\left(\sigma_1(x_1, \ldots, x_d), \ldots, \sigma_d(x_1, \ldots, x_d)\right)$$
où P est inversible et $\sigma_1, \ldots,$ σ_d sont des fonctions strictement positives à valeurs réelles.

- Second point : on définit g_w^S sur $[\tau_k, \tau_k + 1]$ (par les relations intégrales) puis on construit le couplage $(W, \tilde{W})$ à l'aide du théorème de Girsanov de sorte que $d\tilde{W}_t = dW_t + g_w^S(t)dt$ avec proba> 0. La minoration de la probabilité de réussite nécessite en particulier un contrôle de g_w^S qui lui-même est basé sur l'admissibilité et une restriction de l'espace (particularité de la construction du couplage, que l'on rate ou que l'on réussisse, la fonction g_w doit être contrôlée pour le futur).

A propos de l'étape 2

- Notons g_w^S la fonction de couplage ($d\tilde{W}_t = dW_t + g_w^S(t)dt$) qui assure le succès de l'étape 2. Point important : il s'agit d'une fonction $\mathcal{F}_{\tau_k+1}$-mesurable. On a (grâce à l'admissibilité et la construction contrôlée de g_w^S pendant l'étape 1)

$$\int_0^{+\infty} (1+t)^{2\alpha} |g_w^S(\tau_k + 1 + t)|^2 dt \leq C_K.$$

En particulier,

$$\int_{\tau_k+1+2^N}^{\tau_k+1+2^{N+1}} |g_w^S(t)|^2 dt \leq C 2^{-2\alpha N}$$

ce qui implique que

$$\mathbb{P}(\text{Réussite de l'étape 2}) \geq C \prod_{N \in \mathbb{N}} 2^{-2\alpha N} > 0.$$

- Méthode de couplage non fonctionnelle (encore une fois, il est fondamental de contrôler le comportement lorsque l'on rate).

A propos de l'étape 3

- Lors de la k-ième tentative, notons N^* l'essai raté de l'étape 2 ($N^* = 0$ si l'étape 1 échoue). Alors, on suppose que l'étape 3 a pour durée :
$$\Delta_3(N^*, k) = \varsigma^k 2^{\beta N^*} \quad (\varsigma > 1, \beta > 1)$$
- Le poids du passé croît avec les tentatives. Heureusement, on peut choisir ς arbitrairement proche de 1 (sans jouer sur l'exposant de la vitesse).

  Naturellement, plus on échoue tardivement, plus l'attente est longue. On devra de plus choisir $\beta > (1 - 2\alpha)^{-1}$.

Lyapounov

- Afin d'assurer la condition 2 de (K, α)-admissibilité, on introduit l'hypothèse de Lyapounov suivante :
  $(\mathbf{H_2})$: Il existe $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+^* \ \mathcal{C}^1$ telle que ∇V est lipschitzienne,
  $$\liminf \frac{V(x)}{|x|^2} > 0, \quad \text{et} \quad |\nabla V| \leq C\sqrt{V}$$
  et telle qu'il existe $\beta_0 > 0$ and $\kappa_0 > 0$ tels que
  $$\forall\, x \ \in \mathbb{R}^d, \quad (\nabla V(x)|b(x)) \leq \beta_0 - \kappa_0 V(x).$$
- Sous cette hypothèse, pour tout $\theta \in (1/2, H)$, il existe $\rho \in (0,1)$ et $C > 0$ tels que
  $$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad V(X_1^x) \leq \rho V(x) + C(\|B^H\|_\theta^{0,1})^{r_\theta}$$
  où $r_\theta > 1$ et
  $$\|f\|_\theta^{0,1} = \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\theta}.$$

Lyapounov (suite)

- Le but est alors d'en déduire qu'il existe

$$\sup_{k\geq 0}\mathbb{E}[V^{\frac{1}{r_\theta}}(X_{\tau_k})|\mathcal{E}_k]\leq C \quad \text{(indépendant de } K\text{)}$$

  où $\mathcal{E}_k=\{$les k premières tentatives ont échoué$\}$.

- Difficulté principale : on conditionne sur les échecs passés ce qui déforme la loi des accroissements du fBm de X et $\tilde{X}$. Il faut donc étudier le passé du Brownien conditionnellement à chaque scénario.

- Points techniques : afin de limiter l'effet du conditionnement, on empêche le couplage d'être réussi avec une probabilité trop importante. De même, l'augmentation de la durée de l'étape 3 avec le nombre de tentatives joue aussi un rôle positif.

Condition 2 d'admissibilité (fin)

Via ce type de raisonnement, on obtient que pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, il existe $K > 0$ tel que pour tout k,

$$\mathbb{P}(|X_{\tau_k}| \leq K, |\tilde{X}_{\tau_k}| \leq K, \varphi_{\tau_k,\varepsilon_\theta}(W) \leq K\varphi_{\tau_k,\varepsilon_\theta}(\tilde{W}) \leq K) > \varepsilon.$$

Résultat

Théorème. Soit $H \in (1/2, 1)$. Supposons $(\mathbf{H_0})$, $(\mathbf{H_1})$ et $(\mathbf{H_2})$ satisfaites. Alors, on a existence et unicité pour la mesure invariante μ (à équivalence près). De plus, pour toute loi initiale μ_0 telle qu'il existe $r > 0$ tel que $\int |x|^r \bar{\mu}_0(dx) < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ alors il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall t \geq 0, \|\mathcal{L}((X_{t+s}^{\mu_0})_{s\geq 0}) - \mathbb{P}_\mu\|_{TV} \leq C_\varepsilon t^{-(\frac{1}{8}-\varepsilon)}.$$

Perspectives

- Elimination de l'hypothèse $(\mathbf{H_1})$.
- Amélioration de l'exposant via une optimisation de la méthode.
- Aborder le problème avec une autre distance (Wasserstein) afin de mieux sentir l'influence de la mémoire (exemple : potentiels à fonds plat).