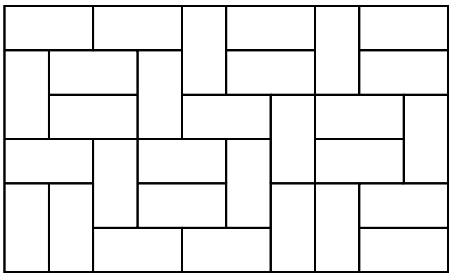
Génération de pavages

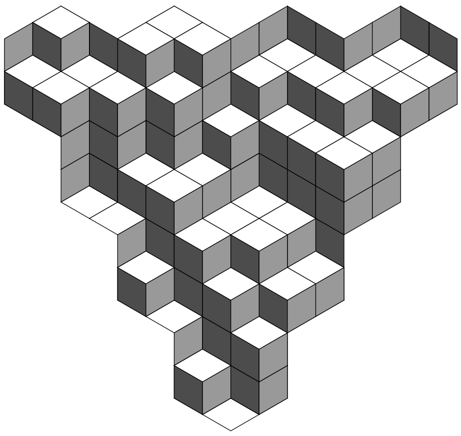
Sébastien Desreux
LIAFA
(Université Paris 7)

Éric Rémila
LIP
(ENS Lyon)

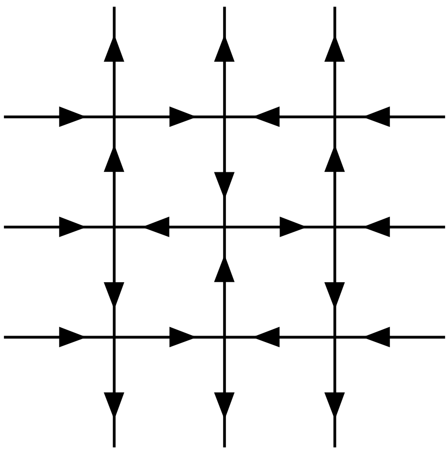
Les pavages



Dominos

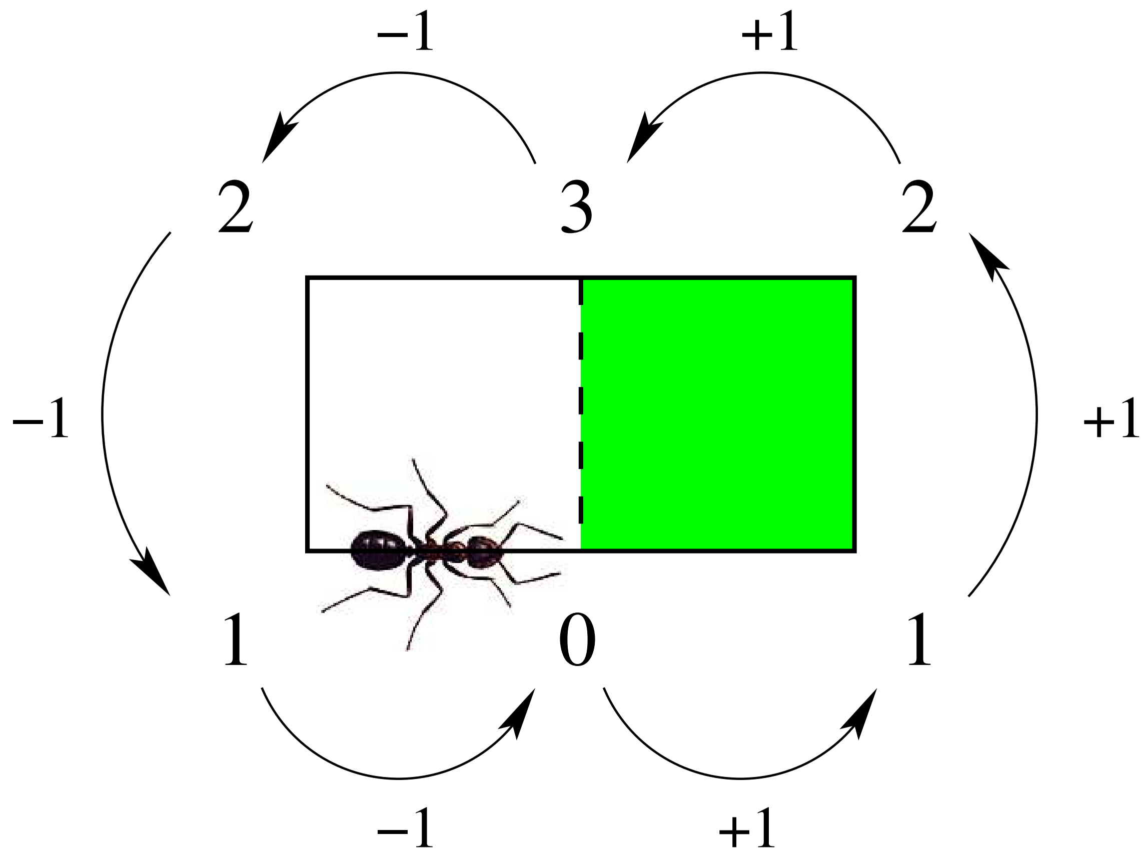


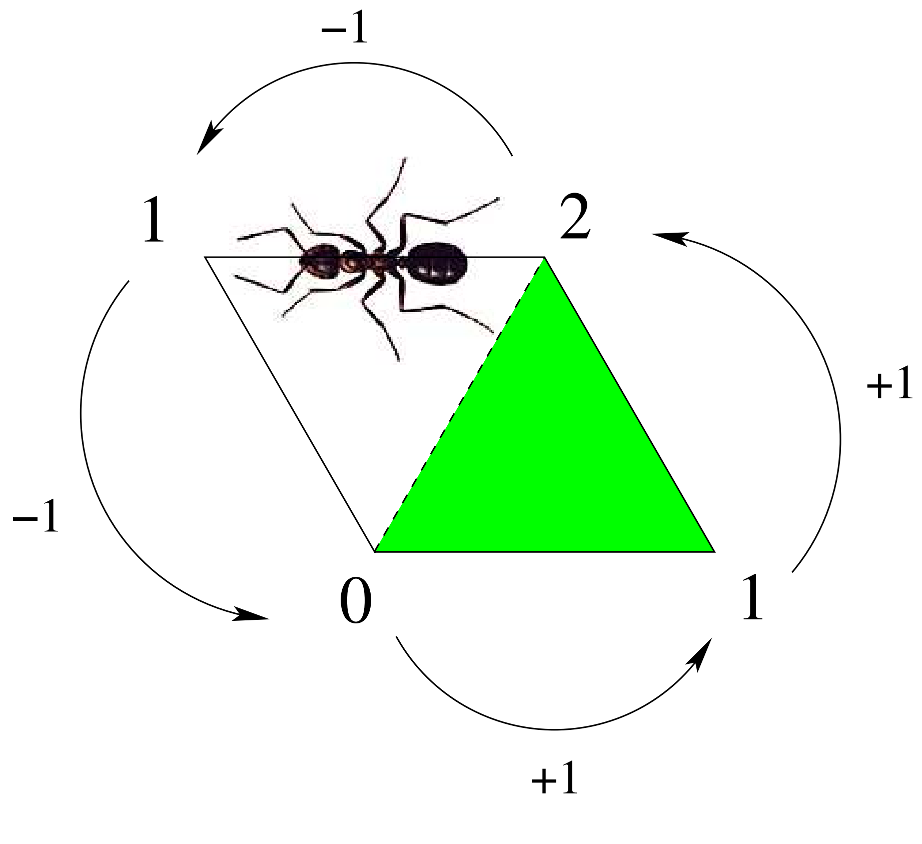
Losanges



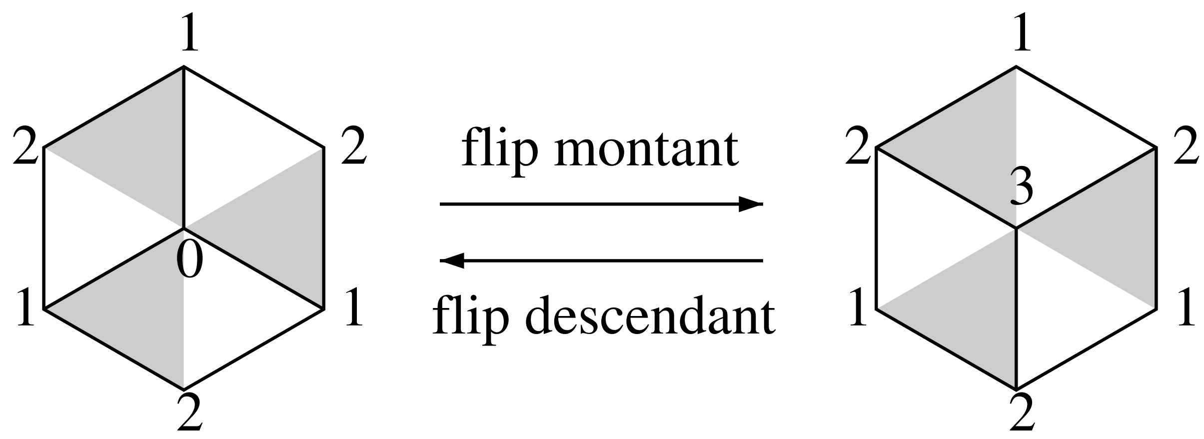
Square ice

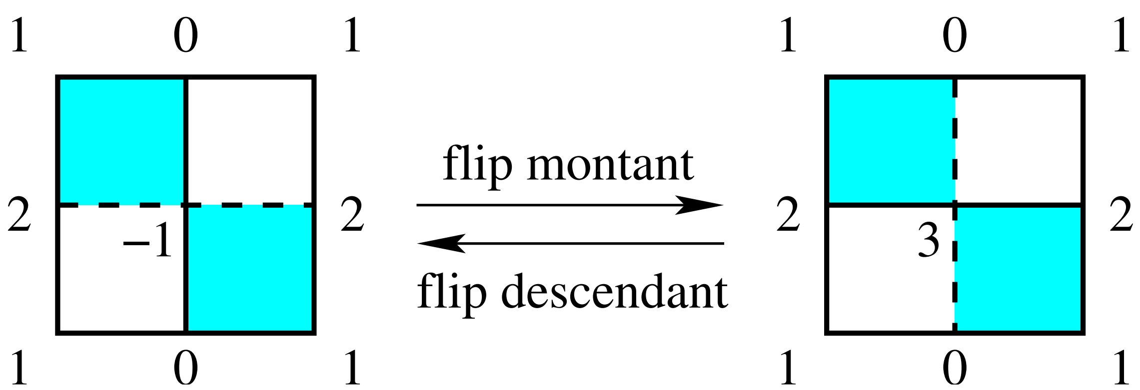
Fonctions de hauteur





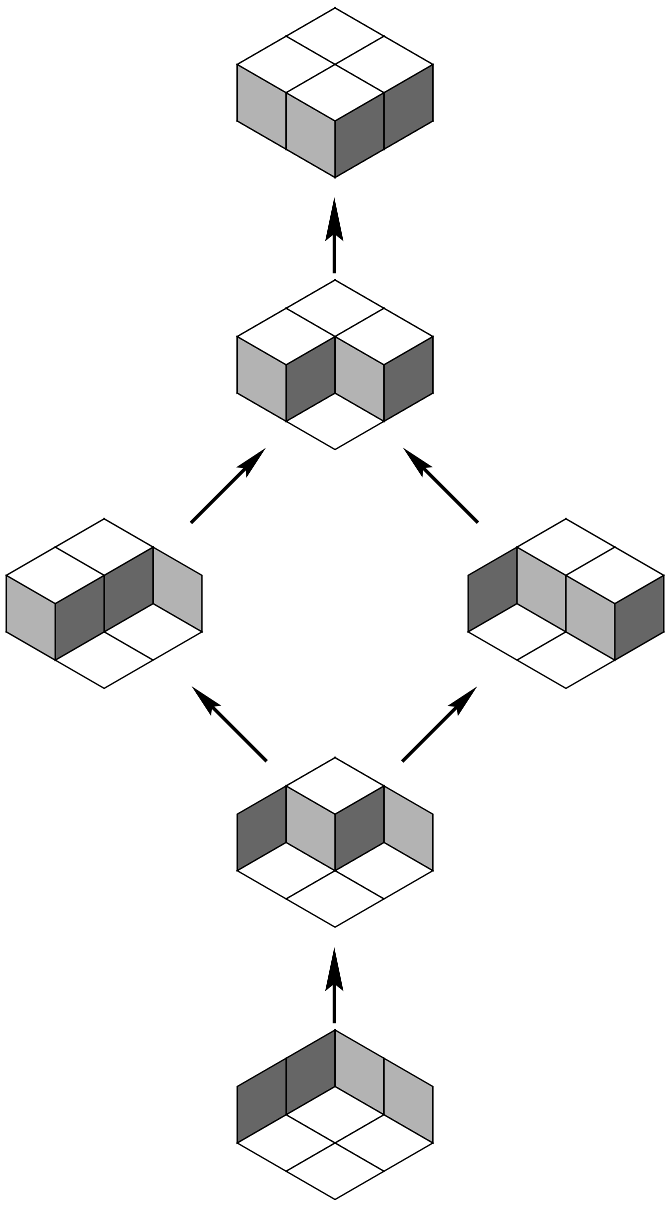
Flips


1
2
2
flip montant
3
0
flip descendant
1
1
2
1
2
2
1
1
2


1 0 1
2 2
−1
flip montant
flip descendant
3
1 0 1

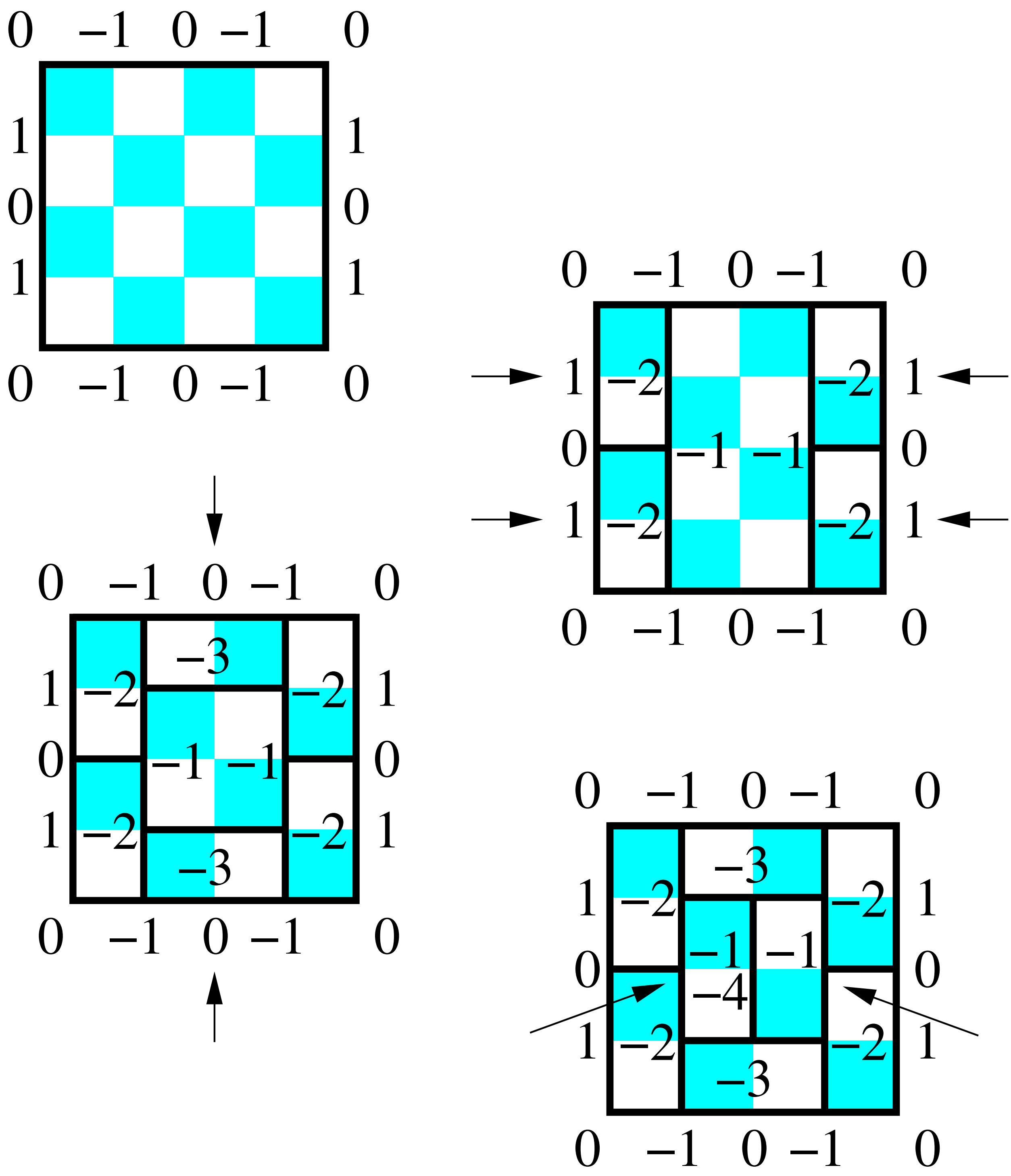
Structure de treillis distributif

L'ensemble des pavages d'un domaine sans trou, muni de l'ordre induit point par point par les fonctions de hauteur, admet une structure de treillis distributif.

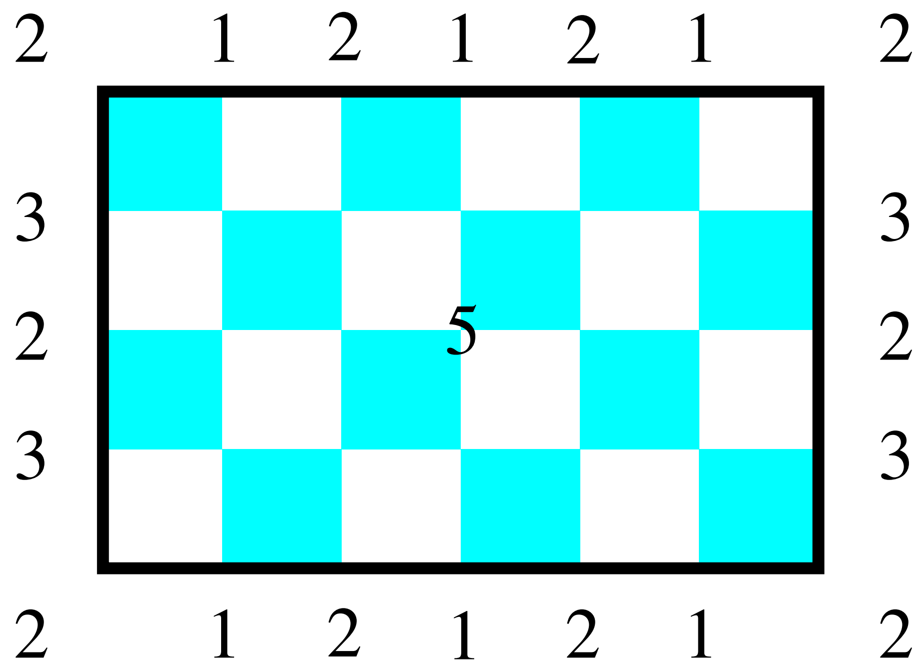


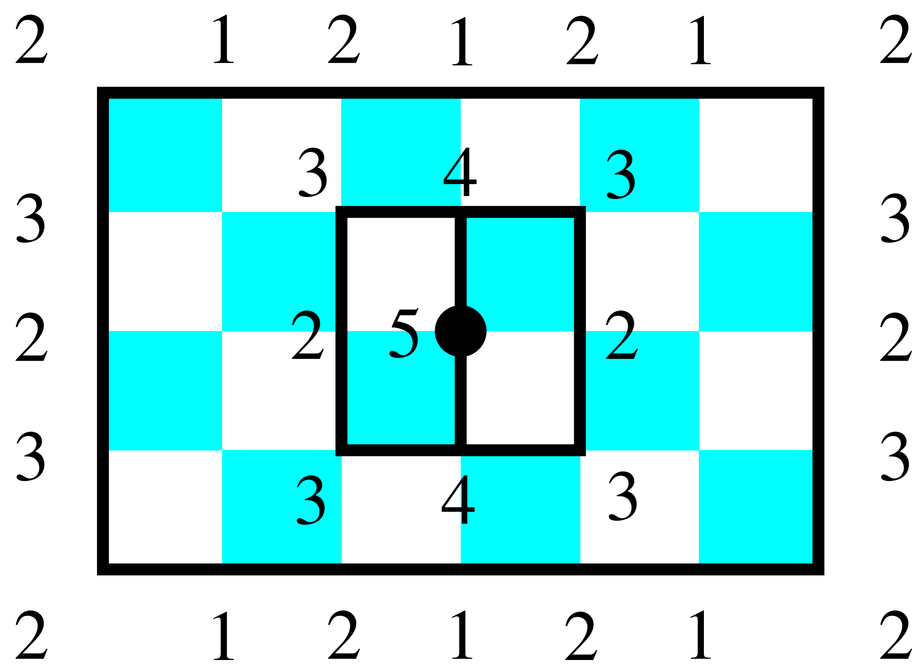
L’algorithme de Thurston

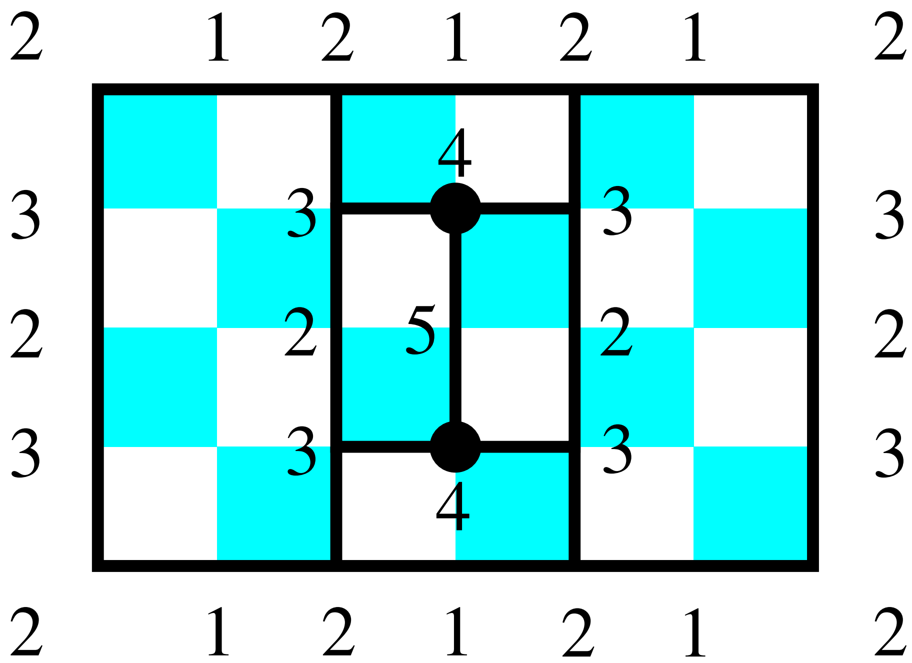
Les maxima locaux de la fonction de hauteur associée au pavage minimal se trouvent sur la frontière.



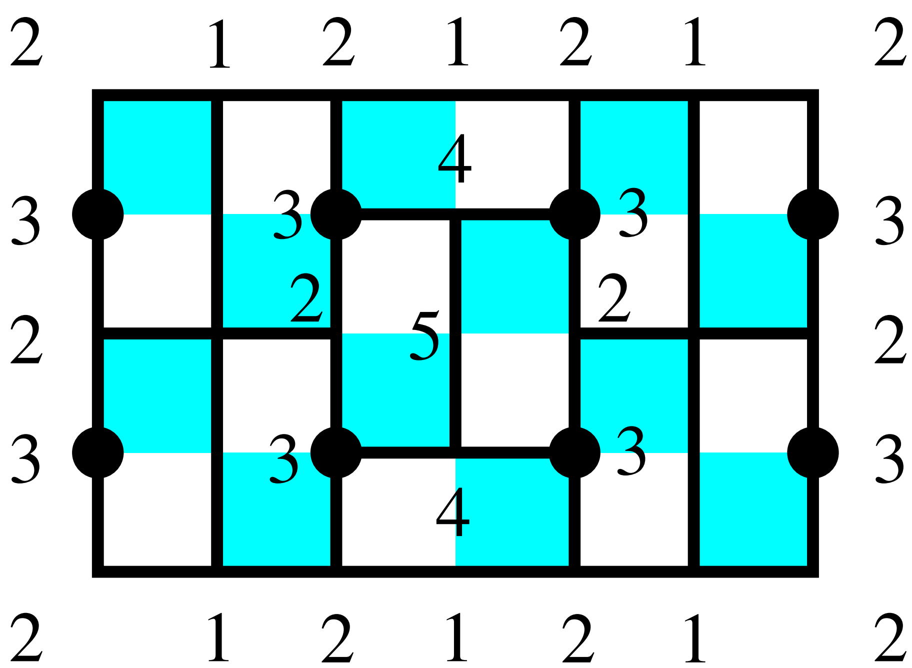
L'algorithme de Thurston généralisé





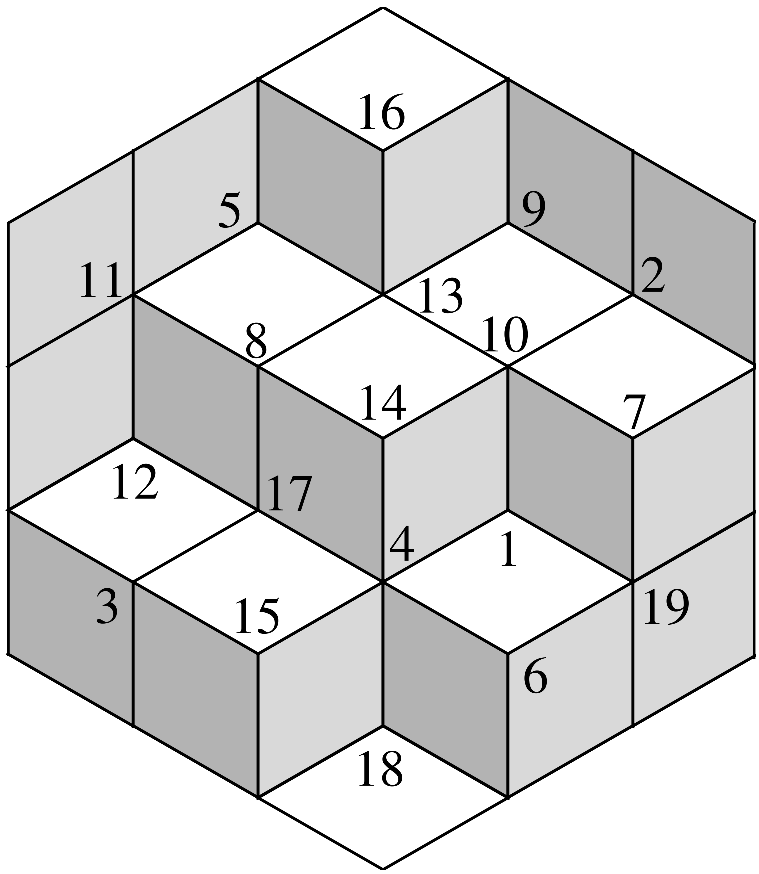


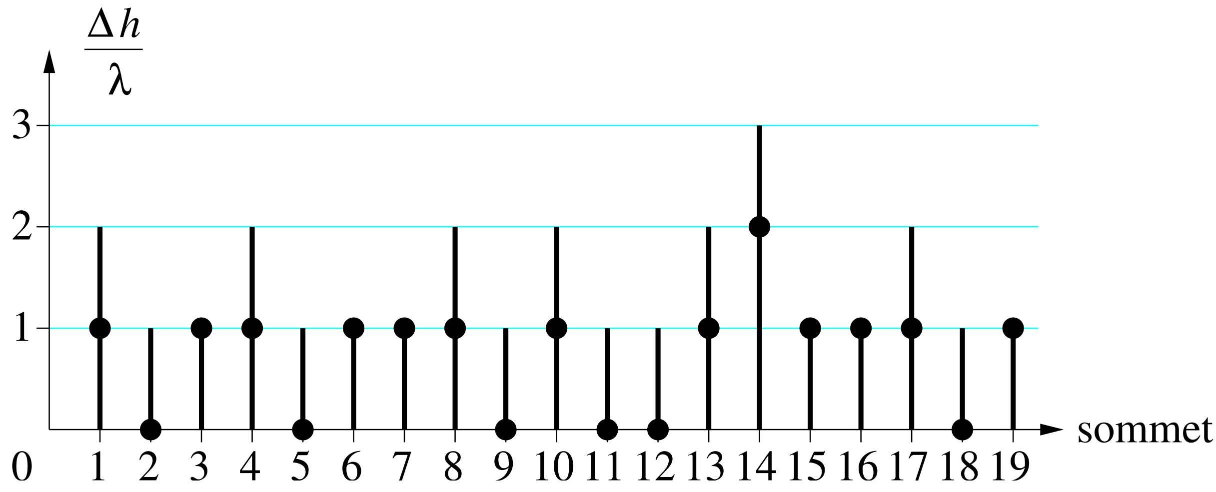
2 1 2 1 2 1 2
4
3 3 3 3
2 2 5 2 2
3 3 3 3
4
2 1 2 1 2 1 2



2 1 2 1 2 1 2
4
3 3 3 3
2 2 5 2 2
3 3 3 3
4
2 1 2 1 2 1 2

L'espace des configurations

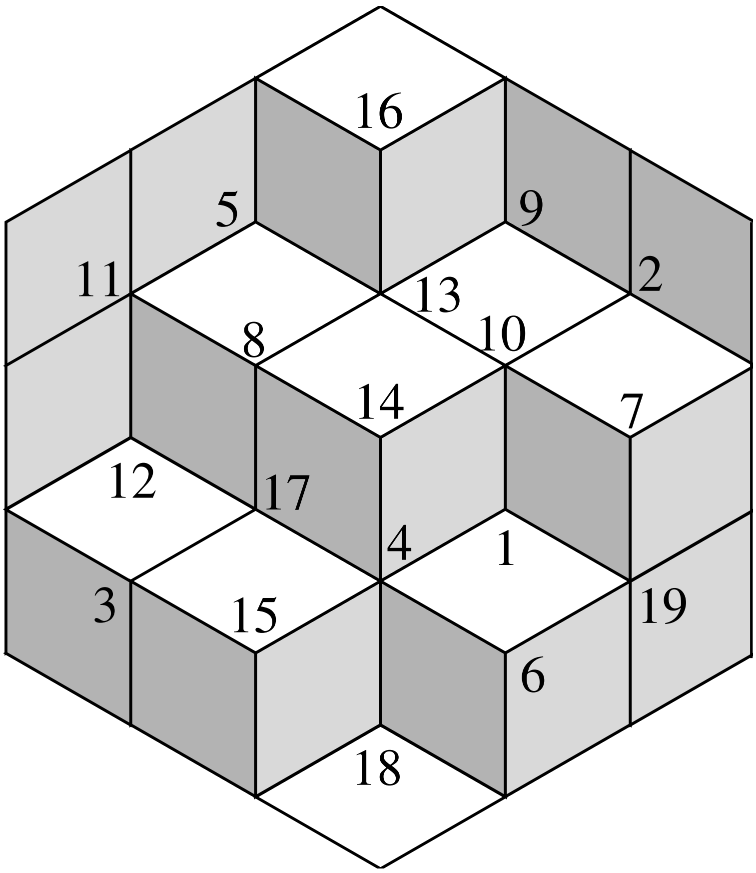




Codage:

1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	2	1	1	1	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Fonction successeur



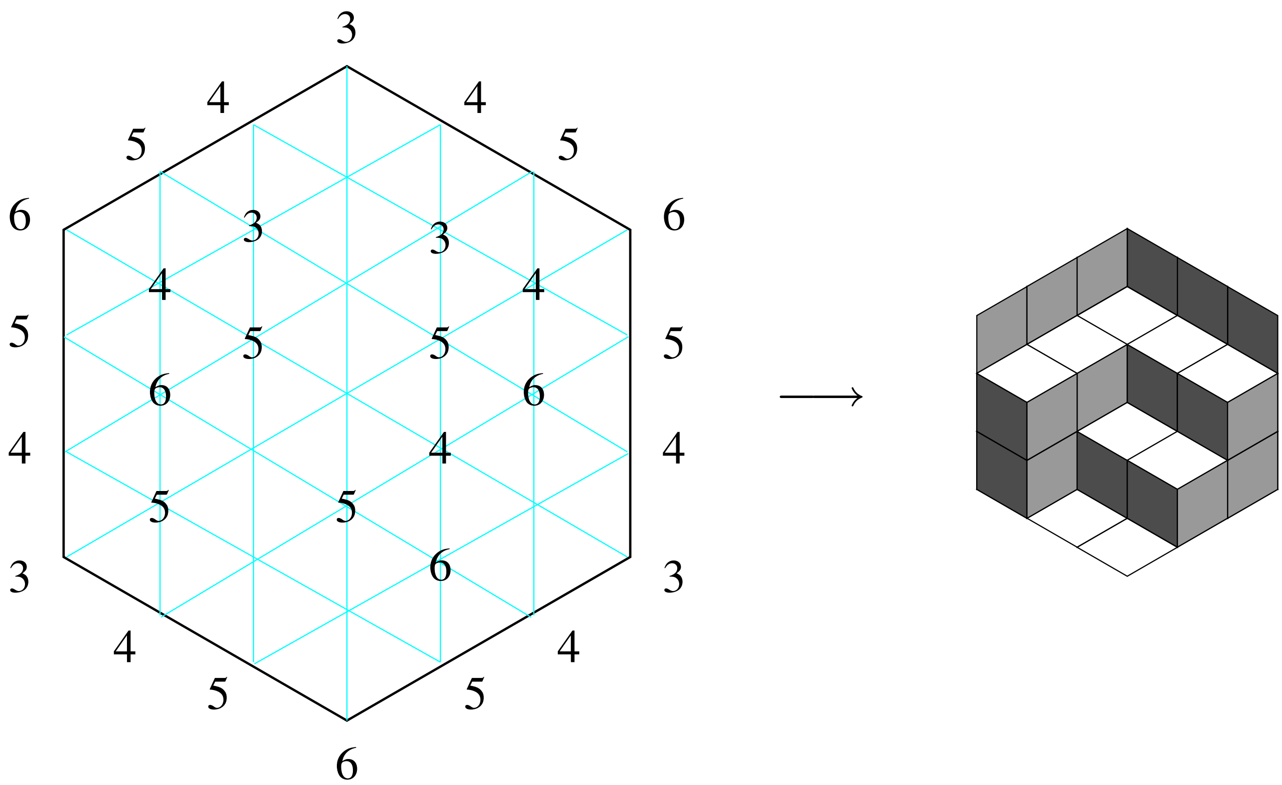
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	2	1	1	1	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	2	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	?	?	?	?	?	?	?
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Utilisation de l'algorithme de Thurston généralisé

1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	?	?	?	?	?	?	?
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19



1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Algorithme de génération

Initialisation

- Calculer le pavage minimal par l'algorithme de Thurston et le coder par un mot (w_{min}).
- $w = w_{\mathsf{min}}$

Étape courante

Tant que w est «flippable», calculer

$$w = \mathsf{Successeur}\,(w)$$

par l'algorithme de Thurston généralisé.

Ingrédients de la preuve

- Connexité par flips

- Structure de treillis

- Algorithme de Thurston généralisé

$\boxed{\text{Analyse de l'algorithme}}$

Temps

$$\#\text{pavages} \times \mathrm{O}(n)$$

où $n = \#$sommets car l'algorithme de Thurston généralisé est linéaire.

Espace

$$\mathrm{O}(n \log n)$$

où $n = \#$sommets car on stocke une fonction de hauteur.

Conclusion

- Espace des configurations
- Langage unifié
- Codage d'un pavage par un mot
- Généralisation de l'algorithme de Thurston
- Excellente complexité
- Adaptation aux domaines à trous