

# Exercices sur le chapitre « Récurrences linéaires »

À préparer pour le 18/10/2018

**Exercice 1.** Montrer que si  $P \in \mathbb{K}[X]$  est de degré  $d$ , alors la suite  $(P(n))_{n \geq 0}$  est une suite récurrente linéaire de polynôme caractéristique  $(X-1)^{d+1}$ . En déduire que  $P$  peut être évalué aux  $N \gg d$  points  $1, 2, \dots, N$  en  $O(NM(d)/d)$  opérations dans  $\mathbb{K}$ .

**Exercice 2.** Soit  $N \in \mathbb{N}$  et soit  $P = \sum_{i=0}^{2N} p_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$  le polynôme  $P(X) = (1 + X + X^2)^N$ .

1. Montrer que  $O(M(N))$  opérations binaires suffisent pour déterminer la parité de tous les coefficients de  $P$ .

Indication : un entier  $n$  est pair si et seulement si  $n = 0$  dans  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

2. Montrer que  $P$  vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients polynomiaux. En déduire que les  $p_i$  suivent une récurrence d'ordre 2 que l'on précisera.
3. Donner un algorithme qui calcule  $p_N$  en  $O(M(N \log N) \log N)$  opérations binaires.