Présentation groupe de travail

Sofiane Saadane

jeudi 23 mai 2013

Résumé L'article sur lequel on travaille [LP09] présente un problème de bandit à deux bras comportant une pénalité. Nous commencerons par présenter l'algorithme et nous montrerons que sous des hypothèses (peu restrictive) l'algorithme converge toujours vers le bras optimal. Dans un second temps, nous étudierons une renormalisation de l'algorithme qui conduit à une convergence étroite vers un processus de Markov discontinue (PDMP).

Table des matières

1 Etude de la convergence de l'algorithme du bandit pénalisé . . . 2
1.1 Notions sur l'approximation stochastique . . . 2
1.2 Propriétés de l'algorithme . . . 4
1.3 Cas de la pénalité constante . . . 4
1.4 Cas où la pénalité tend vers 0 . . . 5
1.5 Convergence de l'algorithme renormalisé . . . 6

Introduction

Le problème du bandit

Le problème du bandit à deux bras est très connu des personnes fréquentant les casinos. En effet, un bandit est une machine comportant un bras que l'on actionne en espérant un gain. Le problème que l'on étudie est différent au sens où on a le choix entre deux bras A,B et à chaque étape on choisit d'actionner un des deux bras selon une certaine dynamique. Reprenons le contexte de [LP09] qui permet de bien comprendre le sens de l'algorithme. On présente le premier algorithme où la pénalité n'était pas présente puis le nouvel algorithme. Une personne P gère une certaine somme d'argent en bourse qu'elle confie à deux traders A et B, tout les jours P choisit d'évaluer A ou B et cette évaluation modifie le pourcentage d'argent géré par les traders. Notons X_n le pourcentage géré par A au temps n ($X_n \in [0,1]$). Nous supposerons que P choisit le trader à évaluer au hasard de sorte que la probabilité que A soit évaluer soit égale à X_n afin d'évaluer le trader responsable de la part la plus importante. Si le trader est bien évalué alors sa part augmente de γ_n fois la part de l'autre trader, et sinon rien ne se passe. La dynamique de X_n est modélisée comme suit

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + \gamma_{n+1}((1-X_n)1_{\{U_{n+1}\leq X_n\},A_{n+1}} - X_n 1_{\{U_{n+1}>X_n\},B_{n+1}}) \\ X_0 &= x \in [0,1] \end{aligned}$$

où $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d de loi uniforme sur [0,1], A_n (resp .B_n) est l'événement "le trader A (resp. B) est bien évalué au temps n". Nous supposerons que $\mathbb{P}(A_n) = p_A$, $\mathbb{P}(B_n) = p_B$ et on supposera que les événements A_n, B_n et la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ sont indépendants. Pour améliorer cet algorithme déjà étudié, on va ajouter une pénalité en cas de mauvaise performance du trader. Plus précisément si le trader rate son évaluation au temps n alors sa part diminue par multiplication par un facteur $\gamma_n\rho_n$. Ceci nous conduit à l'algorithme du "bandit à deux bras pénalisé"

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + \gamma_{n+1}((1-X_n)1_{\{U_{n+1}\leq X_n\},A_{n+1}} - X_n 1_{\{U_{n+1}>X_n\},B_{n+1}}) \\ &- \gamma_n\rho_n(X_n 1_{\{U_{n+1}\leq X_n\},A^c_{n+1}} - (1-X_n)1_{\{U_{n+1}>X_n\},B^c_{n+1}}) \end{aligned}$$

où la notation A^c désigne le complémentaire de l'événement A. Nous préciserons les conditions sur les facteurs γ_n, ρ_n plus tard.

1 Etude de la convergence de l'algorithme du bandit pénalisé

1.1 Notions sur l'approximation stochastique

Nous nous appuierons sur le théorème suivant valable pour une suite X_n à valeurs dans un compact I.

Théorème 1 a) *Théorème de Kushner et Clark : soit $g : I \to \mathbb{R}$ de sorte que I soit stable par $Id + g$. Considérons le schéma stochastique suivant défini sur I*

$$\begin{array}{rcl} X_{n+1} & = & X_n + \gamma_{n+1}(g(X_{n+1}) + \Delta R_{n+1}) \\ X_0 & \in & I \end{array}$$

où $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ est une suite à valeurs dans [0,1] telle que $\gamma_n \to 0$, $\sum \gamma_n = \infty$. Posons $N(t) = \min\{n : \gamma_1 + ... + \gamma_{n+1} > t\}$. Si pour tout $T > 0$

$$\max_{N(t)\leq n\leq N(t+T)} |\sum_{k=N(t)+1}^{n} \gamma_k \Delta R_k| \to_{t\to\infty} 0 \qquad p.s \tag{1}$$

Soit x un zéro de g attractif dans I et $g(I)$ un domaine d'attraction. Alors sur l'événement $\{X_n$ visite une infinité de fois un compact de $g(I)\}$ on a $X_n \to x$ p.s.

b) *La condition d'Hoeffding : si $(\Delta R_n)_{n\geq 0}$ est une suite bornée d'incréments de martingale, si $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et $\sum_{n\geq 1} e^{-\frac{\eta}{\gamma_n}} < \infty$ pour tout $\eta > 0$ alors (1) est vérifiée.*

La condition de Hoeffding permet de satisfaire la condition (1) du Théorème de Kushner et Clark mais il existe une condition dans le cas où $\Delta R_n = \Delta M_n + \kappa(X_n)$, ΔM_n étant une martingale et κ une fonction bornée.

Proposition 2 *(Métivier-Priouret) On considère M_n une martingale de carré intégrable ainsi qu'une suite de pas γ_n vérifiant $\sum \gamma_n = \infty$ alors si*

$$\sum_{n\geq 1} \gamma_n^2 \mathbb{E}(\Delta_n^2) < \infty \tag{1}$$

la condition (1) est satisfaite.

Dans la suite nous utiliserons de domaine d'attraction et de points stables, considérons l'ODE suivante où h est une fonction continue

$$\frac{dz}{dt} = -h(z(t))$$

Notons z une solution de l'équation.

Définition 3 *Un ensemble I est dit invariant pour l'ODE si $z(0) \in I$ alors $z(t) \in I$ pour tout $t > 0$.*

Définition 4 *Soit z^* un zéro de h. I est un domaine d'attraction pour z^* si les propriétés sont satisfaites :*

-I est invariant pour l'ODE.
-si $z(0) \in I$ alors $lim_{t\to\infty} z(t) = z^*$.
-Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z(0) \in I$ tel que $|z(0) - z^*| < \delta$ implique $|z(t) - z^*| < \epsilon$ pour tout $t > 0$.

z^* est alors dit asymptotiquement stable.

Proposition 5 *Soit I un ensemble invariant pour l'ODE et z^* un zéro de h appartenant à I. On suppose qu'il existe V une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que*

$$V(z^*) = 0, \text{ et } V(z) > 0 \text{ pour tout } z \neq z^*$$
$$I \text{ est borné ou } V \to \infty \text{ quand } |z| \to \infty.$$
$$V'(z)h(z) > 0 \text{ pour tout } z \in I, z \neq z^*.$$

Alors I est un domaine d'attraction pour z^*.

1.2 Propriétés de l'algorithme

Dans la suite nous supposerons que $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, positive strictement inférieure à 1 (conditions classiques pour un algorithme stochastique) et vérifie la condition de Hoeffding. On supposera que $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est une suite positive telle que $\gamma_n\rho_n < 1$. Nous noterons $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration naturelle associée aux variables aléatoires $(U_n, 1_{A_n}, 1_{B_n})_{n\geq 0}$ et notons

$$\pi = p_A - p_B$$

Avec ces nouvelles notations nous parvenons à la formulation suivante de l'algorithme

$$X_{n+1} = X_n + \gamma_{n+1}(\pi h(X_n) + \rho_{n+1}\kappa(X_n)) + \gamma_{n+1}\Delta M_{n+1} \tag{2}$$

où les fonctions h et κ sont définies par

$$h(x) = x(1-x), \qquad \kappa(x) = -(1-p_A)x^2 + (1-p_B)(1-x)^2$$

$\Delta M_{n+1} = M_{n+1} - M_n$ et $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale issue de 0 et

$$\begin{aligned}\Delta M_{n+1} &= (1-X_n)1_{\{U_{n+1}\leq X_n\},A_{n+1}} - X_n 1_{\{U_{n+1}>X_n\},B_{n+1}} - \pi h(X_n) \\ &- \rho_{n+1}(X_n 1_{\{U_{n+1}\leq X_n\},A^c_{n+1}} - (1-X_n)1_{\{U_{n+1}>X_n\},B^c_{n+1}} - \kappa(X_n))\end{aligned}$$

Notons que ΔM_{n+1} est borné.

1.3 Cas de la pénalité constante

Il est naturel, dans un premier temps, de considérer le cas où

$$\forall n \geq 1, \quad \rho_n = \rho$$

avec $0 < \rho \leq 1$. On a alors

$$X_{n+1} = X_n + \gamma_{n+1}(h_\rho(X_n) + \Delta M_{n+1})$$

où

$$h_\rho(x) = \pi h(x) + \rho\kappa(x), \qquad 0 \leq x \leq 1$$

En notant que $h_\rho(0) = \rho(1-p_B) > 0$ et $h_\rho(1) = -\rho(1-p_A) < 0$, on montre qu'il existe un unique x_ρ tel que $h_\rho(x_\rho) = 0$. Un calcul immédiat montre que

$$
\begin{aligned}
x_\rho &= \frac{\pi - 2\rho(1-p_B) + \sqrt{\pi^2 + 4\rho^2(1-p_B)(1-p_A)}}{2\pi(1-\rho)} \qquad \pi \neq 0, \quad \rho \neq 1 \\
&= \frac{1-p_B}{(1-p_A) + (1-p_B} \qquad \pi = 0, \quad ou \quad \rho = 1
\end{aligned}
$$

En particulier, si $\pi = 0$ on a $x_\rho = 1/2$ pour toute valeur de ρ. On a aussi $h_\rho(1/2) = \pi(1-\rho)/4 \geq 0$ de sorte que

$$x_\rho > 1/2 \text{ si } \pi > 0$$

Soit x la solution de l'ODE $\frac{dx}{dt} = h_\rho(x)$. Si $x(0) \in [0, x_\rho]$ alors x est croissante et tend vers x_ρ. Si $x(0) \in [x_\rho, 1]$ alors x est décroissante et tend vers x_ρ. L'intervalle [0,1] est donc un domaine d'attraction pour x_ρ. Le théorème de Kushner et Clark permet de montrer

Proposition 6 *Supposons $\rho_n = \rho$ avec $0 < \rho \leq 1$, alors*

$$X_n \to x_\rho \text{ p.s quand } n \to \infty.$$

Une interprétation naturelle de ce résultat est que l'algorithme finit toujours par désigner le meilleur trader mais il n'affecte jamais la gestion du fond à un seul trader.

1.4 Cas où la pénalité tend vers 0

Proposition 7 *Supposons que $\rho_n \to_{n\to\infty} 0$. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge p.s vers $X_\infty \in \{0, 1\}$.*

Preuve Un moyen d'améliorer la preuve de cette article est donné par Métivier et Priouret permet de se passer de la condition de Hoeffding. Le reste de la preuve repose sur la condition imposée à la pénalité.

$\boxdot$

A partir de maintenant nous supposerons $\pi > 0$ i.e $p_A > p_B$, nous allons voir que sous de faibles hypothèses l'algorithme ne se trompe pas.

Proposition 8 *Supposons que $\rho_n \to_{n\to\infty} 0$. Si la suite Supposons que $(\gamma_n/\rho_n)_{n\geq 1}$ est bornéé et $\sum_{n\geq 1} \rho_n \gamma_n = \infty$ et si $\pi > 0$ alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge p.s vers 1 .*

Preuve Comme $h \geq 0$ d'après (2) on a

$$X_n \quad \geq \quad X_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \rho_k \kappa(X_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta M_k$$

Comme les ΔM_k sont bornées, on a

$$\|\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta M_k\|_2^2 \leq C \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^2 \leq C \sup_{k\geq 1}(\gamma_k/\rho_k) \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \rho_k$$

avec $C > 0$. Comme $\sum_n \gamma_n \rho_n = \infty$

$$L^2 - \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta M_k}{\sum_{k=1}^n \gamma_k \rho_k} = 0$$

d'où

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta M_k}{\sum_{k=1}^n \gamma_k \rho_k} \geq 0$$

Sur $\{X_\infty = 0\}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \gamma_k \rho_k \kappa(X_{k-1})}{\sum_{k=1}^n \gamma_k \rho_k} = \kappa(0) > 0$$

ce qui entraîne, toujours sur $\{X_\infty = 0\}$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sum_{k=1}^n \gamma_k \rho_k} > 0$$

On doit donc avoir nécessairement $\mathbb{P}(X_\infty = 0) = 0$.

$\boxdot$

1.5 Convergence de l'algorithme renormalisé

En plus des conditions sur la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ nous supposerons que

$$\gamma_n^2 - \gamma_{n-1}^2 = o(\gamma_n^2), \qquad \frac{\gamma_n}{\rho_n} = g + o(\gamma_n^2) \tag{3}$$

avec $g > 0$.

Nous allons étudier la suite

$$Y_n = \frac{1 - X_n}{\rho_n}$$

Reprenant (1) on a

$$\begin{aligned} 1 - X_{n+1} &= 1 - X_n - \gamma_{n+1}(\pi h(X_n) - \rho_{n+1}\kappa(X_n)) - \gamma_{n+1}\Delta M_{n+1} \\ \frac{1 - X_{n+1}}{\rho_{n+1}} &= \frac{1 - X_n}{\rho_{n+1}} - \frac{\gamma_{n+1}}{\rho_{n+1}}\pi h(X_n) - \kappa(X_n) - \frac{\gamma_{n+1}}{\rho_{n+1}}\Delta M_{n+1} \end{aligned}$$

ce que nous écrirons

$$Y_{n+1} = Y_n(1 + \gamma_{n+1}\epsilon_n - \gamma_{n+1}\pi_n X_n) - \gamma_{n+1}\kappa(X_n) - \frac{\gamma_{n+1}}{\rho_{n+1}}\Delta M_{n+1} \tag{4}$$

avec $\epsilon_n = \frac{\rho_n}{\gamma_{n+1}}(\frac{1}{\rho_{n+1}} - \frac{1}{\rho_n})$ et $\pi_n = \frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}\pi$. Notons que $\epsilon_n \to 0$ et $\pi_n \to \pi$. Il est montré que sous les hypothèses faites en début de paragraphe $(Y_n)_{n\geq 1}$ est tendue(voir lemme 1 et remarque 2). Nous allons voir que la suite converge en loi.

Théorème 9 *Sous (3), $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge étroitement vers l'unique mesure stationnaire du processus de Markov défini sur $[0,\infty)$ dont le générateur infinitésimal L est donné par*

$$Lf(y) = p_B y \frac{f(y+g)-f(y)}{g} + (1-p_A-p_A y)f'(y)$$

pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact sur $[0,\infty)$.

La méthode pour prouver ce théorème est classique pour un algorithme stochastique. Nous étudierons pour cela la suite de processus continue $Y^{(n)} = (Y_t^{(n)})_{t\geq 0}$ dont nous montrerons qu'elle converge vers un processus de Markov de générateur infinitésimal L. Ensuite nous prouverons que ce processus a une unique mesure invariante qui est la limite de $(Y_n)_{n\geq 1}$. La suite $Y^{(n)}$ est définie comme suit. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$ posons

$$Y_t^{(n)} = Y_{N(n,t)}$$

où

$$N(n,t) = \min\{m \geq n | \sum_{k=n}^{m} \gamma_{k+1} > t\}$$

, de sorte que $N(n,0) = n$ pour $t \in [0, \gamma_{n+1}($ et pour $m \geq n+1$, $N(n,t) = m$ si et seulement si $\sum_{k=n}^{m} \gamma_{k+1} \geq t < \sum_{k=n}^{m+1} \gamma_{k+1}$.

Théorème 10 *Sous les hypothèses du théorème précédent, $(Y_t^{(n)})_{t\geq 0}$ converge étroitement vers un processus de Markov de générateur infinitésimal L.*

La preuve de ce théorème se fait en deux étapes : nous commençons par établir la propriété de tension puis nous caractérisons la limite via un problème de martingale. Les preuves ne seront pas détaillés mais nous donnerons la démarche pour établir les résultats, le lecteur intéressé trouvera des compléments dans [LP09].

Tension En utilisant (4) on obtient la décomposition suivante de $Y^{(n)}$

$$Y_t^{(n)} = Y_n + B_t^{(n)} + M_t^{(n)} \tag{5}$$

avec

$$B_t^{(n)} = -\sum_{k=n+1}^{N(n,t)} \gamma_k \{Y_{k-1}(\pi_{k-1}X_{k-1} - \epsilon_{k-1}) + \kappa(X_{k-1})\}$$

et

$$M_t^{(n)} = -\sum_{k=n+1}^{N(n,t)} \frac{\gamma_k}{\rho_k} \Delta M_k$$

Le processus $(M_t^{(n)})_{t\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable par rapport à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^{(n)})_{t\geq 0} = (\mathcal{F}_{N(n,t)})_{t\geq 0}$ et on a

$$< M^{(n)} >_t = \sum_{k=n+1}^{N(n,t)} (\frac{\gamma_k}{\rho_k})^2 \mathbb{E}(\Delta M_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}).$$

Nous savons que (Y_n) est tendue. Pour montrer que M^n est tendue il suffit de montrer que $(< M^{(n)} >)$ est C-tendue. Commençons par quelques notions qui serviront dans les preuves.

Définition 11 *Un processus X^n est dit C-tendu si il est tendu et si toute limite (au sens de la convergence étroite) d'une sous-suite de X^n converge vers un processus continu.*

Théorème 12 *Soit M^n une martingale de carré intégrable et $< M^{(n)} >$ son crochet associé. Pour que M^n soit C-tendue il suffit que $< M^{(n)} >$ le soit.*

Définition 13 *Soit X et Y deux processus. On dit que X est L-dominé (L pour Lenglart à qui l'on doit cette définition) par Y si $\mathbb{E}(X_T) \geq \mathbb{E}(Y_T)$ pour tout temps d'arrêt T borné.*

Théorème 14 *Le critère d'Aldous pour la tension : Soit X_t^n un processus tel que*

-pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ il existe N et $K > 0$ tels que

$$n \geq N, \quad P(\sup_{t \leq n} |X_t^n| > K) \leq \epsilon$$

-pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ on a

$$\lim_{\theta \to 0} \limsup_{n} \sup_{S,T \in \mathcal{F}_N^n : S \leq T \leq S+\theta} P(\sup_{t \leq n} |X_S^n - X_T^n| \geq \epsilon) = 0$$

Alors la suite (X^n) est tendue. ($\mathcal{F}_N^n$ désigne l'ensemble des temps d'arrêts bornés par N relativement à la filtration de X).

On trouvera dans [JS03] des compléments à ces résultats. On déduira de la proposition qui suit la tension de $Y^{(n)}$.

Proposition 15 *Sous (3), les suites $(B^{(n)})$ et $< M^{(n)} >$ sont C-tendues.*

Preuve Soient $0 \leq s \leq t$, en utilisant le fait que κ est bornée on a

$$|B_t^{(n)} - B_s^{(n)}| \leq \sum_{k=N(n,s)+1}^{N(n,t)} \gamma_k (a + bY_{k-1})$$

et de même

$$| < M^{(n)} >_t - < M^{(n)} >_s | \leq \sum_{k=N(n,s)+1}^{N(n,t)} \gamma_k (a' + b'Y_{k-1})$$

où a, b, a', b' sont des constantes positives. Ces inégalités montrent que les processus $B^{(n)}$ et $< M^{(n)} >$ sont L-dominés par les processus $X^{(n)} = \sum_{k=n+1}^{N(n,t)} \gamma_k$ et $Z^{(n)} = \sum_{k=N(n,s)+1}^{N(n,t)} \gamma_k Y_{k-1}$. Il nous reste seulement à montrer que $X^{(n)}$ et $Z^{(n)}$ sont C-tendus. Pour $X^{(n)}$ c'est immédiat car convergeant vers le processus déterministe t. Il faut simplement montrer que $Z^{(n)}$. On a pour $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned}
|Z_t^{(n)} - Z_s^{(n)}| &\leq (\sup_{n \leq j \leq N(n,t)} Y_j) \sum_{k=N(n,s)+1}^{N(n,t)} \gamma_k \\
&\leq (t - s + \gamma_{N(n,s)+1}) \sup_{n \leq j \leq N(n,t)} Y_j \\
&\leq (t - s + \gamma_{n+1}) \sup_{n \leq j \leq N(n,t)} Y_j
\end{aligned}$$

on a utilisé le fait que $\sum_{k=n+1}^{N(n,t)} \gamma_k \leq t$ et $\sum_{k=n+1}^{N(n,s)} \gamma_k \geq s$ et la monotonie de la suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$. pour conclure on utilise le lemme 6 de [LP09] qui donne la propriété de tension.

$\boxdot$

Identification de la limite Le lemme qui suit fait apparaître le générateur infinitésimal L défini précédemment.

Lemme 16 *Soit f fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact dans $[0, \infty)$. On a*

$$\mathbb{E}(f(Y_{n+1}) - f(Y_n)|\mathcal{F}_n) = \gamma_{n+1} Lf(Y_n) + \gamma_{n+1} Z_n$$

avec $\mathbb{P} - \lim_{n\to\infty} Z_n = 0$.

Nous pouvons nous tourner vers la preuve du théorème.

Preuve On sait que la suite $(Y^{(n)})_{n\geq 1}$ est tendue. D'autre part le lemme précédent nous permet d'écrire pour f de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact dans $[0, \infty)$,

$$f(Y_n) = f(Y_0) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k (Lf(Y_{k-1}) + Z_{k-1}) + M_n$$

où M_n est une martingale et $\mathbb{P} - \lim_{n\to\infty} Z_n = 0$. D'où

$$f(Y_t^{(n)}) - f(Y_0^{(n)}) = M_t^{(n)} + \sum_{k=n+1}^{N(n,t)} \gamma_k (Lf(Y_{k-1}) + Z_{k-1})$$

où $M_t^{(n)} = M_{N(n,t)} - M_n$, on vérifie aisément que c'est une $\mathcal{F}^{(n)}$-martingale. On a aussi

$$\int_0^t Lf(Y_s^{(n)}) ds = \sum_{k=n+1}^{N(n,t)} \gamma_k Lf(Y_{k-1}) + (t - \sum_{k=n+1}^{N(n,t)} \gamma_k) Lf(Y_t^{(n)})$$

En conclusion, on a obtenu

$$f(Y_t^{(n)}) - f(Y_0^{(n)}) - \int_0^t Lf(Y_s^{(n)}) ds = M_t^{(n)} + R_t^{(n)}$$

où $\mathbb{P} - \lim_{n\to\infty} R_t^{(n)} = 0$. On a montré que toute limite de la suite $(Y^{(n)})_{n\geq 1}$ est solution du problème de martingale associé à L. Le théorème suivant va permettre d'étudier la mesure invariante et de démontrer les théorèmes 9 et 10.

$\boxdot$

La mesure invariante

Théorème 17 *Le processus de Markov $(Y_{(t)})_{t\geq 0}$, sur $[0, \infty)$, de générateur L admet une unique probabilité invariante ν qui satisfait la propriété suivante : pour tout compact $K \in [0, \infty)$ et toute fonction bornée f on a,*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{y\in K} |\mathbb{E}_y(f(Y_t) - \int f d\nu| = 0 \tag{6}$$

Nous ne donnerons que la preuve du théorème 9 qui repose sur (7).

Preuve théorème 9 Fixons $t > 0$. Pour n assez grand, on a $\gamma_n \leq t < \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$ de sorte qu'il existe $\widehat{n} \in \{1, ..., n-1\}$ tel que

$$\sum_{k=\widehat{n}+1}^{n} \gamma_k \leq t < \sum_{k=\widehat{n}}^{n} \gamma_k$$

Soit $t_n = \sum_{k=\widehat{n}+1}^{n} \gamma_k$. On a

$$0 \leq t - t_n < \gamma_{\widehat{n}}, \qquad Y_{t_n}^{(\widehat{n})} = Y_n$$

comme t est fixé la condition $\sum_{k=\widehat{n}+1}^{n} \gamma_k \leq t$ implique $\lim_{n\to} \widehat{n} = \infty$ et $\lim_{n\to} t_{\widehat{n}} = t$.

Soit $\epsilon > 0$, il existe un compact K tel que toute limite μ de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mu(K^c) < \epsilon$. En utilisant (7), on choisit t tel que

$$\sup_{y\in K} |\mathbb{E}_y(f(Y_t) - \int f d\nu| < \epsilon$$

Considérons une sous-suite $(Y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge étroitement vers $(Y^{(\infty)})$ une solution du problème de martingale associé à L. Le processus $(Y^{(\infty)})$ étant quasi-continu à gauche (rappelons qu'un processus X cadlag est quasi-continu à gauche si $\Delta X_T = X_T - X_{T^-} = 0$ p.s sur $\{T < \infty\}$ pour tout temps d'arrêt T) on a

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(f(Y_{t_{n_k}}^{\widehat{n_k}}) = \mathbb{E}(Y_t^{(\infty)})$$

pour toute fonction f bornée. D'où $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(f(Y_{n_k}) = \mathbb{E}(Y_t^{(\infty)})$. Notons qu'en tant que limite au sens de la convergence étroite de Y_n, $Y_0^{(\infty)}$ vérifie $\mathbb{P}(Y_0^{(\infty)} \in K) < \epsilon$. Maintenant on a

$$\mathbb{E}(f(Y_{n_k}) - \int f d\nu = \mathbb{E}(f(Y_{n_k}) - \mathbb{E}(Y_t^{(\infty)}) + \mathbb{E}(Y_t^{(\infty)}) - \int f d\nu$$

en notant $\mathcal{L}(Y_0^{(\infty)}) = \mu$,

$$
\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} |\mathbb{E}(f(Y_{n_k}) - \int f d\nu| &\leq |\mathbb{E}(Y_t^{(\infty)}) - \int f d\nu| \\
&= |\int \mathbb{E}_y(f(Y_t))d\mu(y) - \int f d\nu| \\
&\leq \epsilon + 2\|f\|_\infty \mu(K^c) \\
&\leq \epsilon(1 + 2\|f\|_\infty)
\end{aligned}
$$

ceci prouve que ν est l'unique limite de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ceci termine la preuve du théorème 9.

$\boxdot$