Exercices sur les chapitres « Calculs rapides sur les séries » et « Algorithmique des séries D-finies »

À préparer pour le 27/09/2018

Exercice 1 (Exponentielle de série)**.** Soit s une série de terme constant nul et $n = 2^p$. On étudie l'itération

$$
\begin{aligned}
z_k &= z_{k-1} + z_{k-1}(1 - y_{k-1}z_{k-1}) \mod X^{2^{k-1}}, \\
y_k &= y_{k-1} - y_{k-1}\int z_k(y'_{k-1} - s'y_{k-1}) \mod X^{2^k}
\end{aligned}
$$

avec $y_0 = 1 = z_0$.

1. Montrer que $y_p - \exp(s) = O(X^n)$;
2. Estimer la complexité du calcul des n premiers coefficients de la série $\exp(s)$ par cette itération ;
3. (Plus difficile) interpréter cette itération comme l'itération de Newton associée à l'opérateur $Y \mapsto Y' - s'Y$.

Exercice 2 (P-récursivité et D-finitude)**.**

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite P-récursive d'éléments d'un corps de caractéristique 0. Montrer que les suites extraites $(a_{2n})_{n\geq 0}$ et $(a_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont également P-récursives.
2. Soit $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite dont la série génératrice exponentielle est

$$\sum_{n\geq 0} g_n \frac{X^n}{n!} = \frac{\exp(-X/2 - X^2/4)}{\sqrt{1-X}}.$$

Montrer que la suite $(g_n)_{n\geq 0}$ satisfait à une récurrence linéaire homogène, d'ordre au plus 3 et à coefficients polynomiaux de degrés au plus 2. La récurrence n'est pas demandée explicitement.