Comportement en temps long de diffusions interagissant à travers leur rang

Julien Reygner

École des Ponts ParisTech et Université Pierre et Marie Curie

Journées MAS, Toulouse
28 août 2014

Travail en collaboration avec Benjamin Jourdain

Introduction : équation quasilinéaire parabolique

Soient $b, \sigma : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues ; $A(u) := \int_0^u \sigma^2(v)\mathrm{d}v$, $B(u) := \int_0^u b(v)\mathrm{d}v$.

But de l'exposé : étude du **comportement en temps long** de

$$\boxed{\partial_t F_t(x) = \frac{1}{2}\partial_x^2\big(A(F_t(x))\big) - \partial_x\big(B(F_t(x))\big),}$$

avec $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Contient une large classe d'équation :

- $b = 0$: équation de la chaleur, des milieux poreux ;
- $\sigma^2 = \mathrm{Cte}$: lois de conservation, équation de Burgers ;
- etc.

Fonctions de répartition

On suppose que la condition initiale s'écrit

$$\boxed{F_0(x) = H * m(x) = \int_{y=-\infty}^{x} m(\mathrm{d}y),}$$

fonction de répartition de la mesure de probabilité m.

On cherche des solutions F_t qui **restent des fonctions de répartition**.

- Peut-on donner une **représentation probabiliste** des solutions, *i.e.* construire un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ tel que $F_t(x) = \mathbb{P}(X_t \leq x)$?
- Puis en déduire une description du **comportement en temps long** par des **méthodes probabilistes** ?

Représentation probabiliste

Formellement, $P_t := \partial_x F_t$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_t P_t = \frac{1}{2}\partial_x^2\big(\sigma^2(H * P_t(x))P_t\big) - \partial_x\big(b(H * P_t(x))P_t\big), \\ P_0 = m. \end{cases}$$

C'est l'**équation de Fokker-Planck** du processus de diffusion **non-linéaire**

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b(H * P_t(X_t))\mathrm{d}t + \sigma(H * P_t(X_t))\mathrm{d}W_t, \\ X_0 \sim m, \end{cases}$$

où $F_t = H * P_t$ est la **fonction de répartition** de X_t.

On s'intéresse donc au **comportement en temps long** de $(X_t)_{t\geq 0}$.

Remarque : moins régulier et plus non-linéaire que milieux granulaires

$$\mathrm{d}X_t = -W' * P_t(X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{2}\mathrm{d}W_t.$$

- **Malrieu '01, '03, Cattiaux, Guillin, Malrieu '08 :** inégalités fonctionnelles sur système de particules puis propagation du chaos uniforme ;
- **Bolley, Gentil, Guillin '12, '13 :** dissipation de la distance de Wasserstein (inégalité WJ) entre deux solutions de l'EDP ;
- **Cattiaux, Guillin '14 :** couplage des processus non-linéaires.

Échauffement : croissance moyenne

Les conditions d'existence d'un équilibre sont faciles à dériver.

Condition n°1 : croissance moyenne nulle.

$$X_t = X_0 + \int_{s=0}^{t} b(F_s(X_s))\mathrm{d}s + \int_{s=0}^{t} \sigma(F_s(X_s))\mathrm{d}W_s$$

Échauffement : croissance moyenne

Les conditions d'existence d'un équilibre sont faciles à dériver.

Condition n°1 : croissance moyenne nulle.

$$X_t = X_0 + \int_{s=0}^{t} b(F_s(X_s))\mathrm{d}s + \int_{s=0}^{t} \sigma(F_s(X_s))\mathrm{d}W_s$$

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] + \int_{s=0}^{t} \mathbb{E}[b(F_s(X_s))]\mathrm{d}s$$

Échauffement : croissance moyenne

Les conditions d'existence d'un équilibre sont faciles à dériver.

Condition n°1 : croissance moyenne nulle.

$$X_t = X_0 + \int_{s=0}^{t} b(F_s(X_s))\mathrm{d}s + \int_{s=0}^{t} \sigma(F_s(X_s))\mathrm{d}W_s$$

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] + \int_{s=0}^{t} \mathbb{E}[b(F_s(X_s))]\mathrm{d}s$$

Échauffement : croissance moyenne

Les conditions d'existence d'un équilibre sont faciles à dériver.

Condition n°1 : croissance moyenne nulle.

$$\begin{aligned}
X_t &= X_0 + \int_{s=0}^{t} b(F_s(X_s))\mathrm{d}s + \int_{s=0}^{t} \sigma(F_s(X_s))\mathrm{d}W_s\\
\mathbb{E}[X_t] &= \mathbb{E}[X_0] + \int_{s=0}^{t} \mathbb{E}[b(F_s(X_s))]\mathrm{d}s\\
&= \mathbb{E}[X_0] + t\int_{u=0}^{1} b(u)\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

Échauffement : croissance moyenne

Les conditions d'existence d'un équilibre sont faciles à dériver.

Condition n˚1 : croissance moyenne nulle.

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_{s=0}^t b(F_s(X_s))\mathrm{d}s + \int_{s=0}^t \sigma(F_s(X_s))\mathrm{d}W_s \\ \mathbb{E}[X_t] &= \mathbb{E}[X_0] + \int_{s=0}^t \mathbb{E}[b(F_s(X_s))]\mathrm{d}s \\ &= \mathbb{E}[X_0] + t\int_{u=0}^1 b(u)\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

donc une **condition nécessaire d'existence** d'un équilibre est

$$\boxed{\int_{u=0}^1 b(u)\mathrm{d}u = B(1) = 0.}$$

Ensemble des mesures invariantes

Condition n°2 : l'équation stationnaire (EDO 1D) se **résout explicitement**.

Ensemble des mesures invariantes

Sous les conditions

- $\{\sigma^2(u) = 0\}$ d'intérieur vide,
- $B(0) = B(1) = 0$, $B(u) > 0$ pour $u \in]0, 1[$,

alors l'**ensemble des mesures invariantes** du processus non-linéaire est l'**ensemble des translations** d'une même mesure m_∞ **explicite**.

- Une mesure invariante est **caractérisée par son espérance**.
- Comme $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0] + tB(1) = \mathbb{E}[X_0]$, on s'attend à ce que, sous les conditions ci-dessus, F_t **converge vers la solution stationnaire** F_∞ **de même espérance que** F_0.

Jourdain, Malrieu '08 : $\sigma^2 = \mathrm{Cte}$, F_∞ vérifie une **inégalité de Poincaré**.

- Donne **décroissance exponentielle** de $\mathrm{Var}_{P_\infty}\left(\frac{\mathrm{d}P_t}{\mathrm{d}P_\infty}\right)$;
- mais **non-linéarité** de Fokker-Planck $\Rightarrow$ **valable seulement pour** P_0 **proche de** P_∞.

Nous prouvons un résultat de convergence à l'équilibre en **distance de Wasserstein**

$$\begin{aligned} W_p(F,G) &:= \inf_{X\sim F, Y\sim G} \left(\mathbb{E}[|X-Y|^p]\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{u=0}^{1} |F^{-1}(u) - G^{-1}(u)|^p \mathrm{d}u\right)^{1/p} \end{aligned}$$

Preuve en trois étapes :

- **Contraction (faible) :** si $(F_t)_{t\geq 0}$, $(G_t)_{t\geq 0}$ solutions, alors $t \mapsto W_p(F_t, G_t)$ **décroissante**.
- **Dissipation :** calcul de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_p^p(F_t, G_t)$.
- **Conclusion :** $\lim_{t\to+\infty} W_p(F_t, F_\infty) = 0$ pour p tel que $W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$.

Contraction

Proposition : contraction

Sous la **seule hypothèse** $\{\sigma^2(u) = 0\}$ d'intérieur vide, alors pour **toutes** solutions $(F_t)_{t\geq 0}$, $(G_t)_{t\geq 0}$, pour **tout** $p \geq 1$,

$$t \mapsto W_p(F_t, G_t) \text{ est décroissante.}$$

La preuve de cette proposition est **purement probabiliste** ; elle repose sur un **argument de couplage** pour le système de particules

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{i,n} = b\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_t^{j,n} \leq X_t^{i,n}\}}\right)\mathrm{d}t + \sigma\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_t^{j,n} \leq X_t^{i,n}\}}\right)\mathrm{d}W_t^i, \\ X_0^{1,n}, \ldots, X_0^{n,n} \text{ iid selon } m, \end{cases}$$

obtenu en remplaçant P_t dans

$$\mathrm{d}X_t = b(H * P_t(X_t))\mathrm{d}t + \sigma(H * P_t(X_t))\mathrm{d}W_t$$

par la **mesure empirique** du système de particules

$$\mu_t^n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_t^{i,n}}.$$

Système de particules interagissant à travers leur rang

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{i,n} = b\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_t^{j,n} \leq X_t^{i,n}\}}\right)\mathrm{d}t + \sigma\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_t^{j,n} \leq X_t^{i,n}\}}\right)\mathrm{d}W_t^i, \\ X_0^{1,n}, \ldots, X_0^{n,n} \text{ iid selon } m. \end{cases}$$

- La particule en j-ème position possède une dérive $b(j/n)$ et une variance $\sigma^2(j/n)$: les particules interagissent **à travers leur rang**.
- Applications en **finance** (Fernholz, Karatzas, Pal...).
- **Propagation du chaos** : (si $\{\sigma^2(u) = 0\}$ d'intérieur vide) lorsque $n \to +\infty$, les particules se comportent approximativement comme des **copies indépendantes** de $(X_t)_{t\geq 0}$.
- **Loi des grands nombres** : μ^n converge vers la loi P de $(X_t)_{t\geq 0}$.

Couplage : soient

- μ_t^n la mesure empirique de $(X_t^{1,n}, \ldots, X_t^{n,n})$, converge vers $P_t = \partial_x F_t$,
- ν_t^n la mesure empirique de $(Y_t^{1,n}, \ldots, Y_t^{n,n})$, converge vers $Q_t = \partial_x G_t$.

Moralement,

$$W_p(F_t, G_t) = \lim_{n\to+\infty} W_p(\mu_t^n, \nu_t^n).$$

Système réordonné

Distance de Wasserstein :

$$W_p(\mu_t^n, \nu_t^n) = \int_{u=0}^1 |(H * \mu_t^n)^{-1}(u) - (H * \nu_t^n)^{-1}(u)|^p \mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |X_t^{(j),n} - Y_t^{(j),n}|^p,$$

où $X_t^{(1),n} \leq \cdots \leq X_t^{(n),n}$ et $Y_t^{(1),n} \leq \cdots \leq Y_t^{(n),n}$ sont les **réordonnements.**

But : **construire un couplage** $(X_t^{(1),n}, \ldots, X^{(n),n})_{t\geq 0}$, $(Y_t^{(1),n}, \ldots, Y^{(n),n})_{t\geq 0}$ tel que

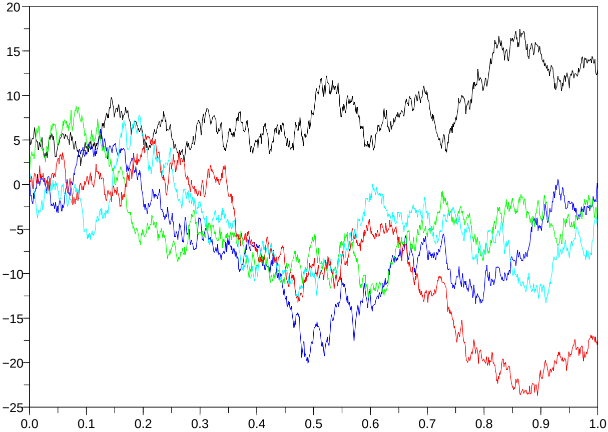
la distance $\sum_{j=1}^n |X_t^{(j),n} - Y_t^{(j),n}|^p$ soit décroissante.

Système réordonné : $X_t^{(1),n} \leq \cdots \leq X_t^{(n),n}$ vérifie

$$\mathrm{d}X_t^{(j),n} = b(j/n)\mathrm{d}t + \sigma(j/n)\mathrm{d}\beta_t^j + \mathrm{d}K_t^{j,n},$$

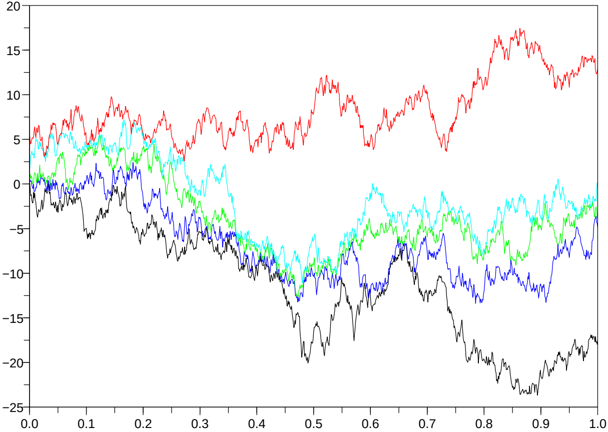
où K_t^n est un **terme de réflexion** au bord de $D_n := \{y_1 \leq \cdots \leq y_n\}$.

Système réordonné



Processus original $(X_t^{1,n}, \dots, X_t^{n,n})_{t \geq 0}$

Système réordonné

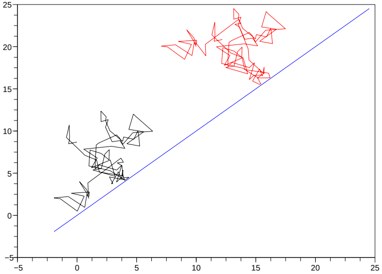


Processus réordonné $(X_t^{(1),n}, \dots, X_t^{(n),n})_{t \geq 0}$

Système réordonné

Le processus $(X_t^{(1),n}, \dots, X_t^{(n),n})_{t \geq 0}$ est un **mouvement brownien normalement réfléchi** au bord de D_n, avec **vecteur de dérive et matrice de diffusion constants.**

- **Tanaka '79** : existence et unicité **fortes** pour EDS réfléchie dans D_n.
- **Couplage** dirigé par le **même mouvement brownien** β :



Réflexion normale au bord du convexe D_n
$\Rightarrow$ la distance entre les deux MB réfléchis **ne peut que décroître**.

Dissipation de $W_p^p(F_t, G_t)$ I

But : obtenir une expression maniable de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_p^p(F_t, G_t)$.
Dans l'esprit de **Bolley, Gentil, Guillin '12, '13** : « inégalité WJ ».

On suppose maintenant :

- **régularité classique** de F_t, G_t,
- **uniforme ellipticité** pour σ^2.

Rappel : dimension 1, donc

$$W_p^p(F_t, G_t) = \int_{u=0}^{1} |F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u)|^p \mathrm{d}u.$$

Deux étapes :

- Obtention d'une expression pour $\partial_t F_t^{-1}(u)$ et $\partial_t G_t^{-1}(u)$,
- injection dans le calcul de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_p^p(F_t, G_t)$.

Dissipation de $W_p^p(F_t, G_t)$ II

Calcul direct dans l'EDP donne $\partial_t F_t^{-1}(u) = b(u) - \partial_u \left(\frac{\sigma^2(u)}{2\partial_u F_t^{-1}(u)} \right)$.

Dissipation pour $p = 2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, G_t) = 2 \int_{u=0}^1 \left(\partial_t F_t^{-1}(u) - \partial_t G_t^{-1}(u)\right)\left(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u)\right)\mathrm{d}u$$

Dissipation de $W_p^p(F_t, G_t)$ II

Calcul direct dans l'EDP donne $\partial_t F_t^{-1}(u) = b(u) - \partial_u \left(\frac{\sigma^2(u)}{2\partial_u F_t^{-1}(u)} \right)$.

Dissipation pour $p = 2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, G_t) = 2 \int_{u=0}^{1} \left(\partial_t F_t^{-1}(u) - \partial_t G_t^{-1}(u)\right)\left(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u)\right) \mathrm{d}u$$

Dissipation de $W_p^p(F_t, G_t)$ II

Calcul direct dans l'EDP donne $\partial_t F_t^{-1}(u) = b(u) - \partial_u \left(\frac{\sigma^2(u)}{2\partial_u F_t^{-1}(u)}\right)$.

Dissipation pour $p = 2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, G_t) = 2 \int_{u=0}^{1} \left(\partial_t F_t^{-1}(u) - \partial_t G_t^{-1}(u)\right)\left(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u)\right)\mathrm{d}u$$

$$= -\int_{u=0}^{1} \partial_u \left(\frac{\sigma^2(u)}{\partial_u F_t^{-1}(u)} - \frac{\sigma^2(u)}{\partial_u G_t^{-1}(u)}\right)\left(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u)\right)\mathrm{d}u$$

Dissipation de $W_p^p(F_t, G_t)$ II

Calcul direct dans l'EDP donne $\partial_t F_t^{-1}(u) = b(u) - \partial_u\left(\frac{\sigma^2(u)}{2\partial_u F_t^{-1}(u)}\right)$.

Dissipation pour $p = 2$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, G_t) = 2\int_{u=0}^{1} \left(\partial_t F_t^{-1}(u) - \partial_t G_t^{-1}(u)\right)\left(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u)\right)\mathrm{d}u$$

$$= -\int_{u=0}^{1} \partial_u\left(\frac{\sigma^2(u)}{\partial_u F_t^{-1}(u)} - \frac{\sigma^2(u)}{\partial_u G_t^{-1}(u)}\right)\left(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u)\right)\mathrm{d}u$$

$$= \int_{u=0}^{1} \sigma^2(u)\left(\frac{1}{\partial_u F_t^{-1}(u)} - \frac{1}{\partial_u G_t^{-1}(u)}\right)\partial_u\left(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u)\right)\mathrm{d}u$$

Dissipation de $W_p^p(F_t, G_t)$ II

Calcul direct dans l'EDP donne $\partial_t F_t^{-1}(u) = b(u) - \partial_u \left(\frac{\sigma^2(u)}{2\partial_u F_t^{-1}(u)}\right)$.

Dissipation pour $p = 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t, G_t) &= 2\int_{u=0}^{1} \left(\partial_t F_t^{-1}(u) - \partial_t G_t^{-1}(u)\right)\left(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u)\right)\mathrm{d}u \\
&= -\int_{u=0}^{1} \partial_u \left(\frac{\sigma^2(u)}{\partial_u F_t^{-1}(u)} - \frac{\sigma^2(u)}{\partial_u G_t^{-1}(u)}\right)\left(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u)\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_{u=0}^{1} \sigma^2(u) \left(\frac{1}{\partial_u F_t^{-1}(u)} - \frac{1}{\partial_u G_t^{-1}(u)}\right)\partial_u \left(F_t^{-1}(u) - G_t^{-1}(u)\right)\mathrm{d}u \\
&= -\int_{u=0}^{1} \sigma^2(u) \frac{\left(\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u G_t^{-1}(u)\right)^2}{\partial_u F_t^{-1}(u)\partial_u G_t^{-1}(u)}\mathrm{d}u \leq 0.
\end{aligned}$$

Remarque : le terme de droite ne **dépend pas de** b,

- contient **équation de la chaleur**,
- on ne peut donc pas espérer déduire directement **contraction exponentielle**.

$\Rightarrow$ besoin de **réinjecter la solution stationnaire**.

Conclusion de la preuve

Soit $p \geq 2$ tel que $W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$. On veut montrer que

$$W_p(F_t, F_\infty) = \left(\int_{u=0}^{1} |F_t^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|^p \mathrm{d}u \right)^{1/p} \to 0.$$

Comme $W_{p+\epsilon}(F_t, F_\infty) \leq W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$, il suffit de montrer

$$\boxed{\forall u \in]0,1[, \qquad \lim_{t \to +\infty} F_t^{-1}(u) = F_\infty^{-1}(u).}$$

Conclusion de la preuve

Soit $p \geq 2$ tel que $W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$. On veut montrer que

$$W_p(F_t, F_\infty) = \left(\int_{u=0}^{1} |F_t^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|^p \mathrm{d}u\right)^{1/p} \to 0.$$

Comme $W_{p+\epsilon}(F_t, F_\infty) \leq W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$, il suffit de montrer

$$\boxed{\forall u \in]0,1[, \qquad \lim_{t\to+\infty} F_t^{-1}(u) = F_\infty^{-1}(u).}$$

Pour tout $u \in]0,1[$, $|F_t^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|$ est de l'ordre de

$$\int_{u=0}^{1} |\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)| \mathrm{d}u$$

Conclusion de la preuve

Soit $p \geq 2$ tel que $W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$. On veut montrer que

$$W_p(F_t, F_\infty) = \left(\int_{u=0}^1 |F_t^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|^p \mathrm{d}u \right)^{1/p} \to 0.$$

Comme $W_{p+\epsilon}(F_t, F_\infty) \leq W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$, il suffit de montrer

$$\boxed{\forall u \in]0,1[, \qquad \lim_{t \to +\infty} F_t^{-1}(u) = F_\infty^{-1}(u).}$$

Pour tout $u \in]0,1[$, $|F_t^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|$ est de l'ordre de

$$\int_{u=0}^1 |\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)| \mathrm{d}u$$

$$\leq \underbrace{\sqrt{\int_{u=0}^1 \frac{\left(\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)\right)^2}{\partial_u F_t^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u)} \mathrm{d}u}} \underbrace{\sqrt{\int_{u=0}^1 \partial_u F_t^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u) \mathrm{d}u}}$$

Conclusion de la preuve

Soit $p \geq 2$ tel que $W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$. On veut montrer que

$$W_p(F_t, F_\infty) = \left(\int_{u=0}^{1} |F_t^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|^p \mathrm{d}u \right)^{1/p} \to 0.$$

Comme $W_{p+\epsilon}(F_t, F_\infty) \leq W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$, il suffit de montrer

$$\boxed{\forall u \in]0,1[, \qquad \lim_{t \to +\infty} F_t^{-1}(u) = F_\infty^{-1}(u).}$$

Pour tout $u \in]0,1[$, $|F_t^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|$ est de l'ordre de

$$\int_{u=0}^{1} |\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)| \mathrm{d}u$$

$$\leq \underbrace{\sqrt{\int_{u=0}^{1} \frac{\left(\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)\right)^2}{\partial_u F_t^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u)} \mathrm{d}u}}_{\text{de l'ordre de} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t^{-1}, F_\infty^{-1})} \underbrace{\sqrt{\int_{u=0}^{1} \partial_u F_t^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u) \mathrm{d}u}}$$

Conclusion de la preuve

Soit $p \geq 2$ tel que $W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$. On veut montrer que

$$W_p(F_t, F_\infty) = \left(\int_{u=0}^{1} |F_t^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|^p \mathrm{d}u\right)^{1/p} \to 0.$$

Comme $W_{p+\epsilon}(F_t, F_\infty) \leq W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$, il suffit de montrer

$$\boxed{\forall u \in]0,1[, \qquad \lim_{t \to +\infty} F_t^{-1}(u) = F_\infty^{-1}(u).}$$

Pour tout $u \in]0,1[$, $|F_t^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|$ est de l'ordre de

$$\int_{u=0}^{1} |\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)| \mathrm{d}u$$

$$\leq \underbrace{\sqrt{\int_{u=0}^{1} \frac{\left(\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)\right)^2}{\partial_u F_t^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u)} \mathrm{d}u}}_{\text{de l'ordre de} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t^{-1}, F_\infty^{-1})} \underbrace{\sqrt{\int_{u=0}^{1} \partial_u F_t^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u) \mathrm{d}u}}_{\text{contrôle type Aronson}}$$

Conclusion de la preuve

Soit $p \geq 2$ tel que $W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$. On veut montrer que

$$W_p(F_t, F_\infty) = \left(\int_{u=0}^{1} |F_t^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|^p \mathrm{d}u \right)^{1/p} \to 0.$$

Comme $W_{p+\epsilon}(F_t, F_\infty) \leq W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$, il suffit de montrer

$$\boxed{\forall u \in]0,1[, \qquad \lim_{t \to +\infty} F_t^{-1}(u) = F_\infty^{-1}(u).}$$

Pour tout $u \in]0,1[$, $|F_t^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|$ est de l'ordre de

$$\begin{aligned} &\int_{u=0}^{1} |\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)| \mathrm{d}u \\ &\leq \underbrace{\sqrt{\int_{u=0}^{1} \frac{\left(\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)\right)^2}{\partial_u F_t^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u)} \mathrm{d}u}}_{\text{de l'ordre de} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t^{-1}, F_\infty^{-1})} \underbrace{\sqrt{\int_{u=0}^{1} \partial_u F_t^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u) \mathrm{d}u}}_{\text{contrôle type Aronson}} \end{aligned}$$

$\to 0$ au moins le long d'une suite $t_n \to +\infty$.

Conclusion de la preuve

Soit $p \geq 2$ tel que $W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$. On veut montrer que

$$W_p(F_t, F_\infty) = \left(\int_{u=0}^1 |F_t^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|^p \mathrm{d}u \right)^{1/p} \to 0.$$

Comme $W_{p+\epsilon}(F_t, F_\infty) \leq W_{p+\epsilon}(F_0, F_\infty) < +\infty$, il suffit de montrer

$$\boxed{\forall u \in]0,1[, \qquad \lim_{t \to +\infty} F_t^{-1}(u) = F_\infty^{-1}(u).}$$

Pour tout $u \in]0,1[$, $|F_t^{-1}(u) - F_\infty^{-1}(u)|$ est de l'ordre de

$$\int_{u=0}^1 |\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)| \mathrm{d}u$$

$$\leq \underbrace{\sqrt{\int_{u=0}^1 \frac{\left(\partial_u F_t^{-1}(u) - \partial_u F_\infty^{-1}(u)\right)^2}{\partial_u F_t^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u)} \mathrm{d}u}}_{\text{de l'ordre de} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W_2^2(F_t^{-1}, F_\infty^{-1})} \underbrace{\sqrt{\int_{u=0}^1 \partial_u F_t^{-1}(u) \partial_u F_\infty^{-1}(u) \mathrm{d}u}}_{\text{contrôle type Aronson}}$$

$\to 0$ au moins le long d'une suite $t_n \to +\infty$.

Conclusion par **monotonie** de $W_p(F_t, F_\infty)$.

Bilan

Deux résultats de temps long :

- **Contraction** de $W_p(F_t, G_t)$: preuve **probabiliste**,
  - besoin seulement de $\{\sigma^2(u) = 0\}$ d'intérieur vide,
  - pas de « condition de drift » ni de régularité.
- **Convergence à l'équilibre** : preuve **analytique**,
  - besoin d'**uniforme ellipticité** et conditions d'équilibre $B(0) = B(1) = 0$, $B(u) > 0$ pour $u \in]0, 1[$,
  - besoin de régularité de la solution F_t,
  - condition d'intégrabilité $W_2(F_0, F_\infty) < +\infty$.

Défaut de la preuve : **pas de vitesse de convergence**...

Merci de votre attention !