Génération de pavages

Sébastien Desreux
LIAFA
(Université Paris 7)

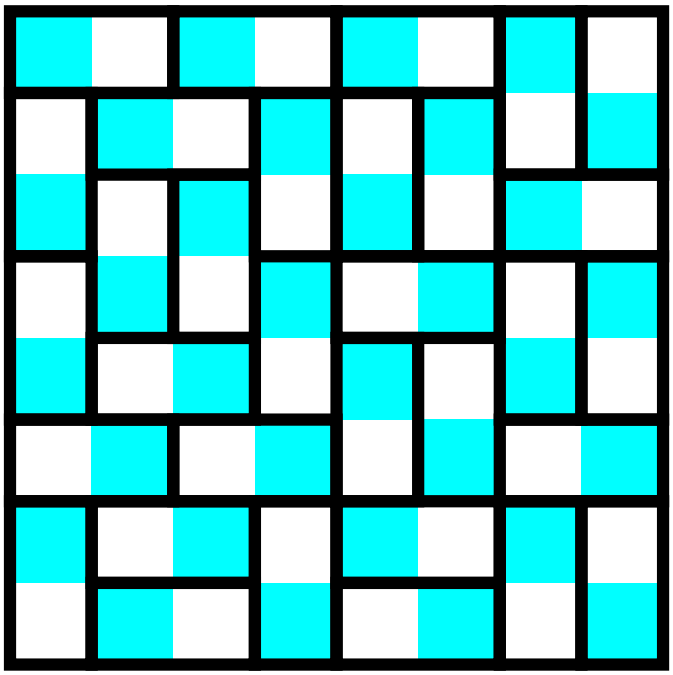
Éric Rémila
LIP
(ENS Lyon)

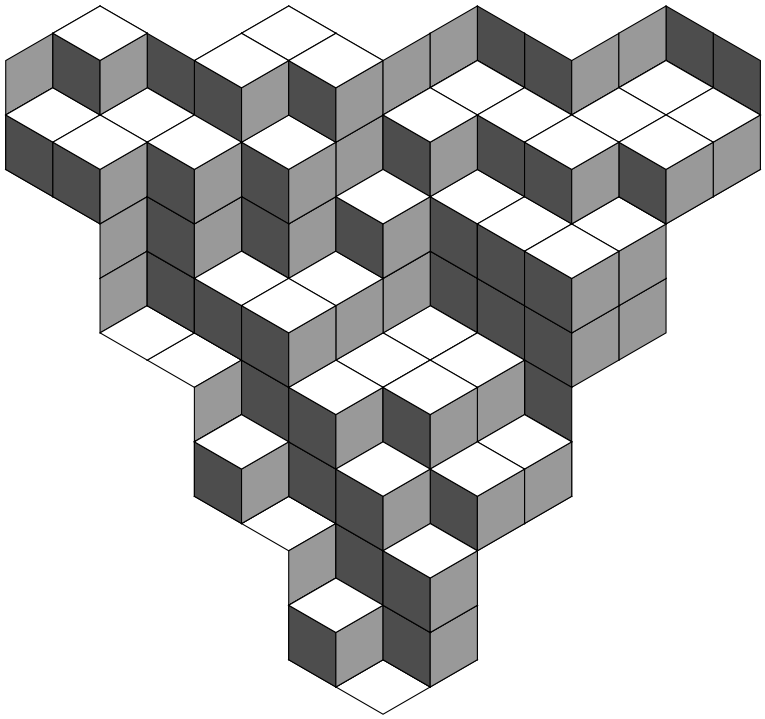
Les oiseaux d'Escher

- Pavage du plan (pas de conditions de bord)
- Pavage périodique
- Deux tuiles
- Translations

Échiquier et dominos

Dominos et losanges





Questions

- Comment déterminer si un domaine est pavable? (Thurston, 1990)

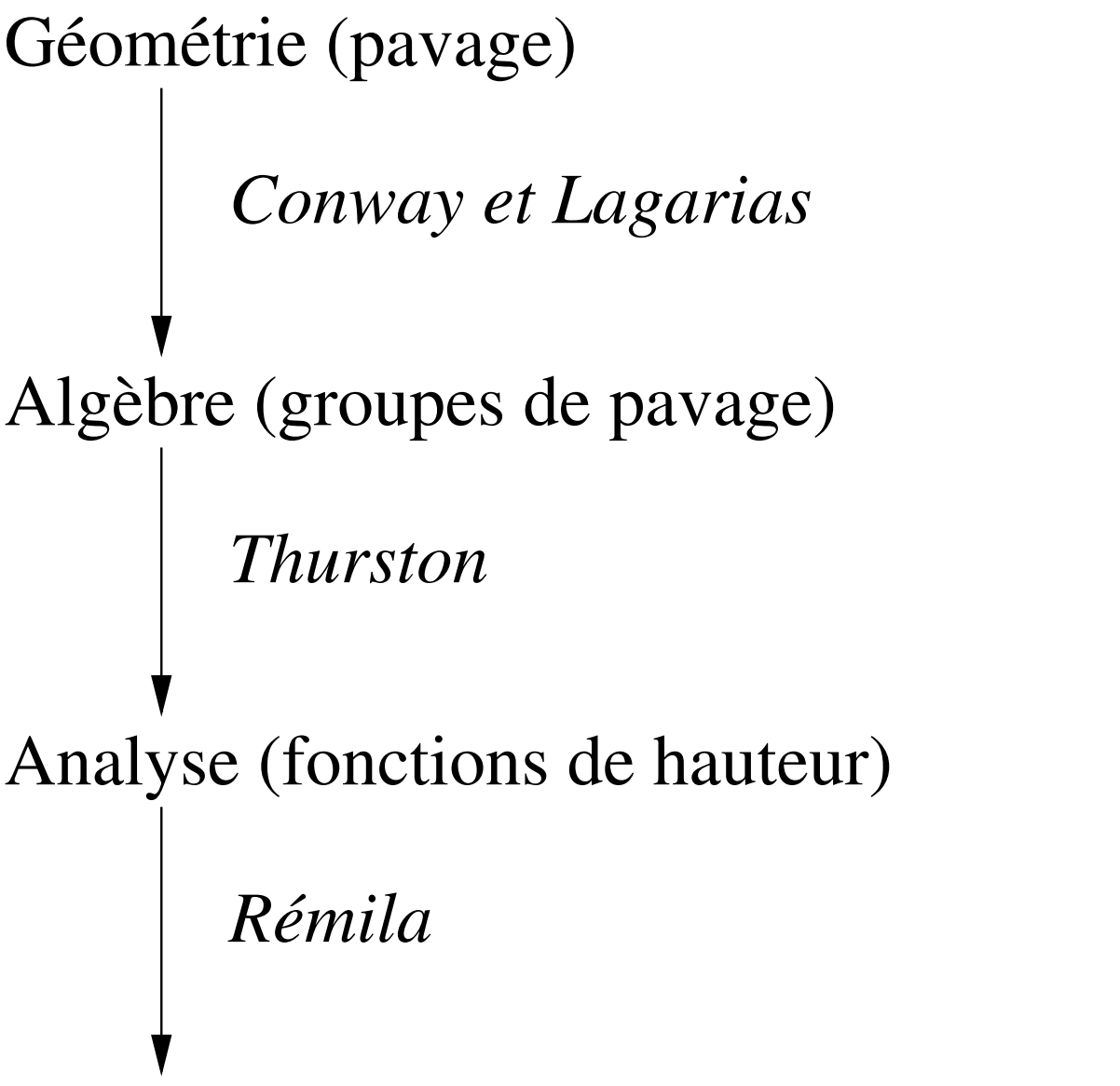
- Combien y a-t-il de pavages du domaine? (Kasteleyn, 1967)

  12 988 816 pavages de l'échiquier.

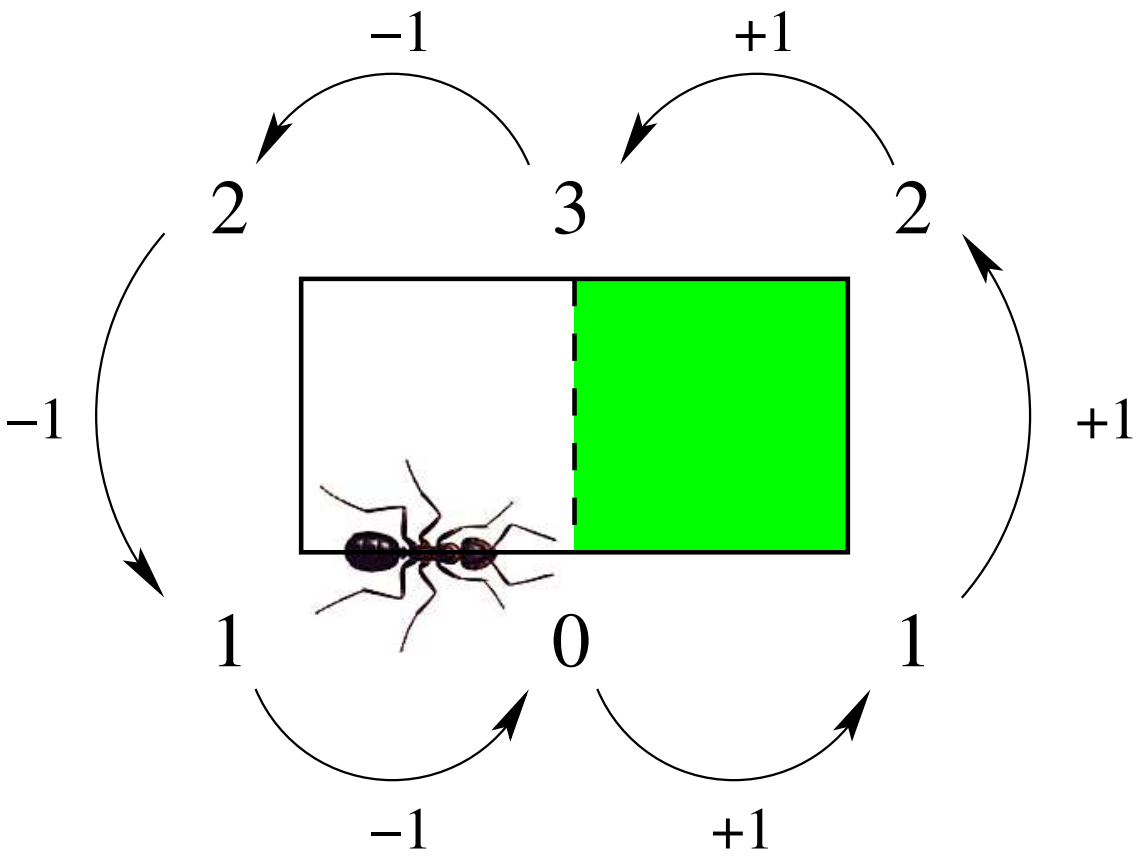
- Peut-on générer les pavages du domaine?

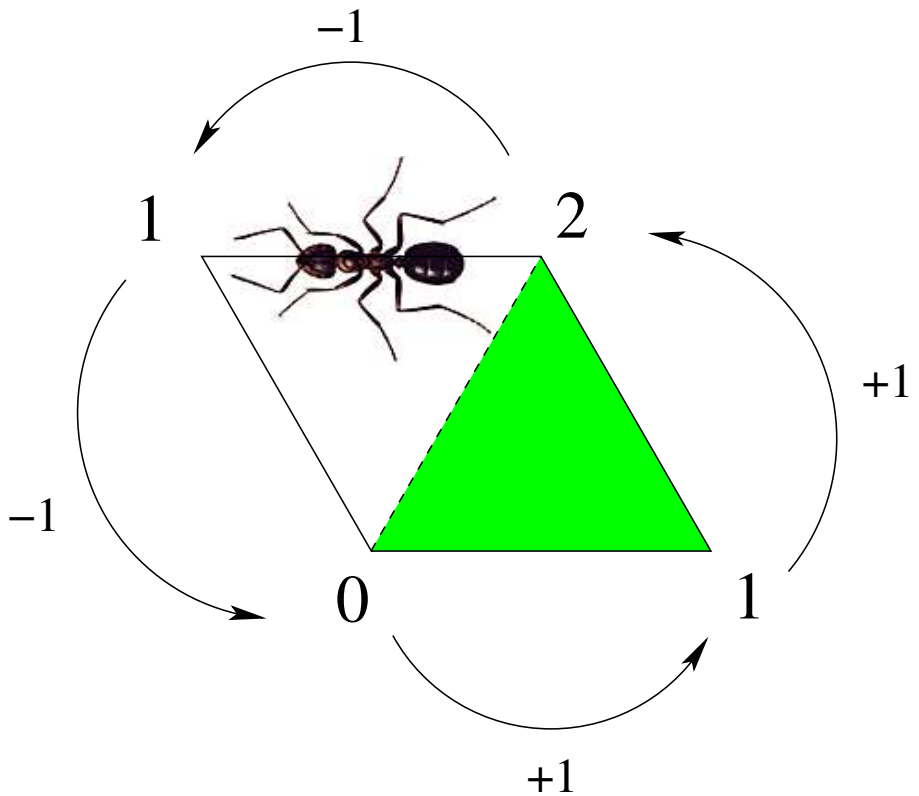
- Peut-on trier les pavages du domaine? (Rémila, 1999)

Reformulations

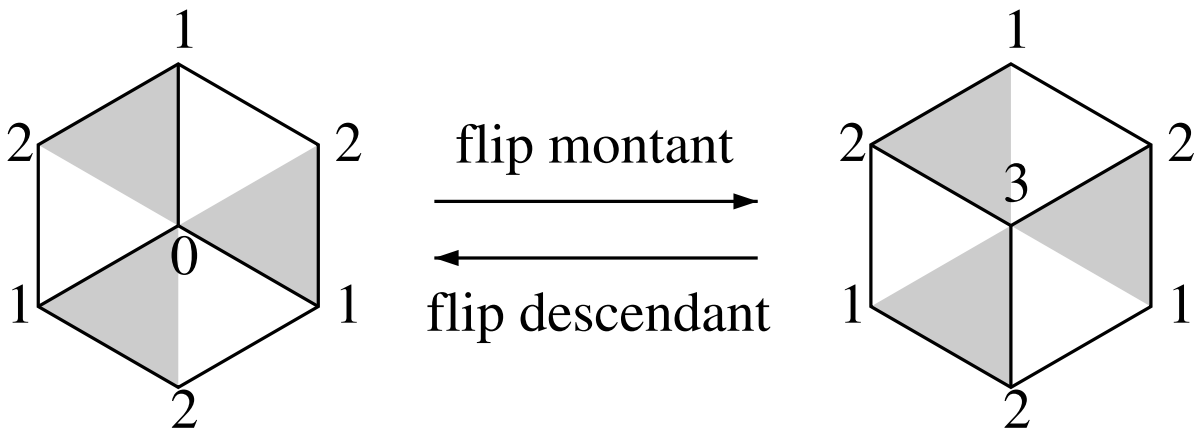


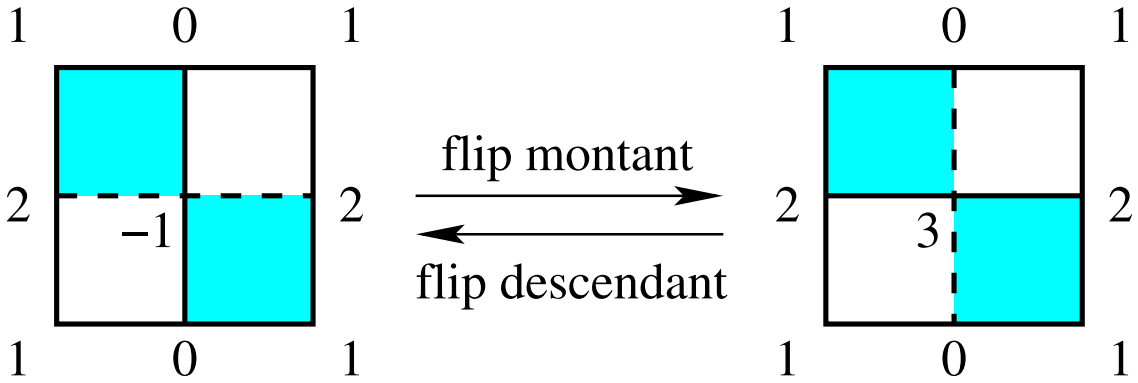
Fonctions de hauteur





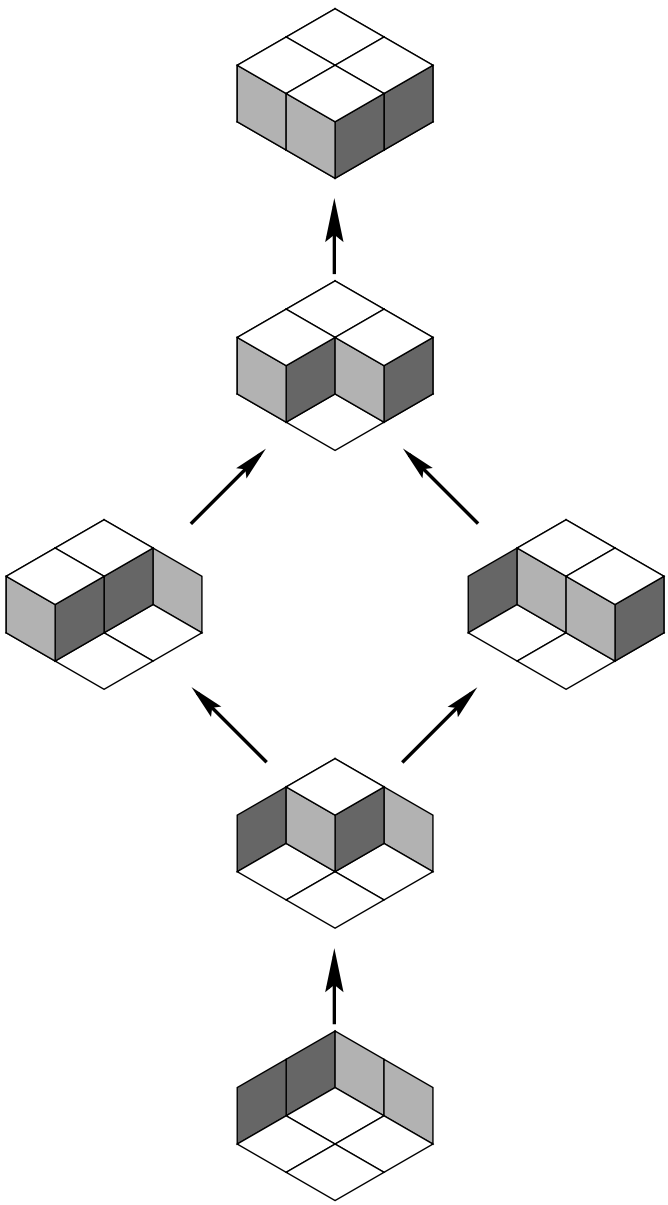
Flips


1
2
2
0
1
1
2
flip montant
flip descendant
1
2
2
3
1
1
2


1
0
1
2
−1
2
1
0
1
flip montant
flip descendant
1
0
1
2
3
2
1
0
1

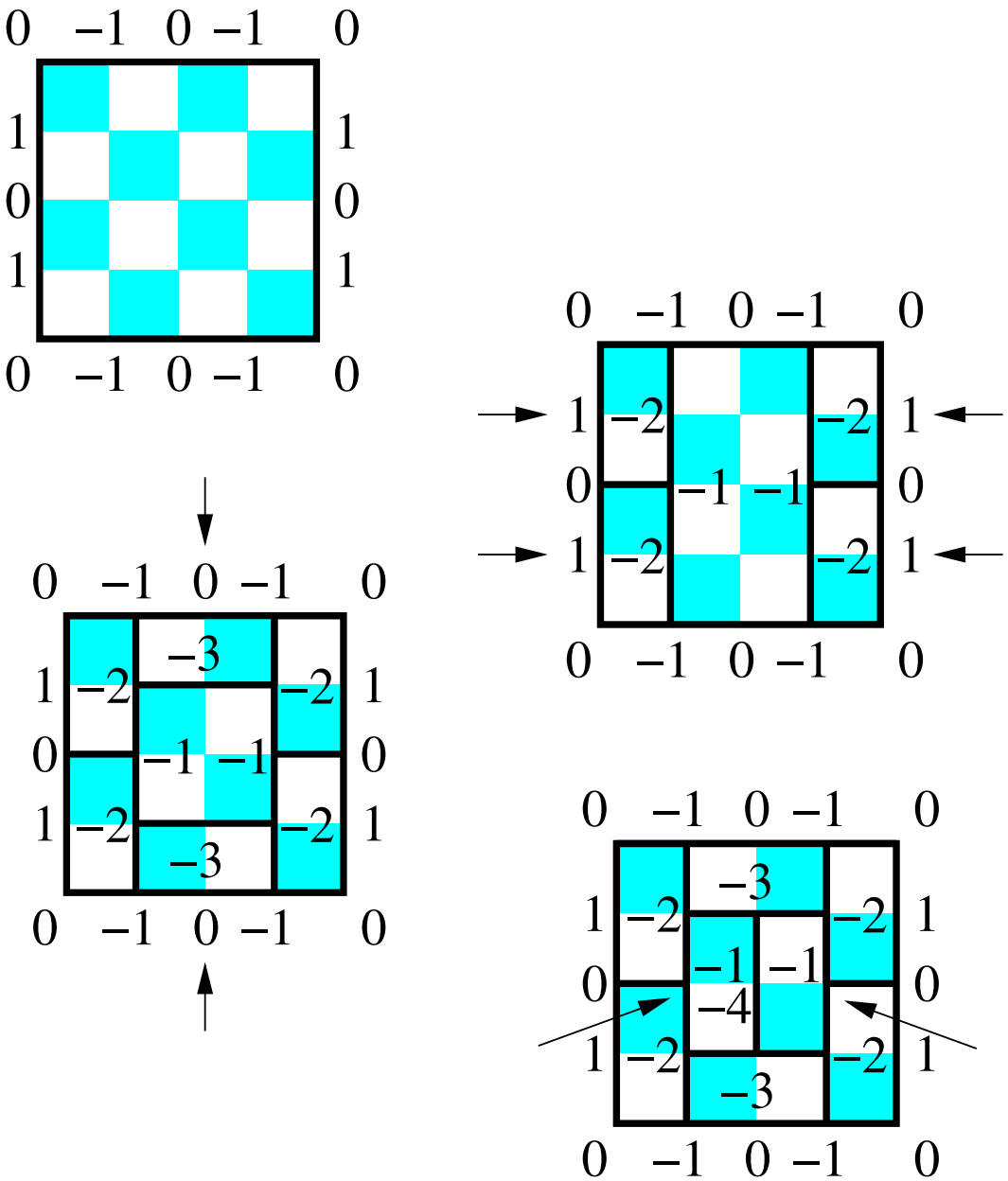
Structure de treillis distributif

L'ensemble des pavages d'un domaine sans trou, muni de l'ordre induit point par point par les fonctions de hauteur, admet une structure de treillis distributif.



L'algorithme de Thurston

Les maxima locaux de la fonction de hauteur associée au pavage minimal se trouvent sur la frontière.

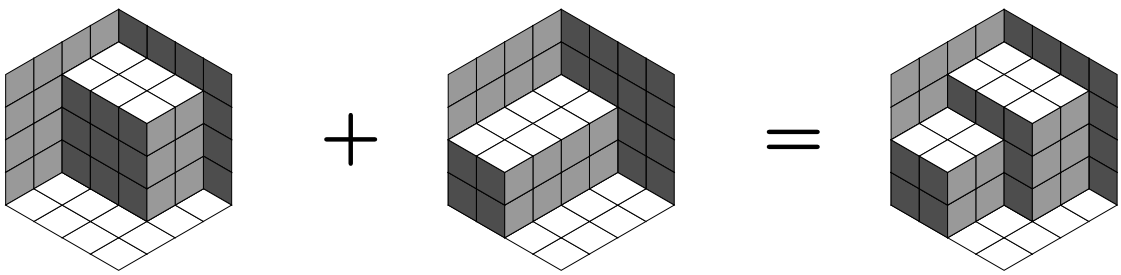


Le théorème de Birkhoff

- Un *sup-irréductible* est un élément du treillis qui admet exactement un antécédent dans le treillis.

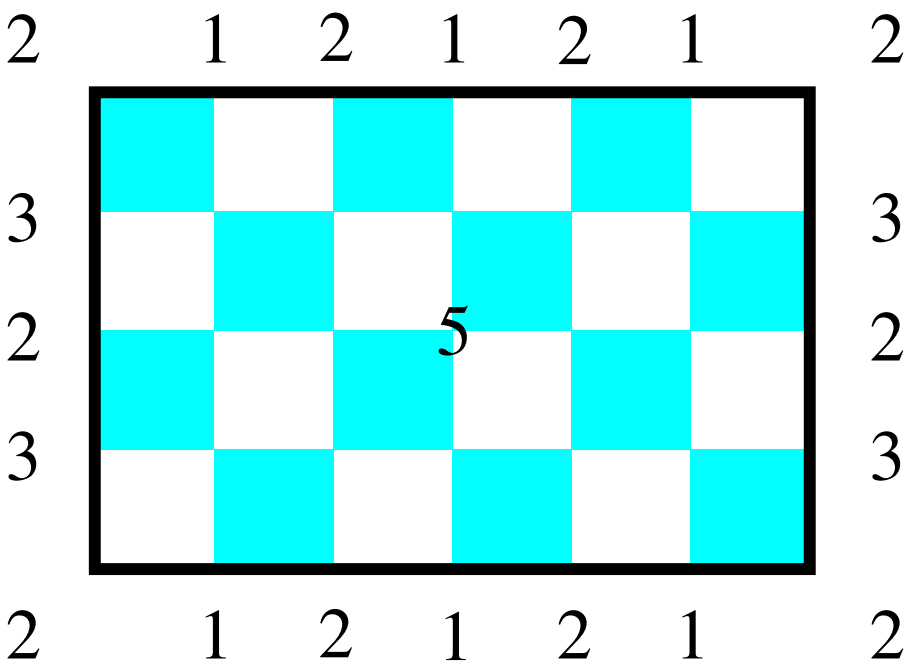
- Un *idéal* d'un ordre est un ensemble descendant.

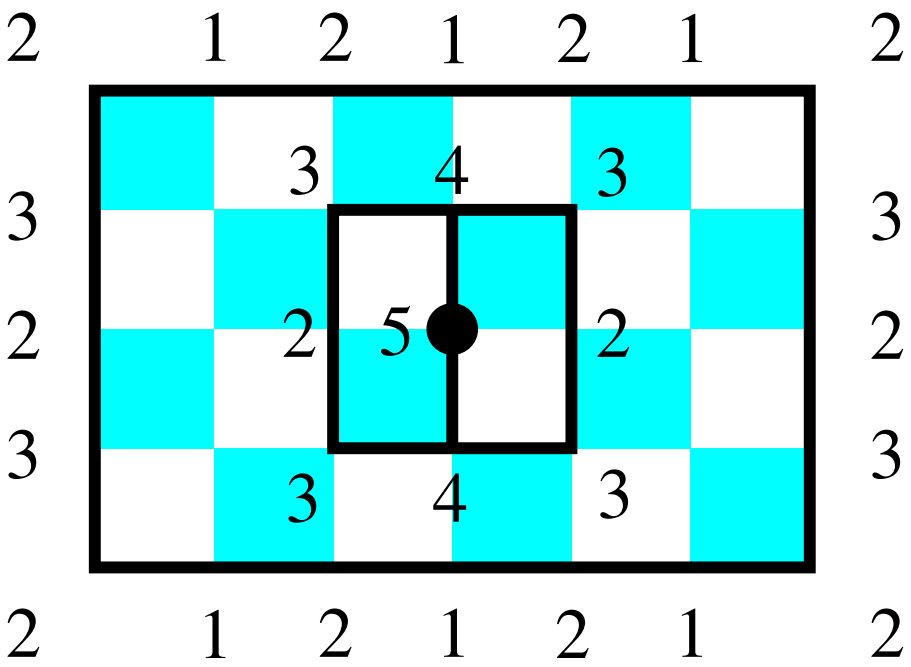
- Théorème: tout treillis distributif fini est isomorphe au treillis des idéaux de l'ordre de ses sup-irréductibles.

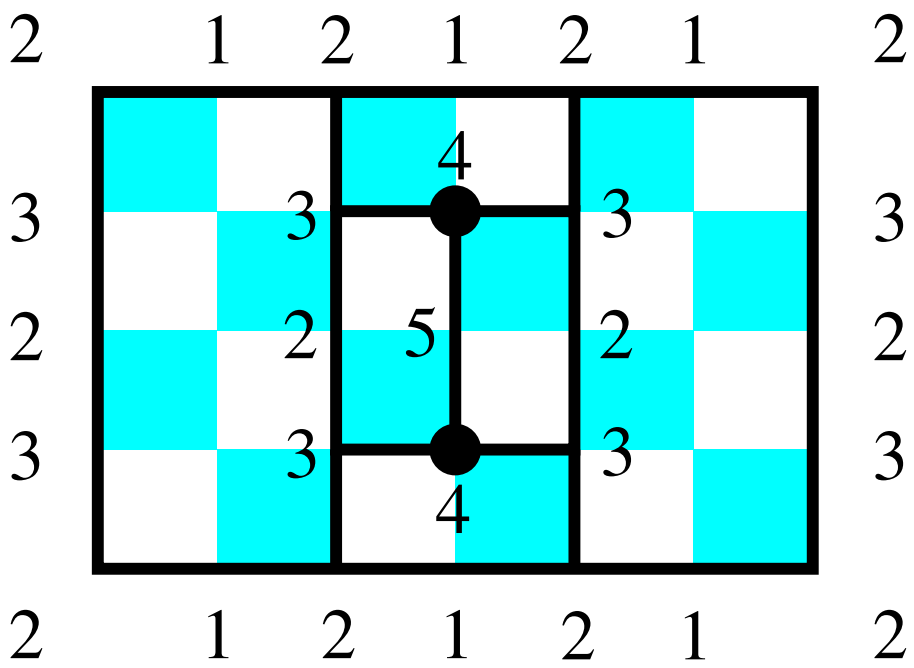


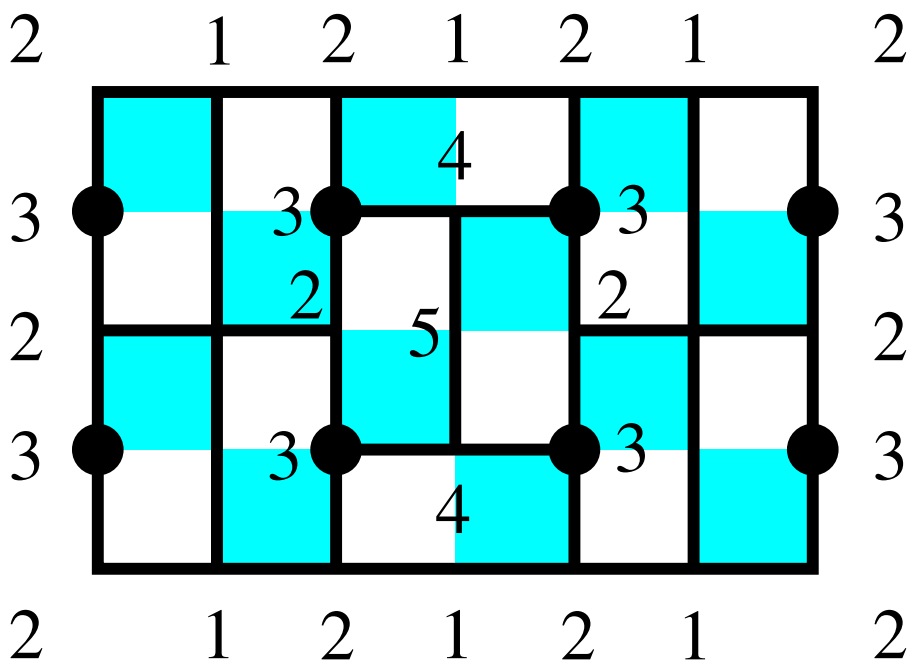
Tout pavage est le pavage minimal des maxima locaux de sa fonction de hauteur.

L'algorithme de Thurston généralisé

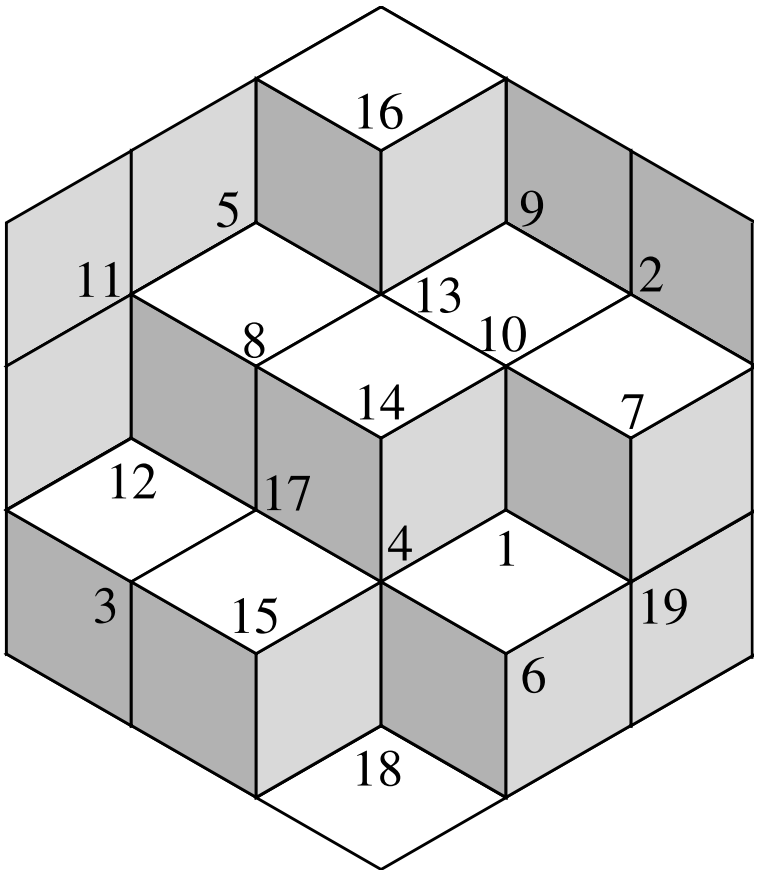


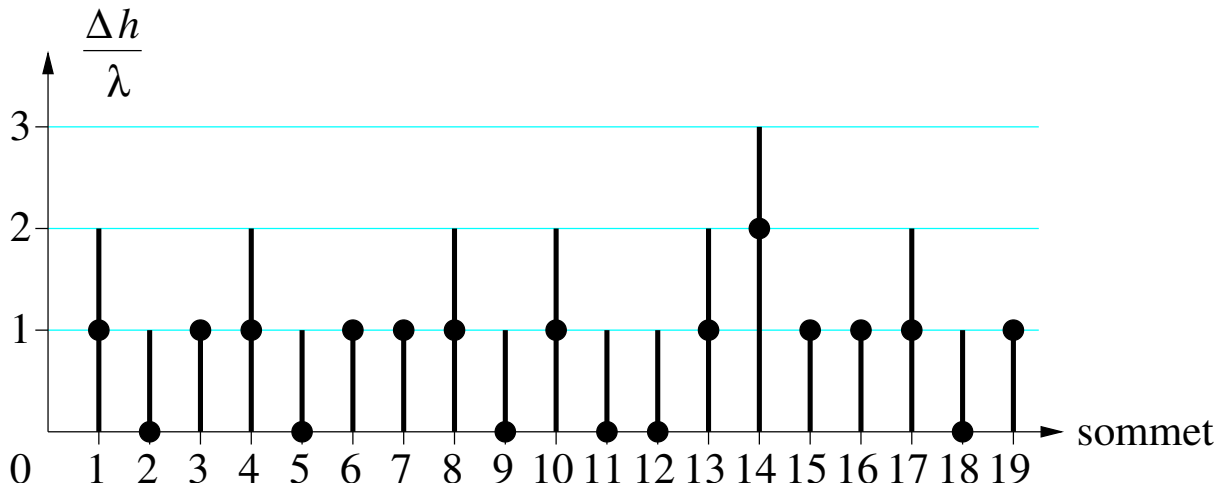



2 1 2 1 2 1 2
3 3 4 3 3
2 2 5 2 2
3 3 3 3
4
2 1 2 1 2 1 2


2 1 2 1 2 1 2
3 3 4 3 3
2 2 5 2 2
3 3 3 3
4
2 1 2 1 2 1 2

L'espace des phases

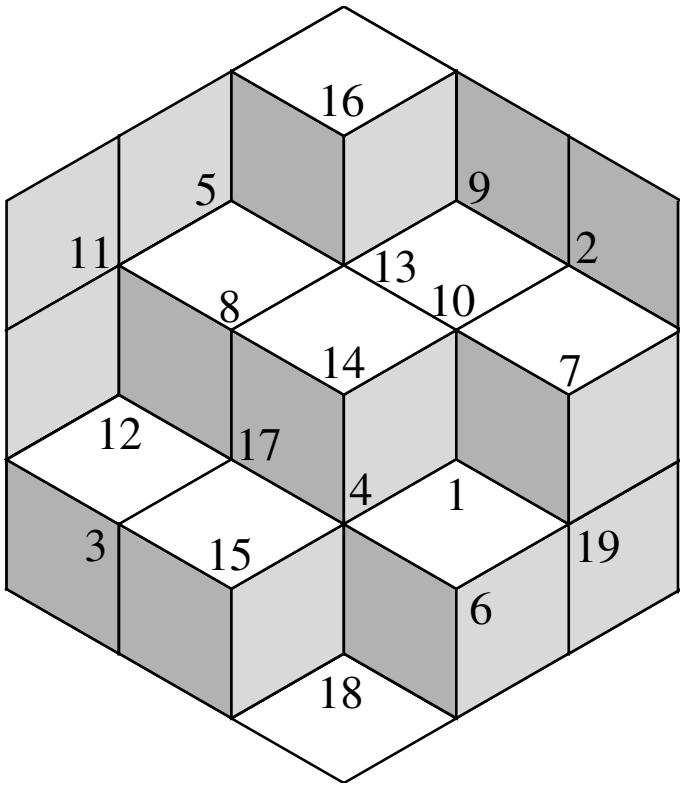


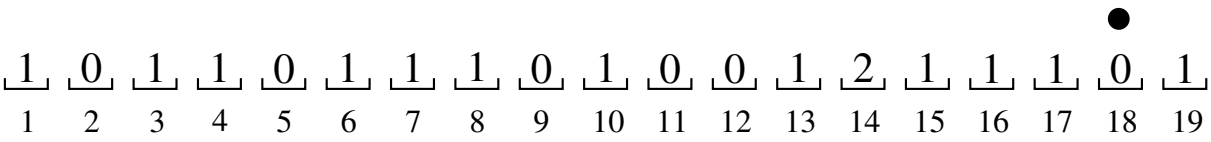


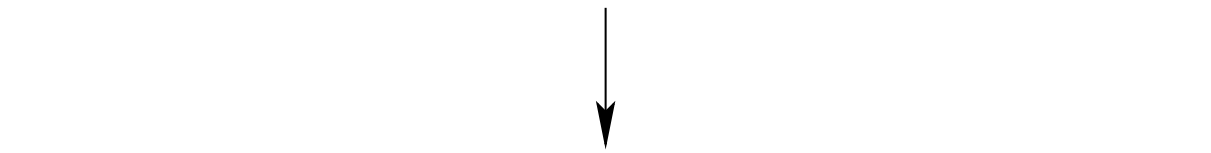
Codage:

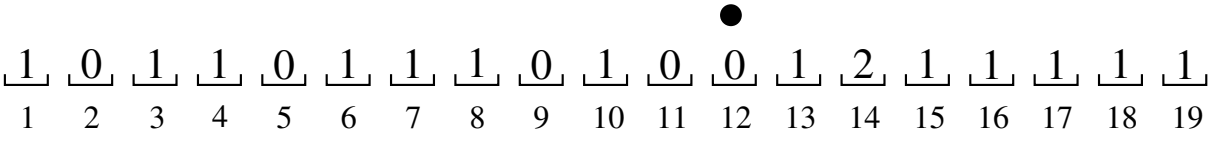
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	2	1	1	1	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Fonction successeur



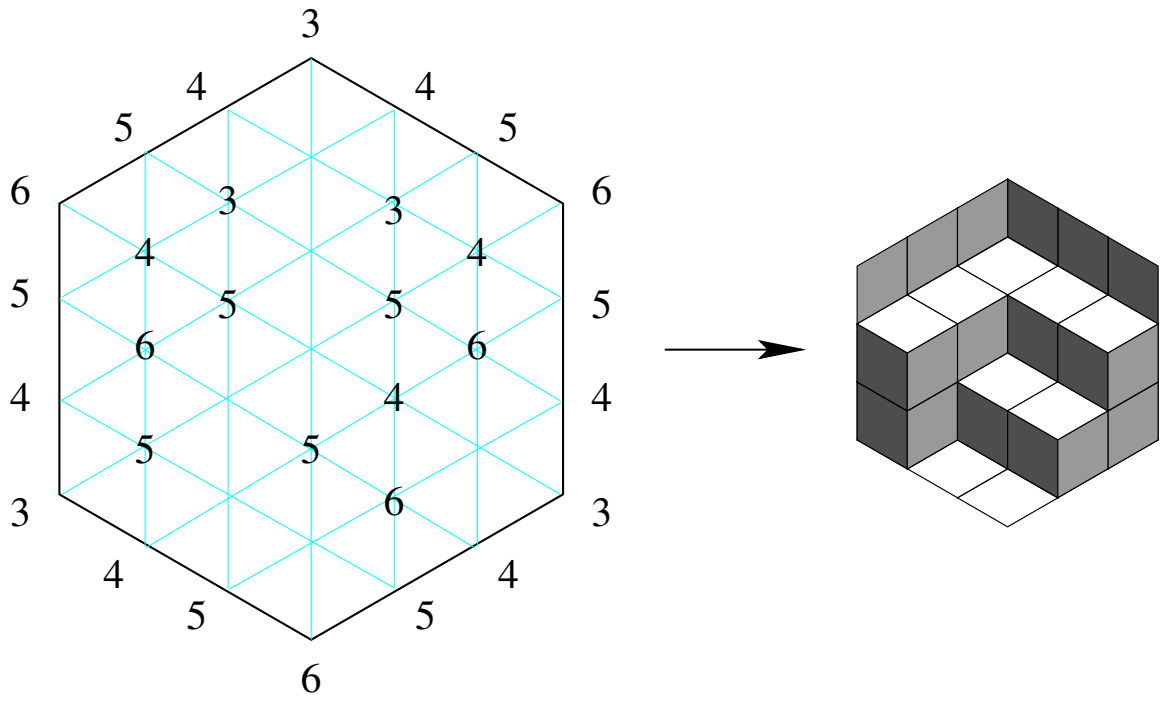






Utilisation de l'algorithme de Thurston généralisé

1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	?	?	?	?	?	?	?
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19



1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Algorithme de génération

Initialisation

- Calculer le pavage minimal par l'algorithme de Thurston et le coder par un mot (w_{min}).

- $w = w_{\text{min}}$

Étape courante

Tant que w est «flippable», calculer

$$w = \text{Successeur}\,(w)$$

par l'algorithme de Thurston généralisé.

Analyse de l'algorithme

Temps

$$\#\text{pavages} \times O(|\mathscr{D}|)$$

où $|\mathscr{D}| = \#\text{sommets}$ car l'algorithme de Thurston généralisé est linéaire.

Espace

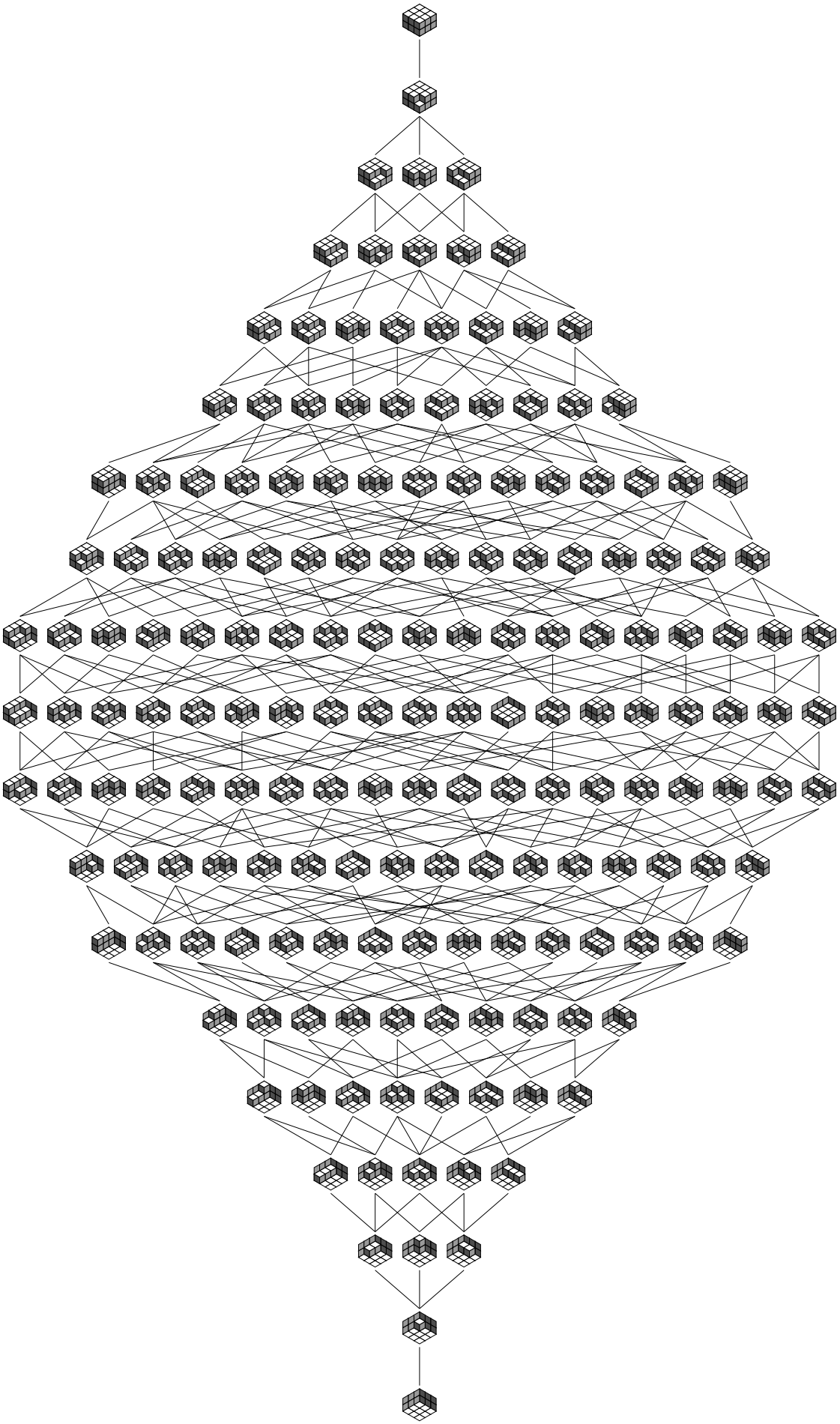
$$O(|\mathscr{D}| \log |\mathscr{D}|)$$

car on stocke une fonction de hauteur.

Extensions de la méthode

- Génération des pavages d'un intervalle quelconque du treillis
- Génération des sup-irréductibles
- Génération du treillis
- Génération de l'ordre des sup-irréductibles
- Généralisation aux domaines à trous

Application



Conclusion

- Espace des phases
- Langage unifié
- Codage d'un pavage par un mot
- Application du théorème de Birkhoff
- Généralisation de l'algorithme de Thurston
- Excellente complexité
- Adaptation aux domaines à trous

Perspectives

- Pavage le plus proche d'un élément de l'espace des phases
- Génération aléatoire
- Généraliser aux treillis distributifs finis
- Adaptation aux barres