INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : Mathématiques Appliquées

préparée au Laboratoire de Modélisation et Calcul (LMC / IMAG)

dans le cadre de **l'Ecole Doctorale**
"Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information"

présentée et soutenue publiquement par

Claude-Pierre JEANNEROD

le 8 décembre 2000

Formes normales de perturbations de matrices : étude et calcul exact

Directeur de thèse : Jean DELLA DORA *Co-Directeur :* Gilles VILLARD

JURY

M. Paul VAN DOOREN	Professeur - Université Catholique de Louvain	*Président*
M. Bernard MOURRAIN	Chargé de Recherche - INRIA Sophia Antipolis	*Rapporteur*
M. Jean-Claude YAKOUBSOHN	Professeur - Université P. Sabatier, Toulouse	*Rapporteur*
M. Jean DELLA DORA	Professeur - INP Grenoble	*Examinateur*
Mme Dominique DUVAL	Professeur - Université J. Fourier, Grenoble	*Examinatrice*
M. Gilles VILLARD	Chargé de Recherche - CNRS Lyon	*Examinateur*

Je remercie Paul Van Dooren pour l'intérêt qu'il porte à mon travail en acceptant de présider ce jury. Sa présence aujourd'hui m'honore tout particulièrement.

Merci également à Bernard Mourrain et à Jean-Claude Yakoubsohn pour leur relecture attentive et remarquablement efficace. La perspective que tous deux rapportent sur ma thèse a été d'emblée très motivante et j'espère pouvoir profiter longtemps encore de leurs commentaires et encouragements.

Que Dominique Duval ait bien voulu participer à ce jury me touche sincèrement. J'ai pu bénéficier de ses encouragements dès le début de cette thèse et ses travaux sur les équations algébriques m'ont beaucoup appris. Qu'elle en soit ici remerciée vivement.

Enfin, et surtout, je tiens à remercier Jean Della Dora et Gilles Villard pour m'avoir fait découvrir un thème passionnant et riche et pour avoir accepté de guider mes pas sur cette voie, toujours dans les meilleures conditions.

Merci à Jean, cet imaginatif hors pair, pour sa confiance et ses nombreux encouragements.

Gilles, merci pour le suivi sans faille et le soutien constant, pour cette incomparable clairvoyance et pour toutes les portes ouvertes.

Je remercie bien sûr tous les membres des équipes "Calcul formel" et "Mosaic" pour leur accueil, leur aide et leur présence. Merci d'avoir toujours été là pour répondre à mes interrogations.

Ma reconnaissance va également à l'ensemble du personnel administratif du laboratoire ainsi qu'aux personnes de la médiathèque et de la reprographie. Leur efficacité aura été une aide précieuse.

Pour finir, un grand merci à ma famille et à mes amis - ces personnes admirables et admirées - pour tout ce qu'ils rendent possible chaque jour. Avec bien sûr une pensée toute particulière pour celles et ceux qui se reconnaîtront.

Table des matières

Table des figures

Liste des algorithmes

Notations

a, $\boldsymbol{a}$, A	un scalaire, un vecteur de composantes a_i, une matrice d'éléments a_{ij}
$\operatorname{diag}[a_i]$	la matrice diagonale définie par le vecteur $[a_i]$
$\operatorname{Diag}[A_k]$	la matrice diagonale par blocs définie par les matrices A_k
$[A^{kl}]$	la matrice par blocs définie par les matrices A^{kl}
O, I	les matrices nulle et identité
O_k, $O_{k\times l}$, I_k	les matrices nulles d'ordre k et $k \times l$, l'identité d'ordre k
$\boldsymbol{e}^{(i)}$	la i-ième colonne de I
$\boldsymbol{a}^T$, A^T	transposée de $\boldsymbol{a}$, transposée de A
$\det A$, $\operatorname{rg} A$, A^{-1}	le déterminant, le rang et l'inverse de A
$\epsilon^{\boldsymbol{a}}$	la matrice diagonale dont le i-ième élément est ϵ^{a_i}
$\bar{\boldsymbol{a}}$	le vecteur mirroir de $\boldsymbol{a}$, égal à $[a_{n+1-i}]$ si $\boldsymbol{a}$ est d'ordre n
$\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$	les entiers tels que $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$ pour x entier et
	$x - 1 < \lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil < x + 1$ pour x réel non entier
$A \otimes B$	la matrice $[a_{ij}B]$ (produit de Kronecker de deux matrices)

Préambule

Cette thèse étudie les formes normales rationnelles de perturbations de matrices en vue de la résolution du problème des perturbations pour les valeurs propres.

On appelle perturbation de matrice $A(\epsilon)$ la somme d'une matrice constante A_0 et d'une fonction matricielle de ϵ, nulle en $\epsilon = 0$. Or, les valeurs propres de $A(\epsilon) = A_0 + \mathrm{O}(\epsilon)$ peuvent varier très fortement au voisinage de $\epsilon = 0$. Typiquement, pour une perturbation aléatoire de l'ordre de 10^{-6} du bloc de Jordan nilpotent 3×3 la variation de la valeur propre nulle de ce bloc sera très probablement de l'ordre de 10^{-2}. Un problème important en algèbre linéaire est alors d'être capable d'estimer ces variations au vu de la matrice $A(\epsilon)$ dont on dispose.

En tant que solution de l'équation algébrique $\det(\lambda I - A(\epsilon)) = 0$, les valeurs propres de $A(\epsilon)$ admettent au voisinage de $\epsilon = 0$ des développements en séries de Puiseux. Leur comportement asymptotique en zéro est donc entièrement décrit par les termes dominants de ces séries, tous de la forme

$$\mu \epsilon^{\beta}$$

avec μ un élément non nul d'une clôture algébrique du corps des éléments de la matrice A_0 et β un nombre rationnel positif ou nul, appelé valuation de la valeur propre. Si la méthode du polygone de Newton permet de déduire tous les termes dominants de quelques monômes du polynôme caractéristique $\det(\lambda I - A(\epsilon))$, on ne cherchera pas à calculer ce polynôme, essentiellement pour des raisons de coût mais aussi parce que cela n'est pas nécessaire: seuls quelques uns parmi ses monômes - disons, les plus influents - participent à la définition des termes dominants. Par définition du polynôme caractéristique cela signifie que les termes dominants peuvent être représentés de façon rationnelle à l'aide de quelques éléments de quelques coefficients matriciels de la série $A(\epsilon)$. Lesquels?

Pour tenter de répondre à cette question, une approche consiste à identifier les valuations β à des caractéristiques de la matrice $A(\epsilon)$ supposées immédiatement accessibles comme - et ce sont celles que nous étudierons - les valuations de ses colonnes et/ou l'inverse des dimensions des blocs de la structure de Jordan de sa matrice non perturbée A_0. (Les coefficients dominants μ sont alors obtenus facilement et représentés rationnellement commme des racines de polynômes.)

Deux voies s'ouvrent alors, que nous emprunterons successivement. On peut commencer par expliciter des conditions suffisantes sur $A(\epsilon)$ pour que ces caractéristiques soient effectivement les valuations de ses valeurs propres. Suivant Lidskii [40], nous verrons que de telles conditions ne portent que sur quelques coefficients de la série $A(\epsilon)$ et sont génériquement satisfaites. On parlera alors de famille de perturbations quasi-génériques (par rapport à la caractéristique en question).

Dans un deuxième temps, si une perturbation de matrice $A(\epsilon)$ n'appartient à aucune des familles connues, on cherche alors à la "rapprocher le plus possible" de l'une d'entre elles au moyen d'une similitude polynomiale en ϵ. Cette forme "la plus proche" - en un sens qui sera précisé - est appelée forme réduite de $A(\epsilon)$. Elle n'est pas unique mais rend en général possible la lecture d'un type de valuation (entière, inverse d'un entier, rationnelle) et donc la détermination de certains termes dominants, parfois même de tous. Par forme normale on entend une forme réduite diagonalisée par blocs à l'aide d'une similitude à coefficients des séries formelles en ϵ. Elle non plus n'est pas unique mais elle réalise une normalisation rationnelle de la forme réduite dans la mesure où elle ne contient aucune série de Puiseux, contrairement aux solutions déjà proposées [18, 13].

Ces notions et l'énoncé précis des problèmes qui leur sont associés sont présentés dans le premier chapitre en guise d'introduction.

Les contributions de cette thèse sont les suivantes. Nous proposons, en plus de la famille $\mathcal{L}$ des perturbations de Lidskii [40, 45], deux nouvelles familles $\mathcal{VP}$ et $\mathcal{L}^+$ de perturbations quasi-génériques: les perturbations quasi-génériques à profil de valuations fixé et les perturbations de Lidskii généralisées.

A chacune des deux familles $\mathcal{VP}$ (chapitre 3) et $\mathcal{L}$ (chapitre 4) on associe une forme réduite pour laquelle on donne trois caractérisations, un algorithme de réduction et une forme normale rationnelle. Les perturbations quasi-génériques à profil de valuations fixé permettent d'obtenir les termes dominants de toutes les valeurs propres de valuation entière; les perturbations de Lidskii permettent d'obtenir ceux des valeurs propres de valuation l'inverse d'un entier positif.

Les algorithmes proposés s'inspirent de travaux de Moser [46] et de Hilali et Wazner

[28, 27] portant sur la réduction formelle des systèmes différentiels linéaires. Dans les deux cas il s'agit de maximiser ou minimiser selon l'ordre lexicographique une partition entière de la dimension de la matrice $A(\epsilon)$ sur son orbite. Avant de développer ces algorithmes, nous analysons le cas particulier de la minimisation du rang de la matrice non perturbée A_0 de $A(\epsilon)$ au chapitre 2.

Enfin, nous montrons au chapitre 5 que toute perturbation de matrice est semblable à une perturbation de Lidskii généralisée, ce qui permet en définitive de considérer toute valuation β d'une valeur propre de $A(\epsilon) = A_0 + \mathrm{O}(\epsilon)$ comme le quotient

$$\beta = \frac{\text{valuation d'une colonne de } A(\epsilon) - A_0}{\text{dimension d'un bloc de Jordan de } A_0}.$$

Une technique utilisée systématiquement dans cette étude est une factorisation de perturbation de matrice conduisant à une perturbation de faisceau, dont un cas particulier est couramment utilisé en réduction des systèmes différentiels linéaires [6, 50].

Chapitre 1

Invariants rationnels de perturbations de matrices

Ce chapitre introductif présente, à partir de rappels sur les séries de Puiseux solutions d'une équation algébrique bivariée, les invariants rationnels d'une perturbation de matrice qui permettent une analyse locale du comportement de ses valeurs propres. Cela conduit à une présentation des problèmes abordés par la suite.

Par perturbation de matrice on entend une matrice $A(\epsilon) = A_0 + \epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2 + \ldots$ de séries formelles en la variable ϵ. Lorsque $A(\epsilon)$ est carrée ses valeurs propres admettent au voisinage de $\epsilon = 0$ des développements en séries de Puiseux formelles dont les premiers termes non nuls, appelés termes dominants, ne dépendent que de certains de ses coefficients matriciels $A_0, A_1, A_2, \ldots$. La détermination des termes dominants en fonction de ces matrices constantes est un problème ouvert, important en algèbre linéaire numérique notamment [43, page 47].

Considérons un exemple. Soit

$$A(\epsilon) = \left[\begin{array}{cc|ccc} a\epsilon & 1+f\epsilon & k\epsilon^2 & q\epsilon^2 & v\epsilon \\ b\epsilon & g\epsilon & l\epsilon^2 & r\epsilon^2 & w\epsilon^2 \\ \hline c\epsilon & h\epsilon & m\epsilon^2 & 1+s\epsilon^2 & x\epsilon \\ d\epsilon & i\epsilon & n\epsilon^2 & t\epsilon^2 & 1+y\epsilon \\ e\epsilon & j\epsilon & p\epsilon^2 & u\epsilon^2 & z\epsilon^2 \end{array}\right]$$

en supposant que $a, b, c, \ldots, z$ sont génériques. "Déterminer" signifie ici être capable de déduire de la seule connaissance des éléments de $A(\epsilon)$ que cette perturbation de matrice possède au voisinage de $\epsilon = 0$ deux valeurs propres de la forme $\pm b^{1/2}\epsilon^{1/2} + o(\epsilon^{1/2})$ et trois de la forme $1^{1/3}\alpha^{1/3}\epsilon^{2/3} + \mathrm{o}(\epsilon^{2/3})$ avec $\alpha = p - el/b$. Les termes dominants des cinq valeurs propres de $A(\epsilon)$ ne dépendent donc que des coefficients A_0, A_1 et A_2.

Nous commençons par quelques rappels sur les séries formelles, les perturbations de matrices et surtout la nature de leurs valeurs propres, essentiellement tirés des livres de Kato [37] et de Walker [58] et de la thèse de Duval [19]. On pourra également consulter la thèse de Wall [59]. En général les termes dominants sont des monômes de la forme $\mu\epsilon^{\beta}$ où $\beta \in \mathbb{Q}^{+}$ et où μ appartient à une clôture algébrique du corps K des éléments des coefficients de $A(\epsilon)$. Une formulation du problème des termes dominants à l'aide d'invariants rationnels est cependant possible via la méthode du polygone de Newton [58, 45]: les coefficients dominants μ sont alors définis comme les racines d'un polynôme de $\mathsf{K}[\lambda]$ associé au segment de pente β du polygone de Newton. Une autre formulation rationnelle résulte immédiatement de la première: il s'agit d'identifier les coefficients du polynôme caractéristique $\det(\lambda I - A(\epsilon))$ de $A(\epsilon)$ qui définissent les termes dominants de ses valeurs propres. Ces coefficients, que nous appellerons monômes influents du polynôme caractéristique, sont des monômes de la forme $a\epsilon^{b}\lambda^{c}$ avec $a \in \mathsf{K}$ et $b, c \in \mathbb{N}$.

Partant de ces invariants rationnels, nous posons les questions traitées dans la suite de cette thèse. Il s'agit d'abord de définir de nouveaux sous-ensembles de perturbations de matrices pour lesquelles le problème des termes dominants est résolu. Faute d'apporter une réponse complète, nous cherchons à réduire $A(\epsilon)$ par similitude en ϵ de façon à faire apparaître les monômes influents de son polynôme caractéristique. La forme réduite ainsi obtenue est dite normale si elle est de plus diagonale par blocs. Dans tous les cas, nous nous interdisons d'introduire des puissances de ϵ fractionnaires, contrairement à l'approche classique développée dans des contextes différents par Chen [18] et Bogaevski et Povzner [13]. C'est pourquoi nous parlons de formes réduites et normales rationnelles.

Enfin, une technique de factorisation d'une perturbation de matrice est proposée, qui généralise celle utilisée de façon classique pour la réduction des systèmes différentiels linéaires (voir par exemple [28, 6, 50]). Elle est à la base de plusieurs démonstrations faites dans les chapitres suivants.

On pourra remarquer que nous nous concentrons sur les termes dominants des valeurs propres d'une perturbation de matrice $A(\epsilon)$ quelconque. Nous ne considérons donc ni le calcul des développements de ces valeurs propres à un ordre donné, ni le problème de la détermination des vecteurs propres associés. Des résultats ont été obtenus dans ces deux directions par Lidskii [40], Vishik et Lyusternik [57], Yokoyama et Takeshima [63] *et Eaves, Rothlum et Schneider [20] au prix de conditions restrictives sur $A(\epsilon)$. Ces questions sont également abordées dans les livres de Kato [37] et de Baumgärtel [10].*

1.1 Séries formelles et valuation

Séries formelles, séries de Laurent formelles et valuation

Dans ce document, K désigne un corps de caractéristique nulle, $\overline{\mathsf{K}}$ une clôture algébrique de K, $\mathsf{K}[\lambda]$ l'anneau des polynômes d'indéterminée λ à coefficients dans le corps K, et $\mathsf{K}[[\epsilon]]$ l'anneau des séries formelles d'indéterminée ϵ, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les sommes de la forme $\sum_{i\geq 0} a_i \epsilon^i$ où $a_i \in \mathsf{K}$. Nous noterons

$$\mathsf{F} = \mathsf{K}((\epsilon))$$

le corps des séries de Laurent formelles, défini comme le corps quotient de $\mathsf{K}[[\epsilon]]$. Toute série de Laurent formelle $a(\epsilon)$ s'écrit $a(\epsilon) = \sum_{i\geq v} a_i \epsilon^i$ avec $a_v \neq 0$ et $v \in \mathbb{Z}$.

Nous appellerons **valuation** de $a(\epsilon)$ et nous noterons $\operatorname{val} a(\epsilon)$ l'exposant v du premier terme non nul de $a(\epsilon)$; c'est la plus petite puissance de ϵ dans $a(\epsilon)$. Ainsi, $\operatorname{val} a(\epsilon) \in \mathbb{Z}$ pour tout $a(\epsilon) \in \mathsf{F}\backslash\{0\}$ et on définit $\operatorname{val} 0 = +\infty$.

Remarquons que $\mathsf{K}[[\epsilon]] = \{a(\epsilon) \in \mathsf{F} \,:\, \operatorname{val} a(\epsilon) \geq 0\}$.

On peut étendre de façon naturelle la définition de valuation aux trois cas suivants. La valuation $\operatorname{val} \boldsymbol{a}(\epsilon)$ d'un vecteur $\boldsymbol{a}(\epsilon) \in \mathsf{F}^m$ est le minimum des valuations de ses composantes, et la valuation $\operatorname{val} A(\epsilon)$ d'une matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{m\times n}$ est le minimum des valuations de ses éléments ou encore le minimum des valuations de ses colonnes (ou de ses lignes) considérées comme des vecteurs. Enfin, pour un polynôme $p(\lambda,\epsilon) \in \mathsf{K}[[\epsilon]][\lambda]$ de degré d, on définit $\operatorname{val} p(\lambda,\epsilon)$ comme la valuation du vecteur de $\mathsf{K}[[\epsilon]]^d$ de ses coefficients.

Séries de Puiseux, indice de ramification et valuation

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note $\epsilon^{1/m}$ une racine d'ordre m de ϵ dans une clôture algébrique du corps des fractions $\mathsf{K}(\epsilon)$, choisie telle que $\left(\epsilon^{1/mn}\right)^n = \epsilon^{1/m}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La réunion de tous les corps $\overline{\mathsf{K}}((\epsilon^{1/m}))$ est encore un corps, appelé corps des séries de Puiseux formelles sur $\overline{\mathsf{K}}$. Il est de plus algébriquement clos d'après le théorème de Puiseux [58]. Nous le désignerons comme dans [19] par

$$\overline{\overline{\mathsf{K}}((\epsilon))} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} \overline{\mathsf{K}}((\epsilon^{1/m})).$$

Si $a(\epsilon)$ est une série de Puiseux formelle sur $\overline{\mathsf{K}}$ et si m désigne le plus petit entier positif tel que $a(\epsilon) \in \overline{\mathsf{K}}((\epsilon^{1/m}))$, alors $a(\epsilon)$ est de la forme $a(\epsilon) = \sum_{i\geq l} a_i \epsilon^{i/m}$ avec $a_l \neq 0$, $l \in \mathbb{Z}$.

On appelle m l'**indice de ramification** de $a(\epsilon)$. On définit encore la **valuation** $\operatorname{val} a(\epsilon)$ comme l'exposant - rationnel cette fois - du premier terme non nul de $a(\epsilon)$. C'est donc $\frac{l}{m}$. Notons que les coefficients $a_l, a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots$ d'une série de Puiseux formelle sont a priori dans $\overline{\mathsf{K}}$ et non dans K, contrairement aux séries de Laurent formelles. On a bien sûr $\mathsf{K}[[\epsilon]] \subset \mathsf{F} \subset \overline{\overline{\mathsf{K}}((\epsilon))}$.

Rappelons maintenant deux conséquences du théorème de Puiseux qui seront utilisées au paragraphe 1.3 pour préciser la nature des valeurs propres considérées.

Propriété 1.1 *[58] Soit* $p(\lambda, \epsilon) = a_0(\epsilon)\lambda^n + \ldots + a_{n-1}(\epsilon)\lambda + a_n(\epsilon) \in \mathsf{K}[[\epsilon]][\lambda]$. *Supposons* $a_0(\epsilon)$ *non nul. Alors*

(i) il existe un unique ensemble $\{\lambda_1(\epsilon), \ldots, \lambda_n(\epsilon)\}$ *de séries de Puiseux formelles telles que* $p(\lambda, \epsilon) = a_0(\epsilon) \prod_{k=1}^{n} (\lambda - \lambda_k(\epsilon))$*;*

(ii) si $\operatorname{val} a_0(\epsilon) \leq \operatorname{val} a_i(\epsilon)$ *pour* $1 \leq i \leq n$*, alors* $\operatorname{val} \lambda_k(\epsilon) \geq 0$ *pour* $1 \leq k \leq n$.

Enfin, il est possible de substituer à ϵ la constante nulle dans une série de Puiseux $a(\epsilon)$ pourvu que celle-ci soit de valuation positive ou nulle. Si $\operatorname{val} a(\epsilon) = 0$ alors $a(0) = a_0$; si $\operatorname{val} a(\epsilon) > 0$ alors $a(0) = 0$.

Nous prendrons pour tous les exemples $\mathsf{K} = \mathbb{Q}$ *et* $\overline{\mathsf{K}} = \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$.

1.2 Perturbations de matrices

On appelle **perturbation de matrice** toute matrice de $\mathsf{F}^{m \times n}$ de valuation positive ou nulle. Ce sont en fait les matrices de $\mathsf{K}[[\epsilon]]^{m \times n}$. Elles sont donc de la forme

$$A(\epsilon) = \sum_{i \geq 0} A_i \epsilon^i\ ,\ \ A_i \in \mathsf{K}^{m \times n}.$$

En écrivant $A(\epsilon) = A_0 + \mathrm{O}(\epsilon)$, la matrice $A(\epsilon)$ apparaît clairement comme une perturbation d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$ de la matrice constante A_0. La matrice A_0, lorsqu'elle est non nulle, est appelée **matrice non perturbée** de $A(\epsilon)$. De la même façon, on appellera **perturbation de matrice polynomiale** la matrice $A(\lambda, \epsilon) = \sum_{i \geq 0} A_i(\lambda)\epsilon^i$ où $A_i(\lambda) \in \mathsf{K}[\lambda]^{m \times n}$. Les perturbations de matrices polynomiales de degré 1 sont appelées **perturbations de faisceaux**. Nous les désignerons généralement par $C(\epsilon) - \lambda D(\epsilon)$. On parlera de **perturbations génériques** lorsque les coefficients de la série matricielle en ϵ, qu'ils soient constants ou polynomiaux, sont génériques.

Enfin, on appelle **orbite** d'une matrice $A \in \mathsf{K}^{n \times n}$ l'ensemble

$$\mathcal{O}(A) \equiv \{P^{-1}AP\ :\ P \in \mathsf{K}^{n \times n}\ ,\ \det P \neq 0\}$$

des matrices semblables à A. Si $A, B \in \mathsf{K}^{n\times n}$ sont semblables, on notera $A \sim B$. Comme F est un corps et que $\mathsf{K}[[\epsilon]]$ n'en est pas un, le fait de voir une perturbation de matrice carrée $A(\epsilon)$ comme un élément de $\mathsf{F}^{n\times n}$ permettra, en particulier, de chercher à minimiser une fonction de $A(\epsilon)$ sur son orbite $\mathcal{O}(A(\epsilon))$.

Notons enfin qu'une matrice de passage $P(\epsilon)$ dans $\mathsf{F}^{n\times n}$ pourra toujours être supposée dans $\mathsf{K}[[\epsilon]]^{n\times n}$. En effet, si $v = \operatorname{val} P(\epsilon)$ alors $\operatorname{val} P^{-1}(\epsilon) = -v$ et il suffit de remplacer $P(\epsilon)$ par $\epsilon^{-v}P(\epsilon)$.

Nous nous limiterons désormais aux perturbations de matrices carrées en vue d'une étude locale de leurs valeurs propres.

1.3 Polynôme caractéristique et valeurs propres

Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice carrée. Le polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$ est $p(\lambda,\epsilon) = \det(\lambda I - A(\epsilon))$. C'est un polynôme de degré n, à coefficients dans $\mathsf{K}[[\epsilon]]$. Nous l'écrirons

$$p(\lambda,\epsilon) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\epsilon)\lambda^{n-i}$$

où, pour tout $a_i(\epsilon)$ non nul,

$$a_i(\epsilon) = \hat{a}_i\epsilon^{\alpha_i} + \mathrm{o}(\epsilon^{\alpha_i}), \quad \hat{a}_i \in \mathsf{K}\backslash\{0\}, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}.$$

Par définition, $a_0(\epsilon) = 1$.

Termes dominants des valeurs propres

Les valeurs propres de $A(\epsilon)$ sont par définition les solutions de l'équation caractéristique $p(\lambda,\epsilon) = \det(\lambda I - A(\epsilon)) = 0$. La matrice $A(\epsilon)$ possède n valeurs propres $\lambda_1(\epsilon), \ldots, \lambda_n(\epsilon)$ dans $\overline{\overline{\mathsf{K}((\epsilon))}}$ d'après la première conséquence du théorème de Puiseux (propriété 1.1(i)). En rappelant que le coefficient $a_0(\epsilon)$ de $p(\lambda,\epsilon)$ associé à λ^n vaut 1, on déduit que la factorisation de $p(\lambda,\epsilon)$ sur $\overline{\overline{\mathsf{K}((\epsilon))}}[\lambda]$ est $p(\lambda,\epsilon) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k(\epsilon))$. De plus, la valuation de chacun des $\lambda_k(\epsilon)$ est positive ou nulle (propriété 1.1(ii)). Cela signifie que les valeurs propres de $A(\epsilon)$ sont continues en $\epsilon = 0$. En notant $\lambda_{k0} = \lambda_k(0)$, on obtient alors les n développements en séries de Puiseux formelles

$$\lambda_k(\epsilon) = \lambda_{k0} + \lambda_{k1}\epsilon^{1/m_k} + \lambda_{k2}\epsilon^{2/m_k} + \cdots, \quad k = 1, \ldots, n,$$

où m_k est l'indice de ramification de $\lambda_k(\epsilon)$ et où $\lambda_{kl} \in \overline{\mathsf{K}}$ pour $l = 0, 1, 2, \ldots$. Les termes constants λ_{k0} sont bien sûr les valeurs propres de la matrice non perturbée A_0.

Définition 1.1 [45] *On appelle* **terme dominant** *de la valeur propre $\lambda_k(\epsilon)$ le monôme $\lambda_{kl_k}\epsilon^{\frac{l_k}{m_k}}$ où l_k est le plus petit indice tel que $\lambda_{kl_k} \neq 0$. Le rationnel positif ou nul $\frac{l_k}{m_k}$ est appelé* **exposant dominant** *ou* **valuation** *de la valeur propre $\lambda_k(\epsilon)$; le* **coefficient dominant** *associé est $\lambda_{kl_k} \in \overline{\mathsf{K}}\backslash\{0\}$.*

Les termes dominants décrivent donc le comportement asymptotique des valeurs propres au voisinage de $\epsilon = 0$. Cependant, ils n'indiquent généralement pas les indices de ramification. En effet, dès que $\gcd(l_k, m_k) \neq 1$ le dénominateur de l'exposant dominant est inférieur à l'indice de ramification. Nous reviendrons sur ce point avec la notion de cycle, rappelée plus loin.

Nous noterons désormais pour $k = 1, \ldots, n$

$$\mu_k = \lambda_{kl_k}, \quad \beta_k = \frac{l_k}{m_k}.$$

Quitte à renuméroter les β_k et en posant $M = \lfloor \beta_1 \rfloor$ et $N = \lceil \beta_n \rceil$ on a

$$0 \leq M \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_n \leq N. \tag{1.1}$$

Ces exposants dominants seront regroupés par valeurs égales au paragraphe 1.4.

Dans le cas d'une valeur propre de $A(\epsilon)$ nulle, l'exposant dominant est infini. Nous faisons donc l'hypothèse naturelle suivante.

Hypothèse 1.1 *Les perturbations de matrices $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ considérées sont inversibles.*

Le problème de perturbations pour les valeurs propres ("eigenvalue perturbation problem" (voir par exemple [43, 42])) s'énonce alors de la façon suivante.

Problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$) Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice. Exprimer les termes dominants des n valeurs propres de $A(\epsilon)$ en fonction de ses coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$.

C'est un problème important en algèbre linéaire numérique et ses applications, où l'on considère en général une perturbation linéaire $A(\epsilon) = A_0 + \epsilon A_1$ d'une matrice $A_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$. En effet, sa solution indique en particulier la sensibilité aux perturbations des valeurs propres de A_0. Plus précisément: en modélisant par ϵA_1 une erreur d'arrondi commise sur une matrice donnée A_0, quel est l'effet de cette perturbation d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$ sur les valeurs propres de A_0? Bien qu'il n'existe pas, à notre connaissance, de réponse complète à cette question, tout dépend évidemment de A_0 et de A_1.

Une première classification peut être faite à partir de la géométrie de A_0.

1. Si A_0 est inversible, le problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$) a une solution triviale: les termes dominants des valeurs propres de $A(\epsilon)$ sont les valeurs propres de A_0. Par conséquent, une erreur commise sur A_0 n'a aucun effet sur les termes dominants de ses valeurs propres.

2. Lorsque la valeur propre nulle de A_0 est semi-simple, c'est-à-dire lorsque la structure de Jordan qui lui est associée dans A_0 n'a que des blocs de dimension 1, les valeurs propres $\lambda_k(\epsilon)$ de $A(\epsilon)$ telles que $\lambda_k(0) = 0$ ont toutes un indice de ramification égal à 1. Ce résultat classique (voir par exemple le livre de Wilkinson [61, §2.17-2.18]) entraîne que les valeurs propres de $A(\epsilon)$ ne varient pas plus, au voisinage de $\epsilon = 0$, que l'ordre de la perturbation appliquée à A_0. En revanche, cela ne résout pas le problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$) dans la mesure où les valeurs des exposants dominants et des coefficients dominants demandent à être déterminées.

3. Dès que la valeur propre nulle de A_0 a une multiplicité géométrique inférieure à sa multiplicité algébrique, c'est-à-dire dès que sa structure de Jordan associée possède au moins un bloc de dimension au moins 2, l'ordre des valeurs propres $\lambda_k(\epsilon)$ telles que $\lambda_k(0) = 0$ peut alors dépasser $\mathrm{O}(\epsilon)$ largement. Un exemple classique ([61, §2.2], [26, §7.2.3]) consiste à prendre pour A_0 le bloc de Jordan nilpotent d'ordre n et à supposer A_1 générique. On sait alors que l'unique valeur propre nulle de A_0 "se disperse" sous l'effet de la perturbation ϵA_1 en n valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{1/n})$. Dans [40], Lidskii généralise cette observation au cas d'une structure de Jordan quelconque pour A_0. De plus, il définit à partir de cette structure des conditions suffisantes sur A_1, vérifiées génériquement, pour que le problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$) soit résolu. Dans [45], Moro, Burke et Overton apportent une réponse pour certains cas particuliers ne vérifiant pas les conditions de Lidskii.

Une seconde classification a été initiée par Ma et Edelman dans [43], basée sur le caractère creux de la matrice A_1. Comme dans l'exemple du paragraphe 3 ci-dessus, A_0 est supposée égale à 0^n. Une façon d'empêcher l'apparition de valeurs propres d'ordre

$\mathrm{O}(\epsilon^{1/n})$ consiste à imposer à A_1 une structure de type k-Hessenberg supérieure. En notant $n = pk + r$ la division euclidienne de n par k, on aura alors au pire pk valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{1/k})$ et r valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{1/r})$. De plus, des conditions sur les éléments de A_1, génériquement satisfaites, peuvent être données, qui suffisent à résoudre le problème des termes dominants. Quelques cas particuliers sont également considérés lorsque tous les blocs de Jordan nilpotents de A_0 ont la même dimension.

Cycles et périodes

En général - c'est-à-dire dès qu'une des valeurs propres a un indice de ramification supérieur à 1 -, une représentation plus fine de l'ensemble $\{\lambda_1(\epsilon), \ldots, \lambda_n(\epsilon)\}$ est possible. (Voir par exemple [19] et [37].) En effet, si ω_k désigne une racine k-ième de l'unité dans $\overline{\mathsf{K}}$ alors les séries $\lambda_k(\omega_{m_k}^{lm_k}\epsilon)$, $l = 0, \ldots, m_k - 1$, forment m_k racines distinctes de $p(\lambda, \epsilon) \in \overline{\overline{\mathsf{K}}((\epsilon))}[\lambda]$. Or, il existe une relation d'équivalence pour laquelle ces m_k développements sont équivalents, ce qui permet de partitionner l'ensemble $\{\lambda_1(\epsilon), \ldots, \lambda_n(\epsilon)\}$ en g classes d'équivalence avec $g \leq n$. Ainsi $n = m_1 + \ldots + m_g$ et les valeurs propres de $A(\epsilon)$, à une renumérotation près, peuvent être regroupées de la façon suivante

$$\{\lambda_1(\epsilon), \ldots, \lambda_{m_1}(\epsilon)\}\,,\ \{\lambda_{m_1+1}(\epsilon), \ldots, \lambda_{m_1+m_2}(\epsilon)\}\,,\ \ldots,\ \{\lambda_{n-m_g+1}(\epsilon), \ldots, \lambda_n(\epsilon)\}.$$

En renommant $\lambda_{kh}(\epsilon)$ les m_k éléments de la k-ième classe d'équivalence, on peut décrire les n valeurs propres de $A(\epsilon)$ par

$$\lambda_{kh}(\epsilon) = \lambda_{k0} + \lambda_{k1}\omega_{m_k}^{h}\epsilon^{1/m_k} + \lambda_{k2}\omega_{m_k}^{2h}\epsilon^{2/m_k} + \ldots, \quad h = 0, \ldots, m_k - 1\,,$$

où $k = 1, \ldots, g$. Remarquons que les constantes $\lambda_{k0}, \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \ldots$ sont les mêmes pour les m_k valeurs propres $\lambda_{kh}(\epsilon)$, ces dernières n'étant distinguées que par m_k puissances successives d'une racine m_k-ième de l'unité.

Définition 1.2 *[37, page 65] Avec les notations précédentes, soit $k \in \{1, \ldots, g\}$. L'ensemble des m_k valeurs propres $\{\lambda_{k0}(\epsilon), \ldots, \lambda_{k,m_k-1}(\epsilon)\}$ est appelé* **cycle de période** *m_k. On appelle* **constante du cycle** *le coefficient dominant λ_{kl_k} commun aux valeurs propres qui le constituent, et* **ordre du cycle** *leur ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{l_k/m_k})$ commun.*

Dans [43, page 51], Ma et Edelman parlent de “ring” pour désigner la même notion.

Bien que la détermination des cycles et de leurs périodes ne soit en général pas possible à l'aide des seuls termes dominants des valeurs propres, il existe plusieurs ensembles de perturbations de matrices pour lesquels les exposants dominants sont exactement les indices de ramification. En particulier, les perturbations telles que les valeurs propres ont un indice de ramification égal à 1, comme les perturbations symétriques et les perturbations génériques à profil de valuations fixé (chapitre 3). C'est aussi le cas des perturbations génériques d'une forme de Jordan nilpotente (chapitre 4) et de leur généralisation (chapitre 5).

Jusqu'à présent, les termes dominants ont été représentés pour $1 \leq k \leq n$ sous la forme $\mu_k \epsilon^{\beta_k}$ avec $\mu_k \in \overline{\mathsf{K}} \backslash \{0\}$ et $\beta_k \in \mathbb{Q}^+$. Les coefficients dominants μ_k peuvent cependant être définis de façon rationnelle comme les racines de certains polynômes de $\mathsf{K}[\lambda]$. L'approche avec le polygone de Newton que nous rappelons au paragraphe suivant conduit naturellement à la définition de tels polynômes et donc à une version rationnelle du problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$).

1.4 Polygone de Newton d'une perturbation de matrice

Rappelons que pour $0 \leq i \leq n$, l'entier naturel α_i désigne la valuation du coefficient

$$a_i(\epsilon) = \hat{a}_i \epsilon^{\alpha_i} + \mathrm{o}(\epsilon^{\alpha_i})$$

de $p(\lambda, \epsilon)$ en λ^{n-i} lorsque ce coefficient est non nul.

Définition 1.3 *[15, 45] Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n \times n}$ une perturbation de matrice. On appelle* **polygone de Newton associé à** *$A(\epsilon)$ et on note $\mathcal{N}$ l'enveloppe convexe inférieure de l'ensemble des points (i, α_i) du plan tels que $a_i(\epsilon)$ soit non nul.*

Le polygone $\mathcal{N}$ est formé d'un nombre fini q de segments de pentes deux à deux distinctes. Pour $j \in \{1, \ldots, q\}$ on note $\mathcal{S}_j$ le j-ième segment de $\mathcal{N}$ et $\frac{v_j}{n_j}$ sa pente, les entiers v_j et n_j étant premiers entre eux. Puisque $\alpha_0 = 0$ est le minimum des α_i, l'origine $(0,0)$ appartient à $\mathcal{N}$; d'autre part, le point (n, α_n) est aussi sur $\mathcal{N}$ car, $A(\epsilon)$ étant supposée non singulière, on a $a_n(\epsilon) \neq 0$. Par conséquent, $\mathcal{N}$ possède au moins un segment ($q \geq 1$) et, quitte à réordonner $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_q$,

$$0 \leq \frac{v_1}{n_1} < \frac{v_2}{n_2} < \ldots < \frac{v_q}{n_q}.$$

Considérons maintenant les points extrémités de chaque segment de $\mathcal{N}$. Pour $j \in \{1, \ldots, q\}$ soient $\mathcal{P}_{j-1}$ et $\mathcal{P}_j$ les deux extrémités de $\mathcal{S}_j$. On a bien sûr $\mathcal{P}_0 = (0,0)$ et $\mathcal{P}_q = (n, \alpha_n)$. Plus précisément, pour $j = 1, \ldots, q$,

$$\mathcal{P}_j = (x_j, y_j), \quad x_j = r_1 n_1 + \ldots + r_j n_j, \quad y_j = r_1 v_1 + \ldots + r_j v_j.$$

Appelons **longueur** (resp. **hauteur**) d'un segment la longueur de sa projection sur l'axe des abscisses (resp. des ordonnées). Comme chacun des $\mathcal{P}_j$ a par définition des coordonnées entières, la longueur de $\mathcal{S}_j$ est un multiple du dénominateur n_j de sa pente. On associe ainsi à chaque segment $\mathcal{S}_j$ un entier positif r_j tel que $r_j n_j$ soit sa longueur. Par conséquent,

$$r_1 n_1 + r_2 n_2 + \ldots + r_q n_q = n.$$

L'ensemble des n_j répétés r_j fois forment donc une partition entière du rang de $A(\epsilon)$, qui ici vaut n, et l'ensemble des q triplets (r_j, v_j, n_j) définit complètement le polygone de Newton associé à $A(\epsilon)$.

Enfin, les points de $\mathcal{S}_j$ non nécessairement situés à ses extrémités seront notés

$$\mathcal{P}_j^k = (x_j^k, y_j^k)\,, \quad x_j^k = x_{j-1} + k n_j\,, \quad y_j^k = y_{j-1} + k v_j\,, \quad 0 \leq k \leq r_j.$$

Le nombre de ces points intermédiaires est bien sûr au plus égal à $r_j + 1$ et on retrouve $\mathcal{P}_{j-1} = \mathcal{P}_j^0$ et $\mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j^{r_j}$ pour les deux extrémités. De plus, il existe une relation simple exprimant l'ordonnée de $\mathcal{P}_j^k$ en fonction de son abscisse. En effet, l'application $(\lambda, \epsilon) \rightarrow (\lambda\epsilon^{v_j}, \epsilon^{n_j})$ transforme $p(\lambda, \epsilon)$ en $p(\lambda\epsilon^{v_j}, \epsilon^{n_j})$. Comme $(y_j - y_{j-1})/(x_j - x_{j-1}) = v_j/n_j$, le segment $\mathcal{S}_j$ d'extrémités $\mathcal{P}_{j-1}$ et $\mathcal{P}_j$ est alors transformé en un segment de pente nulle, dont les points sont (x_j^k, y) avec $y = n_j y_j^k + v_j(n - x_j^k)$. Tous les autres segments étant transformés en des segments de pente soit négative soit positive, on a aussi $y = \operatorname{val} p(\lambda\epsilon^{v_j}, \epsilon^{n_j})$. Finalement

$$y_j^k = \frac{\operatorname{val} p(\lambda\epsilon^{v_j}, \epsilon^{n_j}) - v_j(n - x_j^k)}{n_j}\,, \quad 0 \leq k \leq r_j. \tag{1.2}$$

Cette égalité sera utilisée à plusieurs reprises aux chapitres 2, 3 et 4.

Bien sûr, le polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$ seul suffit à définir le polygone de Newton $\mathcal{N}$ associé à cette matrice. Nous préférons cependant parler de "polygone de Newton associé à une perturbation de matrice" que de "polygone de Newton associé à un polynôme caractéristique" pour deux raisons: le fait que $A(\epsilon)$ n'ait pas de pôle en $\epsilon = 0$ indique d'emblée que $\mathcal{N}$ n'a pas de pente négative et réciproquement; de plus, nous serons amenés aux chapitres 3 et 4 à "comparer" le polygone $\mathcal{N}$ à d'autres polygones qui eux sont définis à partir de caractéristiques de $A(\epsilon)$ non invariantes par similitude, comme son nombre de colonnes d'une valuation donnée, ou, dans le cas d'une matrice non perturbée A_0 nilpotente, le nombre de blocs de Jordan de A_0 d'une taille donnée.

La définition du polygone de Newton adoptée ici est celle proposée par Burke et Overton dans [15] et reprise par Moro, Burke et Overton dans [45], par Ma et Edelman dans [43] et par Ilahi dans [29]. Elle assure que les pentes seront positives ou nulles, contrairement à la définition classique en théorie des équations algébriques ([58],[14, §8.3], [19]), en théorie des singularités [54] et en théorie des perturbations analytiques [10] où l'on dessine les points $(n-i, \alpha_i)$ plutôt que les points (i, α_i). Par ailleurs, plusieurs constructions similaires sont couramment utilisées en calcul formel, dans des contextes différents. Voir par exemple les travaux de Duval [19] sur les équations algébriques, ceux de Jung et Della-Dora [34] sur les séries de Taylor solutions d'équations différentielles ordinaires, ceux de Rebillard [53] sur les séries de Chebyshev solutions d'équations différentielles ordinaires, ceux de Béringer et Jung sur les équations algébriques "généralisées" [12] et les équations algébriques multivariées [11], ceux de Macutan sur les perturbations singulières d'équations différentielles ordinaires [44], ceux d'Hilali et Wazner [28, 27] et de Barkatou et Pflügel [50, 9] sur les systèmes différentiels linéaires. Enfin, le polygone de Newton a également été appliqué à des perturbations de fonctions matricielles par Langer et Najman dans [38] et [39] et à des perturbations singulières de fonctions matricielles par Najman dans [48].

On pourra retenir que dans tous les cas le but est le même: il s'agit de lire sur le polygone en question des informations concernant le comportement asymptotique des solutions de l'équation ou du système d'équations à partir desquels il est construit. Dans notre cas, une telle analyse locale est rendue possible par les deux propriétés 1.2 et 1.3 ci-dessous.

Propriété 1.2 *[58, 15, 45] Le polygone de Newton $\mathcal{N}$ associé à $A(\epsilon)$ possède un segment de longueur $r_j n_j$ et de pente $\frac{v_j}{n_j}$ si et seulement si $A(\epsilon)$ admet $r_j n_j$ valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{v_j/n_j})$.*

En regroupant les exposants dominants de (1.1) par valeurs égales on obtient donc

$$\begin{aligned} 0 \le M \le \beta_1 = \ldots = \beta_{r_1 n_1} &= \frac{v_1}{n_1} \\ < \beta_{r_1 n_1 + 1} = \ldots = \beta_{r_1 n_1 + r_2 n_2} &= \frac{v_2}{n_2} \\ &\vdots \\ < \beta_{r_1 n_1 + \ldots + r_{q-1} n_{q-1} + 1} = \ldots = \beta_{r_1 n_1 + \ldots + r_q n_q} &= \frac{v_q}{n_q} \le N. \end{aligned}$$

De plus, on voit que si la matrice non perturbée A_0 de $A(\epsilon)$ est nilpotente, le polygone de Newton associé à $A(\epsilon)$ n'a que des pentes positives. A ce stade, le dessin du polygone de Newton n'indique que les exposants dominants mais ne donne aucune information sur les coefficients dominants correspondants. Suivant Duval [19, chapitre "Développements de Puiseux rationnels", page 46], on associe à chacun des segments un polynôme, que nous appellerons polynôme (caractéristique) de Newton, défini comme suit.

Définition 1.4 *[19] Soient $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice et $j \in \{1,\dots,q\}$. On appelle* **j-ième polynôme caractéristique de Newton** *associé à $A(\epsilon)$ le polynôme $\phi_j \in \mathsf{K}[\lambda]$ de degré r_j et non nul en 0*

$$\phi_j(\lambda) = \sum_{(i,\alpha_i)\in\mathcal{S}_j} \hat{a}_i \lambda^{\frac{x_j - i}{n_j}}.$$

Comme $i - x_{j-1} \in \{0, n_j, 2n_j, \dots, r_j n_j\}$ pour tout i tel que $(i,\alpha_i) \in \mathcal{S}_j$, $\phi_j(\lambda)$ est bien un polynôme; son degré est $(x_j - x_{j-1})/n_j = r_j$ et, comme $\mathcal{P}_j \in \mathcal{N}$, sa valeur en zéro $\phi_j(0) = \hat{a}_{x_j}$ est non nulle. Les racines des $\phi_j(\lambda)$ conduisent aux coefficients dominants de la façon suivante.

Propriété 1.3 *[58, 15, 45] Soit $j \in \{1,\dots,q\}$. Un ensemble de r_j éléments $\mu_k \in \overline{\mathsf{K}}\backslash\{0\}$ constitue les r_j racines du polynôme $\phi_j(\lambda)$ dans $\overline{\mathsf{K}}$ si et seulement si la matrice $A(\epsilon)$ admet $r_j n_j$ valeurs propres de la forme*

$$\lambda_j^{kl}(\epsilon) = (\mu_j^k)^{1/n_j}\omega_{n_j}^l \epsilon^{v_j/n_j} + \mathrm{o}(\epsilon^{v_j/n_j}), \quad l = 0,\dots,n_j - 1, \quad k = 1,\dots,r_j.$$

Une première formulation rationnelle du problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$) résulte des propriétés 1.2 et 1.3.

Problème 1.2 ($POLY \cdot NEWTON$) Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice. Déterminer le polygone et les polynômes de Newton associés à $A(\epsilon)$ en fonction de ses coefficients $A_0, A_1, A_2, \dots$.

En désignant par $\mu\epsilon^{\beta}$ le terme dominant d'une valeur propre de $A(\epsilon)$, on déduit également des propriétés 1.2 et 1.3 une caractérisation de $\mu\epsilon^{\beta}$ en termes du polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$ à partir des observations suivantes.

1. Certains coefficients $a_i(\epsilon)$ de $p(\lambda,\epsilon)$ n'interviennent pas dans la définition de $\mu\epsilon^{\beta}$.
2. Les autres coefficients ne mettent en jeu que leurs monômes de tête $\hat{a}_i\epsilon^{\alpha_i}$.
3. Ces monômes de tête sont uniquement les $\hat{a}_i\epsilon^{\alpha_i}$ tels que le point (i,α_i) appartienne au segment de pente β du polygone de Newton.
4. Ces monômes sont entièrement caractérisés par la connaissance de l'exposant dominant β, de la somme des longueurs et de celle des hauteurs de tous les segments de pente inférieure à β, et du polynôme de Newton associé au segment de pente β.

D'où la définition suivante ainsi qu'une seconde formulation rationnelle du problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$).

Définition 1.5 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice. On appelle* **coefficients**

influents *du polynôme caractéristique de* $A(\epsilon)$ *les monômes* $\hat{a}_i\epsilon^{\alpha_i}\lambda^{n-i}$ *qui définissent les termes dominants des valeurs propres de* $A(\epsilon)$. *Pour* $j \in \{1,\ldots,q\}$ *les* **monômes influents d'ordre** $\mathrm{O}(\epsilon^{v_j/n_j})$ *sont ceux associés à l'exposant dominant* $\frac{v_j}{n_j}$.

Problème 1.3 ($MON \cdot INFLUENTS$) Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice. Déterminer les monômes influents du polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$ en fonction de ses coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$.

Les monômes λ^n et $\hat{a}_n\epsilon^{\alpha_n}$ sont toujours influents et il y a au moins 2 et au plus r_j+1 monômes influents d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{v_j/n_j})$. De plus, par définition du polynôme caractéristique d'une matrice, l'ensemble des monômes influents n'est fonction que d'un nombre fini de coefficients matriciels A_i de $A(\epsilon)$.

Nous terminons ce paragraphe par deux exemples.

Exemple 1.1 Soient $A_1(\epsilon)$ et $A_2(\epsilon)$ les matrices compagnons définies par les polynômes

$$p_1(\lambda,\epsilon) = \lambda^6 + (3+\epsilon)\,\lambda^5 + \epsilon\lambda^4 + \left(\epsilon+\epsilon^2\right)\lambda^3 + \left(2\,\epsilon^2+\epsilon^4\right)\lambda^2 + \epsilon^3\lambda + \epsilon^5$$

et

$$p_2(\lambda,\epsilon) = \lambda^6 + \left(\epsilon+\epsilon^3\right)\lambda^5 + \epsilon^4\lambda^4 + \left(-3\,\epsilon^2+\epsilon^3\right)\lambda^2 + \epsilon^3\lambda + 2\,\epsilon^3 + \epsilon^4.$$

Dans les deux cas $n = 6$. Les polygones de Newton associés sont représentés figure 1.1.

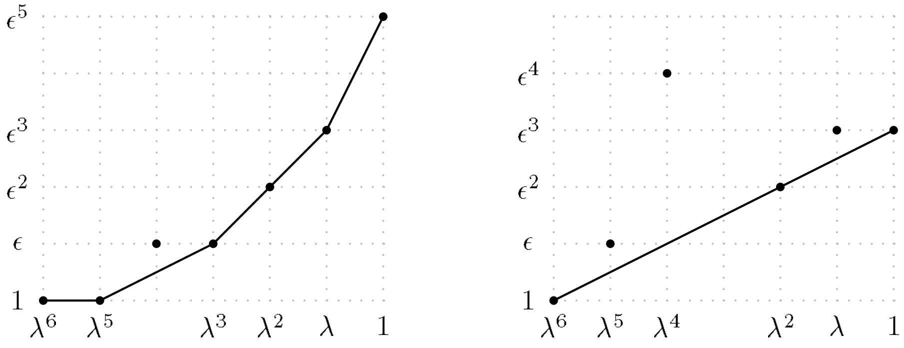


FIG. 1.1 – *Polygones de Newton associés respectivement aux matrices* $A_1(\epsilon)$ *et* $A_2(\epsilon)$ *de l'exemple 1.1.*

Pour $A_1(\epsilon)$, on déduit alors que $q = 4$, $(r_1,v_1,n_1) = (1,0,1)$, $(r_2,v_2,n_2) = (1,1,2)$, $(r_3,v_3,n_3) = (2,1,1)$ et $(r_4,v_4,n_4) = (1,2,1)$. Les quatre polynômes de Newton correspondants sont $\phi_1(\lambda) = \lambda+3$, $\phi_2(\lambda) = \lambda+1$, $\phi_3(\lambda) = (\lambda+1)^2$ et $\phi_4(\lambda) = \lambda+1$. D'après la propriété 1.3, les valeurs propres de la matrice $A_1(\epsilon)$ vérifient donc

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\epsilon) &= -3 + \cdots, \\
\lambda_{2,3}(\epsilon) &= \pm i\epsilon^{\frac{1}{2}} + \cdots, \\
\lambda_{4,5}(\epsilon) &= -\epsilon + \cdots, \\
\lambda_6(\epsilon) &= -\epsilon^2 + \cdots.
\end{aligned}$$

Elles ne forment cependant pas 4 cycles de longueur 1 et un cycle de longueur 2, mais 2 cycles de longueur 1 et 2 cycles de longueur 2. En effet, la suite du développement de $\lambda_4(\epsilon)$ et $\lambda_5(\epsilon)$ donne

$$\lambda_{4,5}(\epsilon) = -\epsilon \pm i\sqrt{2}\epsilon^{\frac{3}{2}} + \cdots.$$

Les monômes influents d'ordre O(1) sont λ^6 et $3\lambda^5$, ceux d'ordre $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ sont $3\lambda^5$ et $\epsilon\lambda^3$, ceux d'ordre $O(\epsilon)$ sont $\epsilon\lambda^3$, $2\epsilon^2\lambda^2$ et $\epsilon^3\lambda$. Enfin, ceux d'ordre $O(\epsilon^2)$ sont $\epsilon^3\lambda$ et ϵ^5.

Le polygone de Newton associé à $A_2(\epsilon)$ n'ayant pas de pente nulle, $A_2(0)$ est nilpotente. De plus $q = 1$ et $(r_1, v_1, n_1) = (3, 1, 2)$. L'unique polynôme de Newton associé est $\phi_1(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$. Par conséquent, les valeurs propres de $A_2(\epsilon)$ vérifient

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2}(\epsilon) &= \pm\epsilon^{\frac{1}{2}} + \cdots, \\
\lambda_{3,4}(\epsilon) &= \pm\epsilon^{\frac{1}{2}} + \cdots, \\
\lambda_{5,6}(\epsilon) &= \pm i\sqrt{2}\epsilon^{\frac{1}{2}} + \cdots.
\end{aligned}$$

Si $\lambda_5(\epsilon)$ et $\lambda_6(\epsilon)$ forment bien un cycle de longueur 2, les quatre autres valeurs propres doivent en revanche être regroupées dans un seul cycle de longueur 4 car elles vérifient

$$\lambda_h(\epsilon) = e^{i\pi h}\epsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}e^{\frac{3i\pi h}{2}}\epsilon^{\frac{3}{4}} + \cdots, \quad h = 1, \ldots, 4,$$

à une permutation près. Par ailleurs, il n'y a que des monômes influents d'ordre $O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$. Ce sont λ^6, $-3\epsilon^2\lambda^2$ et $2\epsilon^3$. $\diamond$

L'approche avec le polygone de Newton exprime donc le problème 1.1 (*TERMES·DOMINANTS*) au moyen d'**invariants rationnels** de $A(\epsilon)$ par similitude: polygone de Newton et polynômes de Newton, ou monômes influents. On peut donc espérer lire ces invariants, sinon sur la matrice $A(\epsilon)$ elle-même - auquel cas le problème des termes dominants serait complètement résolu -, au moins sur une matrice semblable à $A(\epsilon)$. Le paragraphe suivant présente ce point de vue, qui sera adopté tout au long de cette thèse.

1.5 Approche par les formes normales

Partant du problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$) et de ses formulations rationnelles, on dérive naturellement quelques sous-problèmes explicités ci-dessous.

Perturbations génériques, sous-matrices influentes, conditions de régularité
La première question porte sur la résolution du problème des termes dominants lui-même. Nous appellerons **famille de perturbations quasi-génériques** tout ensemble de perturbations de matrices $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ caractérisé par des conditions portant sur un nombre fini d'éléments pris parmi les coefficients A_i de $A(\epsilon)$, génériquement satisfaites et suffisant à la résolution du problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$). Par exemple, l'ensemble des perturbations de matrices dont la matrice non perturbée est inversible forme une famille de perturbations quasi-génériques de façon évidente. Les perturbations de Lidskii, déjà brièvement évoquées, forment aussi une telle famille. Elles n'utilisent cependant que A_0 et A_1. Or, le fait de considérer des perturbations de matrices à coefficients séries formelles autorise la prise en compte de termes de valuation supérieure à 1. Cela conduit au problème suivant.

Problème 1.4 ($PERT \cdot QUASI \cdot GEN$) Identifier des familles de perturbations quasi-génériques dans $\mathsf{F}^{n\times n}$.

Pour expliciter les invariants rationnels de $A(\epsilon)$, on peut chercher à regrouper, en s'inspirant de Lidskii [40, 45], les éléments des coefficients A_i qui les définissent dans des matrices constantes, que nous appellerons **sous-matrices influentes** de $A(\epsilon)$. Chacune des conditions suffisantes caractéristiques de la famille de perturbations quasi-génériques considérée s'exprimera par l'inversibilité d'une sous-matrice influente. On parlera donc de **conditions de régularité**. Soient $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice et $\mathcal{F}$ une famille de perturbations quasi-génériques. Si $A(\epsilon)$ vérifie toutes les conditions de régularité associées à $\mathcal{F}$ alors $A(\epsilon) \in \mathcal{F}$, tous les invariants rationnels peuvent être déterminés à partir de A_0, A_1, A_2, ... et le problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$)est résolu; mais si quelques conditions de régularité seulement sont satisfaites, certains monômes influents restent a priori inconnus.

L'exemple le plus simple est encore celui où A_0 est inversible. Dans ce cas, l'unique sous-matrice influente de $A(\epsilon)$ est A_0 et la condition de régularité associée "$\det A_0 \neq 0$" est vérifiée. Les monômes influents sont les coefficients du polynôme $\det(\lambda I - A_0)$ construit à partir de la sous-matrice influente A_0.

Formes réduites et formes normales rationnelles

Lorsqu'une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ n'appartient à aucune des familles de perturbations quasi-génériques connues, c'est-à-dire si pour chacune d'entre elles au moins une condition de régularité n'est pas vérifiée par $A(\epsilon)$, on peut s'interroger sur la possibilité de transformer $A(\epsilon)$ par similitude en une perturbation quasi-générique. Cela dépend évidemment de la famille considérée:

Soit $\mathcal{F}$ une famille de perturbations quasi-génériques. Toute perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ est-elle semblable à un élément de $\mathcal{F}$?

Ce n'est pas toujours possible. En reprenant l'exemple de la famille $\mathcal{F}_0$ des perturbations de matrices dont la matrice non perturbée est inversible, on voit que si $A(\epsilon)$ possède au moins une valeur propre nulle en $\epsilon = 0$ alors $\mathcal{O}(A(\epsilon)) \cap \mathcal{F}_0 = \emptyset$.

D'une certaine façon, les conditions de régularité de la famille $\mathcal{F}$ considérée peuvent être trop fortes pour qu'une réduction de $A(\epsilon)$ par similitude à un élément de $\mathcal{F}$ soit possible. Il est alors naturel de chercher à mettre en évidence un ensemble de conditions (portant toujours sur un nombre fini de coefficients A_i) qui soient plus faibles que les conditions de régularité mais qui puissent être satisfaites par au moins un élément de $\mathcal{O}(A(\epsilon))$ pour *toute* perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$. Une perturbation de matrice semblable à $A(\epsilon)$ et vérifiant ces nouvelles conditions sera appelée **forme réduite** de $A(\epsilon)$ associée à la famille de perturbations quasi-génériques considérée. Intuitivement, une perturbation de matrice est sous forme réduite lorsqu'elle est "le plus près possible" - en un sens qui sera précisé aux chapitres 3 et 4 - de la famille de perturbations quasi-génériques correspondante. En d'autres termes, lorsque $A(\epsilon)$ est sous forme réduite on peut déterminer à partir de A_0, A_1, A_2, ... "le plus grand nombre possible" de ses invariants rationnels.

Problème 1.5 (*FORME · REDUITE*) Soit $\mathcal{F}$ une famille de perturbations quasi-génériques. Associer à $\mathcal{F}$ une forme réduite.

Notons enfin que si la famille de perturbations quasi-génériques $\mathcal{F}$ est telle que toute perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ est semblable à l'un de ses éléments, toute forme réduite $\tilde{A}(\epsilon)$ de $A(\epsilon)$ est dans $\mathcal{F}$. Par conséquent, *tous* les invariants rationnels de $A(\epsilon)$ peuvent être déterminés à partir de $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots$. C'est le cas idéal. Une telle famille de perturbations quasi-génériques sera proposée au chapitre 5.

Par définition, il existe pour toute perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une matrice $P(\epsilon)$ de séries formelles, inversible, telle que $P^{-1}(\epsilon)A(\epsilon)P(\epsilon)$ soit sous forme réduite. Or, les invariants rationnels de $A(\epsilon)$ étant complètement déterminés par un nombre fini de de ses coefficients A_i, il est possible de réduire $A(\epsilon)$ à l'aide d'une matrice $P(\epsilon)$ polynomiale. Le problème 1.6 ($REDUCTION$) ci-dessous pose la question du calcul d'une telle matrice de passage.

Problème 1.6 ($REDUCTION$) Soient $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice et $\mathcal{F}$ une famille de perturbations quasi-génériques. Calculer une matrice de passage $P(\epsilon) \in \mathsf{K}[\epsilon]^{n\times n}$ telle que $P^{-1}(\epsilon)A(\epsilon)P(\epsilon)$ soit sous forme réduite par rapport à $\mathcal{F}$.

Enfin, une forme réduite n'a a priori aucune structure particulière. Une normalisation plus fine d'une perturbation de matrice $A(\epsilon)$ peut alors consister à diagonaliser par blocs une forme réduite $\tilde{A}(\epsilon)$ de $A(\epsilon)$ en autant de blocs que le nombre de conditions de régularité vérifiées par $\tilde{A}(\epsilon)$. Une telle forme sera appelée **forme normale** de $A(\epsilon)$ par rapport à la famille de perturbations quasi-génériques considérée. Ce n'est pas une forme canonique car il n'y a pas unicité.

Problème 1.7 ($FORME \cdot NORMALE$) Soient $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice et $\mathcal{F}$ une famille de perturbations quasi-génériques. Déterminer une matrice de passage $P(\epsilon) \in \mathsf{K}[[\epsilon]]^{n\times n}$ telle que $P^{-1}(\epsilon)A(\epsilon)P(\epsilon)$ soit sous forme normale par rapport à $\mathcal{F}$.

Les formes réduites et normales que l'on vient d'introduire sont **rationnelles** au sens où leurs coefficents sont des séries formelles et non des séries de Puiseux.

Il existe cependant une forme normale non rationnelle, c'est-à-dire une forme normale contenant des puissance fractionnaires du paramètre ϵ. Elle est décrite par Bogaevski et Povzner dans [13] et peut être vue comme une conséquence directe d'une forme normale non rationnelle proposée antérieurement par Chen [18] dans le cadre de la résolution formelle des systèmes différentiels linéaires dépendant d'un paramètre. Elle a également été reprise par Murdock dans [47].

Il s'agit essentiellement de diagonaliser $A(\epsilon)$ par blocs de plus en plus finement jusqu'à faire apparaître les termes dominants $\mu\epsilon^{\beta}$ des n valeurs propres de $A(\epsilon)$ sur la diagonale d'une matrice semblable à $A(\epsilon)$ dans $\overline{\overline{\mathsf{K}}((\epsilon))}^{n\times n}$. Ce procédé utilise donc nécessairement des matrices de passage dont les coefficients sont des séries de Puiseux formelles et la forme normale $\tilde{A}(\epsilon)$ obtenue à partir de $A(\epsilon)$ est finalement non rationnelle. L'exemple très simple ci-dessous suffit à mettre en évidence le caractère non rationnel de cette forme normale.

Exemple 1.2 Soit la perturbation de matrice

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \epsilon & 0 \end{bmatrix}.$$

En posant $P(\epsilon^{\frac{1}{2}}) = \mathrm{diag}\,(1, \epsilon^{\frac{1}{2}})$, on obtient

$$\hat{A}(\epsilon) = P^{-1}(\epsilon^{\frac{1}{2}})A(\epsilon)P(\epsilon^{\frac{1}{2}}) = \epsilon^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La forme de Jordan de la matrice non perturbée de $\epsilon^{-\frac{1}{2}}\hat{A}(\epsilon)$ étant $\mathrm{diag}\,(-1, 1)$, cela donne finalement la forme normale

$$\tilde{A}(\epsilon) = \begin{bmatrix} -\epsilon^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \epsilon^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

qui est bien sûr non rationnelle. $\diamond$

Notre but est au contraire de normaliser $A(\epsilon)$ sans avoir à introduire de puissances fractionnaires du paramètre. Nous ne détaillons donc pas la normalisation non rationnelle de Chen / Bogaevski et Povzner. Nous n'en rappelons que le point de départ, un lemme de décomposition dû à Wasow [60].

Lemme 1.1 *[60] Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice. Si*

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_0^{11} & O \\ O & A_0^{22} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

est telle que les blocs A_0^{11} et A_0^{22} n'ont aucune valeur propre en commun, alors il existe une perturbation $P(\epsilon)$ de l'identité telle que la matrice $\tilde{A}(\epsilon) = P^{-1}(\epsilon)A(\epsilon)P(\epsilon)$ soit diagonale par blocs, de même structure par blocs que A_0.

Ce résultat permet au moins en théorie de se ramener au cas d'une matrice non perturbée A_0 nilpotente. Nous l'utiliserons en particulier au chapitre 2 pour décrire une première forme normale rationnelle.

1.6 Factorisation d'une perturbation de matrice

Nous terminons ce premier chapitre avec un lien entre perturbations de matrices et perturbations de faisceaux. L'approche consistant à étudier une perturbation de faisceau définie par une factorisation appropriée d'une perturbation de matrice $A(\epsilon)$ plutôt que $A(\epsilon)$ est particulièrement utilisée par Pflügel [50]. Elle apparaît déjà dans [28] et [6]. Nous la présentons ici dans un cadre plus général. Elle sera utilisée aux chapitres 2, 3 et 4.

Un faisceau de matrices $C - \lambda D \in \mathsf{K}[\lambda]^{n\times n}$ est dit **régulier** lorsque $\det(C - \lambda D) \neq 0$.

Lemme 1.2 *Soient a un entier et b un entier positif premier avec a. Supposons que la matrice $A(\epsilon^b) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ se factorise sous la forme $A(\epsilon^b) = \epsilon^a L^{-1}(\epsilon)C(\epsilon)R^{-1}(\epsilon)$ et que ni $C(\epsilon)$ ni $D(\epsilon) = L(\epsilon)R(\epsilon)$ n'ont de pôle en $\epsilon = 0$. Supposons de plus que le faisceau $C_0 - \lambda D_0$ est régulier. Alors μ est une racine de $\det(C_0 - \lambda D_0)$ de multiplicité m si et seulement si la matrice $A(\epsilon)$ admet mb valeurs propres vérifiant*

$$\lambda^{kl}(\epsilon) = \mu^{1/b}\omega_b^l \epsilon^{a/b} + \mathrm{o}(\epsilon^{a/b})\,, \quad k = 1, \ldots, m\,, \quad l = 0, \ldots, b-1.$$

Preuve. Comme $\gcd(a, b) = 1$, les ensembles $\{w_b^{al}\}_{0\leq l\leq b-1}$ et $\{w_b^l\}_{0\leq l\leq b-1}$ coïncident. On vérifie de plus facilement que

$$\det(\lambda I - A(\epsilon^b)) = (-1)^n \epsilon^{an} \det D^{-1}(\epsilon) \det(C(\epsilon) - \lambda\epsilon^{-a} D(\epsilon)). \tag{1.4}$$

Par conséquent, les valeurs propres de $C(\epsilon) - \lambda D(\epsilon)$ sont celles de $A(\epsilon^b)$ mutlipliées par ϵ^{-a}. Comme $C(\epsilon) - \lambda D(\epsilon)$ est par hypothèse une perturbation du faisceau régulier $C_0 - \lambda D_0$, on sait [10, théorème 1 p.351] que les valeurs propres finies de $C_0 - \lambda D_0$ définissent les termes de premier ordre des valeurs propres finies de $C(\epsilon) - \lambda D(\epsilon)$, ce qui permet de conclure. $\square$

Définition 1.6 *Avec les notations et sous les hypothèses du lemme précédent, on appelle* **factorisation d'ordre** $\mathrm{O}(\epsilon^{a/b})$ *l'écriture $A(\epsilon^b) = \epsilon^a L^{-1}(\epsilon)C(\epsilon)R^{-1}(\epsilon)$, et* **polynôme quasi-Newton d'ordre** $\mathrm{O}(\epsilon^{a/b})$ *le polynôme non nul*

$$\theta_{a/b}(\lambda) = \det(C_0 - \lambda D_0).$$

Si $\frac{a}{b}$ n'est égal à aucun des exposants dominants $\frac{v_j}{n_j}$ alors $\theta_{a/b}(\lambda)$ est un monôme en λ et il n'y a aucun monôme influent d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{a/b})$. Le cas échéant, la connaissance supplémentaire des cordonnées d'un des points du segment $\mathcal{S}_j$ tel que $\frac{a}{b} = \frac{v_j}{n_j}$ est nécessaire.

En effet, en termes de polygone de Newton, $\theta_{a/b}(\lambda)$ indique la pente et la longueur du segment $\mathcal{S}_j$ ainsi que les coefficients $\hat{a}_i$ du polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$ qui définissent le j-ième polynôme de Newton. Il reste cependant à "positionner" $\mathcal{S}_j$ en fixant un de ses points. Cela permet de déterminer les puissances ϵ^{α_i} et λ^{n-i} qui, combinées à la constante $\hat{a}_i$, définissent les monômes influents $\hat{a}_i\epsilon^{\alpha_i}\lambda^{n-i}$ d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{v_j/n_j})$. On peut donc par exemple chercher à expliciter les coordonnées de $\mathcal{P}_{j-1}$, le premier point de $\mathcal{S}_j$. Le théorème 1.1 ci-dessous donne une condition suffisante sur la matrice $D(\epsilon)$ de la factorisation d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{a/b})$ considérée pour expliciter, au signe près, les monômes influents dès que les coordonnées x_{j-1} et y_{j-1} du point $\mathcal{P}_{j-1}$ sont connues. Nous montrerons aux chapitres 2 et 3 comment déterminer le signe ainsi que x_{j-1} et y_{j-1} à partir d'invariants de la matrice $A(\epsilon)$.

Théorème 1.1 *Soient $j \in \{1, \dots, q\}$ et $\frac{v_j}{n_j}$ un exposant dominant pour les valeurs propres de $A(\epsilon)$. On suppose connue une factorisation d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{v_j/n_j})$ telle que $\det D(\epsilon)$ soit un monôme unitaire. Si $\sharp_j$ désigne la multiplicité de la racine nulle de $\theta_{v_j/n_j}(\lambda)$ alors*

$$(-\lambda)^{-\sharp_j}\theta_{v_j/n_j}(\lambda) = (-1)^{\sharp}\phi_j(\lambda)\,, \quad \sharp \in \{0, 1\}. \tag{1.5}$$

Si de plus on note $\sum_{k=0}^{r_j} c_{jk}\lambda^{r_j-k}$ le polynôme défini par (1.5) alors les monômes influents d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{v_j/n_j})$ sont les monômes non nuls de la forme

$$(-1)^{\sharp}c_{jk}\epsilon^{y_{j-1}+kv_j}\lambda^{n-x_{j-1}-kn_j}\,, \quad 0 \leq k \leq r_j. \tag{1.6}$$

Preuve. Comme $\theta_{v_j/n_j}(\lambda) = \det(C_0 - \lambda D_0)$ possède au moins une racine non nulle, on déduit du lemme 1.2 que $(-\lambda)^{-\sharp_j}\theta_{v_j/n_j}(\lambda)$ est égal au j-ième polynôme de Newton à une constante près. D'après l'équation (1.4), cette constante vaut ± 1. Les termes constants $\hat{a}_i$ des monômes influents sont donc connus. Pour déterminer les puissances ϵ^{α_i} et λ^{n-i} correspondantes, il suffit de rappeler que tous les points appartenant au segment $\mathcal{S}_j$ associé à $\phi_j(\lambda)$ ont des coordonnées de la forme $(x_{j-1} + kn_j, y_{j-1} + kv_j)$ avec $0 \leq k \leq r_j$, et qu'à l'abscisse x correspond le monôme λ^{n-x}. $\square$

Nous utiliserons différentes matrices $L(\epsilon)$ et $R(\epsilon)$ selon que l'on veut séparer des colonnes d'après leurs valuations ou des blocs de Jordan d'après leurs dimensions.

En pratique, nous choisissons a priori deux matrices $L(\epsilon)$ et $R(\epsilon)$ diagonales de monômes unitaires dont nous déduisons $D(\epsilon) = L(\epsilon)R(\epsilon)$ puis $C(\epsilon) = \epsilon^{-a}A(\epsilon)D(\epsilon)$. Dans les chapitres 2 et 3, nous considérons le cas où $b = 1$ et $L(\epsilon) = I$. Ainsi, $A(\epsilon) = \epsilon^a C(\epsilon)D^{-1}(\epsilon)$ et seules les valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^a)$ avec a entier positif ou nul sont étudiées (en particulier $a = 1$ au chapitre 2). Dans ce contexte, les valuations des colonnes de

$A(\epsilon)$ suffiront à définir $D(\epsilon)$. Une spécialisation du lemme 1.2 duale de la précédente est proposée au chapitre 4. En posant $a = 1$, nous considérons cette fois la factorisation $A(\epsilon^b) = \epsilon L^{-1}(\epsilon)C(\epsilon)R^{-1}(\epsilon)$ en vue de l'étude des valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{1/b})$ avec b entier positif. Si $R(\epsilon)$ est encore définie à partir du profile de valuations de $A(\epsilon)$, la matrice $L(\epsilon)$ est quant à elle déterminée par la structure de Jordan de la matrice non perturbée A_0 de $A(\epsilon)$.

1.7 Plan d'étude

On commence par étudier au chapitre 2 un invariant d'une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ particulièrement important: son rang dominant minimal, c'est-à-dire le rang de sa matrice non perturbée A_0. Cette étude, portant sur la minimisation de cette quantité dans l'orbite de $A(\epsilon)$ et inspirée de travaux de Moser [46], fournit une approche algorithmique qui sera reprise par la suite.

Les problèmes 1.5 $(FORME \cdot REDUITE)$, 1.6 $(REDUCTION)$ et 1.7 $(FORME \cdot NORMALE)$ sont ensuite résolus aux chapitres 3 et 4 pour deux familles de perturbations quasi-génériques: les perturbations quasi-génériques à profil de valuations fixé et les perturbations de Lidskii [40, 45]. Dans les deux cas on procède de la façon suivante. Une famille de perturbations quasi-génériques est identifiée, qui permet la résolution du problème 1.1 $(TERMES \cdot DOMINANTS)$ et de ses deux versions rationnelles 1.2 $(POLY \cdot NEWTON)$ et 1.3 $(MON \cdot INFLUENTS)$. On propose ensuite la définition d'une forme réduite par rapport à cette famille de perturbations quasi-génériques ainsi que trois caractérisations: la première en termes d'optimisation d'une structure associée à la famille considérée, la seconde en termes de polynômes quasi-Newton et la troisième en termes de polygone de Newton. Ces caractérisations conduisent à la résolution des problèmes indiqués ci-dessus.

Une généralisation de la famille des perturbations de Lidskii du chapitre 4 est proposée au chapitre 5, qui non seulement résout le problème 1.1 $(TERMES \cdot DOMINANTS)$ mais permet surtout de résoudre le problème 1.5 $(FORME \cdot REDUITE)$ de la façon la plus satisfaisante possible. On montre en effet que toute perturbation d'une forme de Jordan nilpotente est semblable à une perturbation de Lidskii généralisée. On s'affranchit donc de la restriction sur la nature des valuations des valeurs propres imposée par chacune des formes réduites précédentes.

Enfin, le chapitre 6 décrit des procédures Maple pour les perturbations de matrices.

Chapitre 2

Rang dominant minimal et valuation maximale

On appelle rang dominant d'une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ le rang de sa matrice non perturbée A_0. Ce chapitre est consacré à l'étude de cette quantité et de ses variations dans l'orbite de $A(\epsilon)$. A partir des travaux de Moser [46] sur la réduction de l'ordre d'une singularité d'un système différentiel linéaire, nous cherchons à minimiser le rang dominant de $A(\epsilon)$ sur $\mathcal{O}(A(\epsilon))$.

On propose deux algorithmes de minimisation du rang dominant, inspirés d'un algorithme de réduction des systèmes différentiels linéaires dû à Hilali et Wazner [28]. Le premier calcule une matrice de passage polynomiale transformant $A(\epsilon)$ en une perturbation de matrice $\tilde{A}(\epsilon)$ dont le nombre de colonnes de valuation nulle est égal au rang dominant minimal de $A(\epsilon)$ sur son orbite. Le second, paresseux, fait apparaître le rang dominant minimal de la même façon mais ne calcule que les deux premiers coefficients $\tilde{A}_0$ et $\tilde{A}_1$.

Les trois conséquences détaillées dans ce chapitre sont les suivantes. La minimisation du rang dominant conduit de façon évidente à la maximisation de la valuation de la perturbation de matrice considérée sur son orbite. De plus, nous montrons que l'on construit à partir de $\tilde{A}_0$ et $\tilde{A}_1$ un polynôme quasi-Newton d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$. Cela permet de déterminer les termes dominants de toutes les valeurs propres de $A(\epsilon)$ d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$ en appliquant le lemme 1.2. Grâce à un calcul explicite du rang dominant minimal nous montrons aussi comment déduire tous les monômes influents du polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$ d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$. Enfin, en adaptant un lemme de décomposition de Pflügel [50, 51], nous montrons que $A(\epsilon)$ est semblable dans $\mathsf{F}^{n\times n}$ à une perturbation de matrice diagonale par blocs à partir de laquelle tous les monômes influents d'ordre de la forme $O(\epsilon^{\text{un entier}})$ peuvent être calculés. Cependant la preuve consiste à expliciter une matrice de passage à coefficients séries formelles et à ce stade nous ne disposons pas d'une matrice de passage polynomiale. Ce sera l'objet du chapitre suivant.

En effet, la minimisation du rang dominant présentée dans ce chapitre est fondamentale pour la suite. Nous l'utiliserons surtout au chapitre 3 pour définir une première forme réduite donnant encore les monômes influents d'ordre $O(\epsilon^{\text{un entier}})$ mais associée à une famille de perturbations quasi-génériques et calculée à l'aide d'une matrice de passage polynomiale. (Le problème 1.6 ($REDUCTION$) pour les perturbations de matrices n'ayant que des valeurs propres de valuation entière ne sera donc résolu qu'au chapitre 3.) Elle sera ensuite à la base d'une remarque importante concernant la réduction des perturbations d'une forme de Jordan nilpotente proposée au chapitre 4.

La factorisation d'ordre $O(\epsilon)$ que nous utilisons ici est une adaptation d'un cas classique en réduction des systèmes différentiels linéaires. (Voir par exemple [28], [6] ou [50]). Elle est définie à partir des valuations des colonnes $\boldsymbol{a}_j(\epsilon)$ de $A(\epsilon) = [\boldsymbol{a}_1(\epsilon), \ldots, \boldsymbol{a}_n(\epsilon)]$ par

$$A(\epsilon) = \epsilon C(\epsilon) D^{-1}(\epsilon)\,, \quad D(\epsilon) = \operatorname{diag}\,[\epsilon^{\max(0,1-\operatorname{val}\boldsymbol{a}_j(\epsilon))}]_{1\le j\le n} \tag{2.1}$$

et permet de séparer les colonnes de $A(\epsilon)$ de valuation nulle de celles de valuation positive en marquant d'un $-\lambda$ diagonal toutes les colonnes de $C_0 - \lambda D_0$ issues de colonnes de $A(\epsilon)$ de valuation positive.

Exemple 2.1 Soit

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 2\epsilon & 3\epsilon^2 \\ 4 & 5\epsilon & 6\epsilon^2 \\ 7 & 8\epsilon & 9\epsilon^2 \end{bmatrix}.$$

Alors $D(\epsilon) = \operatorname{diag}[\epsilon, 1, 1]$ et donc

$$C(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\epsilon \\ 4 & 5 & 6\epsilon \\ 7 & 8 & 9\epsilon \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_0 - \lambda D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5-\lambda & 0 \\ 7 & 8 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

◇

Comme $A(\epsilon)$ est semblable à sa transposée $A(\epsilon)^T$, le fait de privilégier les colonnes de $A(\epsilon)$ plutôt que ses lignes n'est pas restrictif.

2.1 Définitions de $\operatorname{minlr} A(\epsilon)$ et $\operatorname{maxval} A(\epsilon)$

Définition 2.1 *Soit* $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$. *Le* **rang dominant** *de* $A(\epsilon)$ *est défini par*

$$\operatorname{lr} A(\epsilon) = \begin{cases} \operatorname{rg} A_0 & si \quad \operatorname{val} A(\epsilon) \geq 0, \\ +\infty & si \quad \operatorname{val} A(\epsilon) < 0. \end{cases}$$

Ainsi, $\operatorname{lr} A(\epsilon) \in \{0, \ldots, n\} \cup \{+\infty\}$ et l'ensemble des rangs dominants des matrices semblables à une perturbation de matrice $n \times n$ admet un unique minimum, compris entre 0 et n.

Exemple 2.2 Les matrices 3×3 et 2×2 ci-dessous illustrent la possibilité de faire varier le rang dominant par similitude. Soient

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \epsilon^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sim \quad \tilde{A}(\epsilon) = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & \epsilon \\ \hline 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 0 \end{array}\right]$$

et

$$A'(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sim \quad \tilde{A}'(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour le premier exemple, le rang dominant de $A(\epsilon)$ est égal à 2 alors que celui de $\tilde{A}(\epsilon)$ vaut 1. Pour le second, $\operatorname{lr} A'(\epsilon) = 1$ et $\operatorname{lr} \tilde{A}'(\epsilon) = 0$. Dans les deux cas le rang dominant décroît strictement par similitude; lorsqu'il s'annule, la valuation croît strictement. $\diamond$

D'autre part, rappelons que pour $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$, sa valuation $\operatorname{val} A(\epsilon)$ est définie comme la plus petite puissance de ϵ apparaissant dans ses éléments. Soient $M, N \in \mathbb{Z}$ définissant la meilleure approximation entière des exposants dominants β_k des valeurs propres de $A(\epsilon)$. On a

$$M \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_n \leq N.$$

La propriété triviale suivante indique que la valuation de toute matrice semblable à $A(\epsilon)$ est majorée par l'entier M.

Propriété 2.1 $\forall B(\epsilon) \in \mathcal{O}(A(\epsilon))$, $\operatorname{val} B(\epsilon) \leq M$.

En revanche, dans $\mathcal{O}(A(\epsilon))$ la valuation peut décroître autant que l'on veut. Par exemple, la matrice 2×2 de l'exemple 2.2 précédent vérifie

$$\begin{bmatrix} 0 & \epsilon^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sim \quad \begin{bmatrix} 0 & \epsilon^{2+i} \\ \epsilon^{-i} & 0 \end{bmatrix} \qquad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent, $\operatorname{val} A(\epsilon) \in]-\infty, \ldots, M] \cap \mathbb{Z}$ et l'ensemble des valuations des matrices semblables à $A(\epsilon)$ admet un unique maximum. D'où la double définition ci-dessous.

Définition 2.2 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice. On appelle* **rang dominant minimal** *de $A(\epsilon)$ l'entier $\operatorname{minlr} A(\epsilon) = \min\{\operatorname{lr} B(\epsilon) \, : \, B(\epsilon) \sim A(\epsilon)\}$. On appelle* **valuation maximale** *de $A(\epsilon)$ l'entier $\operatorname{maxval} A(\epsilon) = \max\{\operatorname{val} B(\epsilon) \, : \, B(\epsilon) \sim A(\epsilon)\}$.*

Le paragraphe suivant présente deux algorithmes de minimisation du rang dominant d'une perturbation de matrice. La maximisation de la valuation sera vue comme une conséquence directe de ces algorithmes au paragraphe 2.3.1.

2.2 Calcul de $\operatorname{minlr} A(\epsilon)$ par similitude polynomiale

2.2.1 Formes échelonnées en lignes et en colonnes

Soit $A \in \mathsf{K}^{m\times n}$ de rang r. Il existe [24, tome 1, §4] une matrice inversible U d'ordre m et une matrice inversible V d'ordre n telles que

$$UA = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times & \times \\ & & & & & & \\ & & & O & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad AV = \begin{bmatrix} \times & & & & & & \\ \times & \times & & & & & \\ \times & \times & & & & & \\ \times & \times & \times & & & O & \\ \times & \times & \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & \times & & & \end{bmatrix}$$

où les $\times$ désignent les r premiers éléments non nuls rencontrés en parcourant les lignes de UA ou les colonnes de AV. En notant j_k l'indice de colonne de $\times$ dans la k-ième ligne non identiquement nulle de UA, et i_k l'indice de ligne de $\times$ dans la k-ième colonne non identiquement nulle de AV, on a

$$1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le n \quad \text{et} \quad 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le m.$$

Nous dirons que UA est une **forme échelonnée en lignes** de A et que AV est une **forme échelonnée en colonnes** de A.

Le rang de A peut donc être lu sur une matrice équivalente à A. Lorsque $m = n$, cela est encore possible en opérant par similitude. Il suffit de considérer les matrices UAU^{-1} et $V^{-1}AV$, semblables à A, dont seules les r premières lignes et colonnes - respectivement

- sont non identiquement nulles. Sur les deux exemples précédents, cela donne

$$UAU^{-1} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ & & & & & & \\ & & & O & & & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & \times & & O & \\ \times & \times & \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & \times & & & \\ \times & \times & \times & \times & & & \end{bmatrix}.$$

La mise sous forme échelonnée en colonnes servira exclusivement à "compresser" les colonnes de valuation 0 d'une perturbation de matrice $A(\epsilon) = A_0 + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$. Il suffit de transformer $A(\epsilon)$ en $\tilde{A}(\epsilon) = V^{-1}A(\epsilon)V$ avec V telle que A_0V soit échelonnée en colonnes. Le nombre de colonnes de valuation 0 de $\tilde{A}(\epsilon)$ est donc égal au rang r de A_0; ces colonnes sont les r premières et sont donc séparées des colonnes de valuation au moins 1.

La réduction selon les lignes se fera parfois sans pivotage de façon à préserver la compression réalisée sur les colonnes de valuation 0. En effet, si $A(\epsilon) \to UA(\epsilon)$ ne modifie pas la structure en colonnes de A_0, la transformation $UA(\epsilon) \to UA(\epsilon)U^{-1}$ peut faire apparaître des colonnes de valuation 0 parmi les $n-r$ dernières. Mais si aucun échange de lignes n'a lieu, aucune colonne ne sera échangée avec une autre par similitude et la compression des colonnes de A_0 sera conservée.

2.2.2 Décroissance stricte du rang dominant

Quitte à échelonner A_0 en colonnes, nous supposons que la matrice $A(\epsilon)$ s'écrit

$$A(\epsilon) = \left[\begin{array}{c||c} A_0^{11} & O \\ \hline\hline A_0^{21} & O \end{array}\right] + \epsilon \left[\begin{array}{c||c} A_1^{11} & A_1^{12} \\ \hline\hline A_1^{21} & A_1^{22} \end{array}\right] + \mathrm{O}(\epsilon^2)\,, \quad A_0^{11} \in \mathsf{K}^{r\times r}\,, \quad r = \mathrm{rg}\, A_0. \tag{2.2}$$

Le nombre de colonnes de $A(\epsilon)$ de valuation nulle η_0 vérifie donc $\eta_0 = r$. De plus, le rang dominant lr $A(\epsilon)$ de $A(\epsilon)$ n'a pas changé, mais dans la factorisation de premier ordre $A(\epsilon) = \epsilon C(\epsilon)D^{-1}(\epsilon)$ définie par (2.1) on a en particulier

$$C_0 = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c||c} A_0^{11} & A_1^{12} \\ \hline\hline A_0^{21} & A_1^{22} \end{array}\right] & \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & \quad n-r \end{array} & \end{array}$$

et $D_0 = \mathrm{Diag}\,[O_r, I_{n-r}]$. Le lemme 2.1 ci-dessous donne une condition de régularité sur C_0 suffisante pour que lr $A(\epsilon)$ soit minimal. Le lemme 2.2 donnera quant à lui une condition suffisante sur C_0 pour que, le cas échéant, on soit capable d'expliciter une transformation de similitude faisant décroître lr $A(\epsilon)$ strictement. Avant d'énoncer ces deux lemmes, nous introduisons les notations $\bar{r}$, $\bar{C}_0$ et $\bar{D}_0$ suivantes.

Nous noterons $\bar{r}$ le plus petit entier compris entre r et n tel que les $n-\bar{r}$ dernières lignes de C_0 forment une matrice triangulaire supérieure stricte. Cela revient à réécrire C_0 sous la forme

$$C_0 = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c||c|c} A_0^{11} & A_1^{12a} & A_1^{12b} \\ \hline\hline A_0^{21a} & A_1^{22a} & A_1^{22b} \\ \hline O & O & A_1^{22d} \end{array}\right] & \begin{array}{c} r \\ \bar{r}-r \\ n-\bar{r} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} r & \bar{r}-r & n-\bar{r} \end{array} & \end{array} \tag{2.3}$$

avec A_1^{22d} triangulaire supérieure stricte. La sous-matrice principale de C_0 d'ordre $\bar{r}$ sera notée $\bar{C}_0$. Ainsi,

$$\bar{C}_0 = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c||c} A_0^{11} & A_1^{12a} \\ \hline\hline A_0^{21a} & A_1^{22a} \end{array}\right] & \begin{array}{c} r \\ \bar{r}-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & \bar{r}-r \end{array} & \end{array} \qquad \text{et} \qquad C_0 = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} \bar{C}_0 & * \\ \hline O & A_1^{22d} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \bar{r} \\ n-\bar{r} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \bar{r} & n-\bar{r} \end{array} & \end{array}.$$

Au pire, la dernière ligne de C_0 n'est pas nulle; dans ce cas, $\bar{r} = n$ et $\bar{C}_0 = C_0$. Par analogie, $\bar{D}_0 = \mathrm{Diag}\,[O_r, I_{\bar{r}-r}]$ est la sous-matrice principale de D_0 d'ordre $\bar{r}$.

La structure particulière de C_0 dans (2.3) a été introduite par Hilali et Wazner ([28], [27]) et reprise dans de nombreux travaux concernant la réduction des systèmes d'équations différentielles linéaires ou aux différences ([6], [7], [4], [50], [8], [9], [5]). Cependant la condition de régularité que nous donnons dans le lemme 2.1 ci-dessous n'apparaît pas dans ces références.

Lemme 2.1 *Si* $\det \bar{C}_0 \neq 0$ *alors alors le rang dominant de* $A(\epsilon)$ *est minimal.*

Preuve. Supposons lr $A(\epsilon)$ non minimal. Il existe alors une matrice $\tilde{A}(\epsilon)$ semblable à $A(\epsilon)$ et telle que lr $\tilde{A}(\epsilon) <$ lr $A(\epsilon)$. Nous pouvons admettre, comme pour $A(\epsilon)$, que lr $\tilde{A}(\epsilon)$ est égal au nombre $\tilde{\eta}_0$ des colonnes non nulles de $\tilde{A}_0$. Ainsi, lr $A(\epsilon) = \eta_0 > \tilde{\eta}_0 =$ lr $\tilde{A}(\epsilon)$. D'autre part, les factorisations $A(\epsilon) = \epsilon C(\epsilon) D^{-1}(\epsilon)$ et $\tilde{A}(\epsilon) = \epsilon \tilde{C}(\epsilon) \tilde{D}^{-1}(\epsilon)$ conduisent à

$$\det(C(\epsilon) - \lambda D(\epsilon)) = \epsilon^{\eta_0 - \tilde{\eta}_0} \det(\tilde{C}(\epsilon) - \lambda \tilde{D}(\epsilon)).$$

D'où, $\tilde{C}(\epsilon) - \lambda \tilde{D}(\epsilon)$ étant sans pôle en $\epsilon = 0$, $\det(C_0 - \lambda D_0) = 0$. Comme A_1^{22d} est triangulaire supérieure cela entraîne $\det(\bar{C}_0 - \lambda \bar{D}_0) = 0$ et en particulier $\mathrm{rg}\,\bar{C}_0 < \bar{r}$. □

Lemme 2.2 *Soit* $\tilde{r} = \mathrm{rg}\,[A_0^{11} \| A_1^{12a}]$. *Si* $\tilde{r} < r$, *c'est-à-dire si les* r *premières lignes de* $\bar{C}_0$ *sont linéairement dépendantes, alors la similitude* $P(\epsilon) = \mathrm{Diag}\,[\epsilon I_r, I_{\tilde{r}-r}, \epsilon I_{n-\tilde{r}}]$ *transforme* $A(\epsilon)$ *en la perturbation de matrice* $\tilde{A}(\epsilon) = P^{-1}(\epsilon)A(\epsilon)P(\epsilon)$ *de rang dominant* $\mathrm{lr}\,\tilde{A}(\epsilon) = \tilde{r} < \mathrm{lr}\,A(\epsilon)$.

Preuve. L'effet de $P(\epsilon)$ est de transformer

$$A(\epsilon) = \left[\begin{array}{c||c|c} A_0^{11} & O & O \\ \hline\hline A_0^{21a} & O & O \\ \hline O & O & O \end{array}\right] + \epsilon \left[\begin{array}{c||c|c} A_1^{11} & A_1^{12a} & A_1^{12b} \\ \hline\hline A_1^{21a} & A_1^{22a} & A_1^{22b} \\ \hline A_1^{21c} & O & A_1^{22d} \end{array}\right] + \mathrm{O}(\epsilon^2)$$

en

$$\tilde{A}(\epsilon) = P^{-1}(\epsilon)A(\epsilon)P(\epsilon) = \left[\begin{array}{c||c|c} A_0^{11} & A_1^{12a} & O \\ \hline\hline O & O & O \\ \hline O & O & O \end{array}\right] + \epsilon \left[\begin{array}{c||c|c} A_1^{11} & * & A_1^{12b} \\ \hline\hline A_0^{21a} & A_1^{22a} & O \\ \hline A_1^{21c} & * & A_1^{22d} \end{array}\right] + \mathrm{O}(\epsilon^2). \quad (2.4)$$

Les * désignent des blocs d'éléments de A_2. □

Ces deux lemmes conduisent à une procédure de décroissance du rang dominant décrite par l'algorithme 2.1 (`LRD`). Son principe est le suivant. On suppose que A_0 est de rang r et que seules ses $n-r$ dernières colonnes sont nulles. La matrice C_0 n'ayant a priori pas de structure particulière, on part avec $\bar{r} = n$ et donc $\bar{C}_0 = C_0$. Si C_0 est singulière, de rang $\bar{r}'$, et si ses r premières lignes sont de plein rang, aucun des deux lemmes 2.1 et 2.2 précédents ne s'applique directement. On exploite alors la singularité de la matrice C_0 en l'échelonnant en lignes de façon à annuler ses $n - \bar{r}'$ dernières lignes. La nouvelle matrice C_0 est donc de la forme (2.3) avec $\bar{r} = \bar{r}' < n$. On recommence avec $\bar{C}_0$, sa sous-matrice principale d'ordre $\bar{r}$, jusqu'à obtenir soit une matrice inversible (lemme 2.1), soit une matrice dont les r premières lignes sont linéairement dépendantes (lemme 2.2).

Proposition 2.1 *La procédure* `LRD` *calcule au moyen d'une matrice polynomiale* $P(\epsilon)$ *inversible de degré au plus* 1 *une matrice* $\tilde{A}(\epsilon)$ *semblable à* $A(\epsilon)$ *telle que* $\mathrm{lr}\,\tilde{A}(\epsilon) \le \mathrm{lr}\,A(\epsilon)$. *Il y a égalité si et seulement si le rang dominant de la matrice* $A(\epsilon)$ *en entrée est minimal.*

Preuve. Montrons que l'algorithme s'arrête après un nombre fini d'étapes (3). Si on trouve une matrice $\bar{C}_0$ dont les r premières lignes sont linéairement dépendantes, c'est terminé. Dans le cas contraire, la dimension de $\bar{C}_0$ décroît à chaque nouvelle itération (voir la

Procédure `LRD [Leading Rank Decrease]`

Entrée: - une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$.

Sortie: - une perturbation de matrice $\tilde{A}(\epsilon) \sim A(\epsilon)$ de rang dominant $\tilde{r} \leq \operatorname{lr} A(\epsilon)$.
- les entiers $r = \operatorname{lr} A(\epsilon)$ et $\tilde{r}$.
- éventuellement, une matrice de passage $P(\epsilon)$ polynomiale (et son inverse).

(1) [Compression des colonnes de A_0 et initialisations]
$A(\epsilon) \leftarrow V^{-1}A(\epsilon)V$ avec A_0V échelonnée en colonnes, de rang r.
si $r = 0$ ou $r = n$, $\tilde{r} \leftarrow r$ et aller en (5).
$\bar{r} \leftarrow n$, $\bar{C}_0 \leftarrow C_0$.

(2) [Calculer le rang des r premières lignes de $\bar{C}_0$]
$P_1 \leftarrow \operatorname{Diag}[U_1, I_{n-r}]$ avec $U_1[A_0^{11}||A_1^{12a}]$ échelonnée en lignes, de rang $\tilde{r}$.
$A(\epsilon) \leftarrow P_1A(\epsilon)P_1^{-1}$.

(3) [Boucle principale]
tant que $\tilde{r} = r$
- (3.1) [Echelonner en lignes, sans pivotage, ce qui reste de $\bar{C}_0$]
  $P_2 \leftarrow \operatorname{Diag}[U_2, I_{n-\bar{r}}]$ avec $U_2\bar{C}_0$ échelonnée en lignes, de rang $\bar{r}'$.
  si $\bar{C}_0$ est de plein rang
    aller en (5)
  sinon
- (3.2) [Calculer une permutation S annulant les dernières lignes de $U_2\bar{C}_0$]
  $P_3 \leftarrow \operatorname{Diag}[I_r, S, I_{n-\bar{r}}]$.
  $A(\epsilon) \leftarrow P_3P_2A(\epsilon)P_2^{-1}P_3^{-1}$.
- (3.3) [Mise à jour de $\bar{r}$ et $\bar{C}_0$]
  $\bar{r} \leftarrow \bar{r}'$.
  $\bar{C}_0 \leftarrow$ la sous-matrice principale de C_0 d'ordre $\bar{r}$.
- (3.4) [Calculer le rang des r premières lignes de $\bar{C}_0$]
  $P_4 \leftarrow \operatorname{Diag}[U_3, I_{n-r}]$ avec $U_3[A_0^{11}||A_1^{12a}]$ échelonnée en lignes, de rang $\tilde{r}$.
  $A(\epsilon) \leftarrow P_4A(\epsilon)P_4^{-1}$.

(4) [Décroissance stricte du rang dominant]
$P_5(\epsilon) \leftarrow \operatorname{Diag}[\epsilon I_r, I_{\bar{r}-r}, \epsilon I_{n-\bar{r}}]$.
$A(\epsilon) \leftarrow P_5^{-1}(\epsilon)A(\epsilon)P_5(\epsilon)$.

(5) [Retourner le résultat]
$\tilde{A}(\epsilon) \leftarrow A(\epsilon)$.
retourner la matrice $\tilde{A}(\epsilon)$ et les entiers r et $\tilde{r}$.

Algorithme 2.1: Décroissance du rang dominant

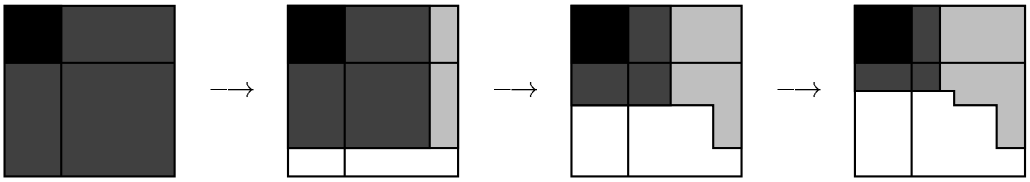


FIG. 2.1 – *Evolution de la structure de la matrice C_0 au fil des passages à l'étape (3) de l'algorithme 2.1 (*`LRD`*). Sa sous-matrice principale d'ordre r est représentée en noir et la matrice $\bar{C}_0$ en gris foncé; tous les éléments en gris clair sont situés strictement au-dessus de la diagonale; les parties blanches désignent des zéros. Au pire, la matrice $\bar{C}_0$ est de taille r (parties noire et gris foncé confondues) et elle est alors inversible.*

figure 2.1). Au pire $\dim \bar{C}_0 = r$. Dans ce cas, $\bar{C}_0$ est inversible car on a $\bar{C}_0 = A_0^{11}$ et $A_0^{21} = 0$. Cela vient du fait que la structure de A_0 obtenue à l'étape (1) en compressant ses colonnes n'est pas détériorée par la suite. Examinons pour cela les étapes (2), (3.1) et (3.2): les opérations élémentaires de l'étape (2) portent toutes sur des lignes et des colonnes d'indice compris entre 1 et r; à l'étape (3.1), on échelonne $\bar{C}_0$ en lignes sans pivotage. Par conséquent, les opérations élémentaires effectuées sont de la forme $R_i \leftarrow R_i - \alpha_{ij} R_j$ et $C_j \leftarrow C_j + \alpha_{ij} C_i$ avec $\alpha_{ij} \in \mathsf{K} \backslash \{0\}$ et $1 \leq i < j$. Les colonnes de $A(\epsilon)$ de valuation 1 ne sont donc jamais modifiées par des colonnes de valuation 0. La structure de A_0 en colonnes est donc inchangée à l'issue de l'étape (3.1); il en est de même à l'étape (3.2) où les lignes et les colonnes permutées sont toutes d'indice compris entre $r+1$ et $\bar{r}$ car les r premières lignes de $\bar{C}_0$ sont linéairement indépendantes. Notons enfin que l'étape (3.4) est identique à l'étape (2).

La matrice de passage $P(\epsilon)$ calculée est alors clairement le produit d'un nombre fini de matrices constantes inversibles et, éventuellement, d'une matrice polynomiale de degré 1 en ϵ.

Enfin, on a $\tilde{r} = r$ en sortie de l'algorithme si et seulement si on a trouvé au cours des itérations de l'étape (3) une matrice $\bar{C}_0$ inversible. Donc $\tilde{r} = r$ entraîne que r est minimal (lemme 2.1); la réciproque est évidente. $\square$

Remarque 2.1 Le rang dominant de $\tilde{A}(\epsilon)$ en sortie de la procédure `LRD` est égal à celui de $P^{-1}(\epsilon)(A(\epsilon) \bmod \epsilon^2)P(\epsilon)$. Il suffit donc de connaître A_0 et A_1 pour en déduire $P(\epsilon)$ et $\operatorname{lr} \tilde{A}(\epsilon)$. Cela conduira à un calcul paresseux du rang dominant minimal au paragraphe suivant.

Remarque 2.2 A l'étape (3.3) il faut reconstruire $C_0 = C_0(A(\epsilon))$ à partir de la matrice $A(\epsilon)$ courante. En effet, si $C_0(P_1 A(\epsilon) P_1^{-1}) = P_1 C_0(A(\epsilon)) P_1^{-1}$ et s'il en est de même pour P_3, on a en revanche $C_0(P_2 A(\epsilon) P_2^{-1}) \neq P_2 C_0(A(\epsilon)) P_2^{-1}$ dès qu'une colonne de valuation 1 est ajoutée à une colonne de valuation 0.

2.2.3 Deux algorithmes de calcul de $\operatorname{minlr} A(\epsilon)$

Calcul d'une perturbation de matrice semblable à $A(\epsilon)$

L'algorithme 2.2 (`MLRF`) ci-dessous est une conséquence directe de l'algorithme 2.1 (`LRD`) de chute du rang. Il suffit d'appliquer la procédure `LRD` jusqu'à ce que le rang dominant soit minimal. On obtient une perturbation de matrice semblable à $A(\epsilon)$.

Algorithme `MLRF [Minimal Leading Rank Form]`
Entrée: - une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$.
Sortie: - une perturbation de matrice $\tilde{A}(\epsilon) \sim A(\epsilon)$ de rang dominant minimal.
- le rang dominant minimal égal à $\tilde{\eta}_0$.
- éventuellement, une matrice de passage $P(\epsilon)$ polynomiale (et son inverse).

(1) [Appeler la procédure `LRD` avec $A(\epsilon)$]
$r \leftarrow \operatorname{lr} A(\epsilon)$, $\tilde{r} \leftarrow \operatorname{lr} \tilde{A}(\epsilon)$, $A(\epsilon) \leftarrow \tilde{A}(\epsilon)$.
(2) recommencer (1) jusqu'à ce que $\tilde{r} = r$.
(3) [Compression des colonnes de A_0]
$A(\epsilon) \leftarrow V^{-1} A(\epsilon) V$ avec $A_0 V$ échelonnée en colonnes, de rang $\tilde{r}$.
(4) [Retourner le résultat]
$\tilde{A}(\epsilon) \leftarrow A(\epsilon)$.
retourner la matrice $\tilde{A}(\epsilon)$ et l'entier $\tilde{r}$.

Algorithme 2.2: Calcul d'une forme réduite de rang dominant minimal

Corollaire 2.1 *L'algorithme* `MLRF` *calcule au moyen d'une matrice polynomiale $P(\epsilon)$ inversible de degré au plus* $\operatorname{rg} A_0$ *une matrice $\tilde{A}(\epsilon)$ semblable à $A(\epsilon)$ de rang dominant minimal, égal à $\tilde{\eta}_0$.*

Calcul du rang dominant minimal seul

Le but ici est de se limiter au calcul des deux premiers termes $\tilde{A}_0$ et $\tilde{A}_1$ de la matrice $\tilde{A}(\epsilon)$ construite par l'algorithme 2.2 (`MLRF`) précédent.

Considérons la première chute de rang. D'après le lemme 2.2, la matrice polynomiale $A(\epsilon) \bmod \epsilon^2 = A_0 + \epsilon A_1$ suffit à définir une matrice de passage $P(\epsilon)$ et $\operatorname{lr}\tilde{A}(\epsilon) \le \operatorname{lr} A(\epsilon)$ mais ne permet de déterminer $\tilde{A}(\epsilon) \bmod \epsilon^2 = \tilde{A}_0 + \epsilon\tilde{A}_1$ que lorsque $\operatorname{lr}\tilde{A}(\epsilon) = \operatorname{lr} A(\epsilon)$, c'est-à-dire lorsque le rang dominant minimal est atteint. En effet, bien que $\tilde{A}_0$ ne dépende que de A_0 et A_1, le terme de premier ordre $\tilde{A}_1$ dépend aussi de A_2 dès que $\operatorname{lr}\tilde{A}(\epsilon) < \operatorname{lr} A(\epsilon)$. (Voir les blocs désignés par * dans l'équation (2.4).) Or, si le rang dominant minimal n'est pas obtenu à l'issue de cette première itération, une deuxième chute de rang devra être tentée, pour laquelle la connaissance de $\tilde{A}_1$ est nécessaire.

En notant $A^{(0)}(\epsilon) = A(\epsilon)$, $A^{(1)}(\epsilon) = \tilde{A}(\epsilon)$ et $P^{(1)}(\epsilon) = P(\epsilon)$, on commence par appeler la procédure `LRD` avec $A^{(0)}(\epsilon) \bmod \epsilon^2$. Cela retourne la matrice polynomiale de degré 2

$$P^{(1)^{-1}}(\epsilon)\left(A_0^{(0)} + \epsilon A_1^{(0)}\right)P^{(1)}(\epsilon) = A_0^{(1)} + \epsilon B_1^{(1)} + \epsilon^2 C_2^{(1)}$$

où en général $B_1^{(1)} \neq A_1^{(1)}$. Pour déterminer $A_1^{(1)}$, on prend en compte $A_2^{(0)}$ en calculant la matrice polynomiale de valuation 1 et de degré 3

$$P^{(1)^{-1}}(\epsilon)\left(\epsilon^2 A_2^{(0)}\right)P^{(1)}(\epsilon) = \epsilon\left(X_2^{(1)} + \epsilon Y_2^{(1)} + \epsilon^2 Z_2^{(1)}\right).$$

Puisque $A_1^{(1)}$ ne dépend que de $A_0^{(0)}$, $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$, on obtient ainsi $A_1^{(1)} = B_1^{(1)} + X_2^{(1)}$.

Comme effet de bord, on obtient de plus de "meilleures approximations"

$$\begin{aligned} & B_2^{(1)} = C_2^{(1)} + Y_2^{(1)} \\ \text{et}\quad & C_3^{(1)} = Z_2^{(1)} \end{aligned}$$

des matrices $A_2^{(1)}$ et de $A_3^{(1)}$ définies respectivement par $A_1^{(0)}$, $A_2^{(0)}$, $A_3^{(0)}$ et par $A_2^{(0)}$, $A_3^{(0)}$, $A_4^{(0)}$. A l'itération suivante, $B_2^{(1)}$ sera complétée afin d'avoir $A_2^{(1)}$, et $C_3^{(1)}$ sera "améliorée" de la même façon que $C_2^{(1)}$. (Les lettres "A", "B", "C" peuvent être vues comme désignant trois niveaux d'approximation de plus en plus grossière de la matrice "A" recherchée.) On conserve donc a priori ces deux quantités. Dans le cas d'une seule itération, elles sont bien sûr superflues.

La i-ième itération ($i \ge 1$) s'écrit de la même façon. Désignons par $A^{(i)}(\epsilon)$ la perturbation de matrice résultant des i premiers appels de la procédure `LRD`. En supposant $A_0^{(i-1)}$ et $A_1^{(i-1)}$ connus, on obtient $P^{(i)}(\epsilon)$ et $A_0^{(i)}$ en appliquant `LRD` à $A^{(i)}(\epsilon) \bmod \epsilon^2$ seulement. On note

$$P^{(i)^{-1}}(\epsilon)\left(A_0^{(i-1)} + \epsilon A_1^{(i-1)}\right)P^{(i)}(\epsilon) = A_0^{(i)} + \epsilon B_1^{(i)} + \epsilon^2 C_2^{(i)}.$$

La détermination de $A_1^{(i)}$ se fait en i étapes (voir la figure 2.2). On suppose connus $A_{i+1}^{(0)}$

et, pour $k = 1, \dots, i$, $B^{(k)}_{i-k+1}$ et $C^{(k)}_{i-k+2}$. Pour $k = 1, \dots, i$, on calcule

$$P^{(k)^{-1}}(\epsilon)\left(\epsilon^{i-k+2}A^{(k-1)}_{i-k+2}\right)P^{(k)}(\epsilon) = \epsilon^{i-k+1}\left(X^{(k)}_{i-k+2} + \epsilon Y^{(k)}_{i-k+2} + \epsilon^2 Z^{(k)}_{i-k+2}\right) \tag{2.5a}$$

et

$$A^{(k)}_{i-k+1} = B^{(k)}_{i-k+1} + X^{(k)}_{i-k+2}\,, \tag{2.5b}$$
$$B^{(k)}_{i-k+2} = C^{(k)}_{i-k+2} + Y^{(k)}_{i-k+2}\,, \tag{2.5c}$$
$$C^{(k)}_{i-k+3} = Z^{(k)}_{i-k+2}. \tag{2.5d}$$

On obtient $A^{(i)}_1$ lorsque $k = i$. Cela conduit finalement à l'algorithme 2.3 (`MLR`).

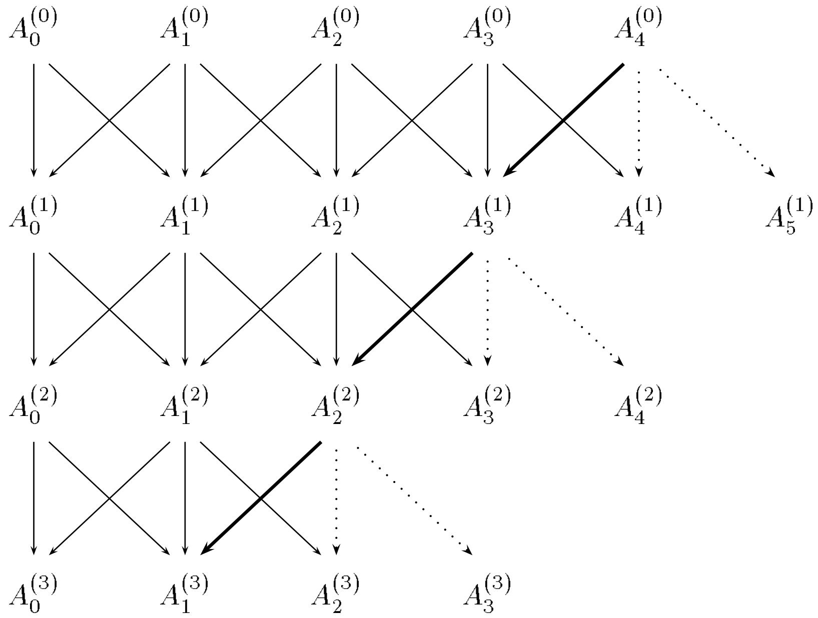


FIG. 2.2 – *Exemple pour $i = 3$ de dépendance de $A^{(i)}$ mod ϵ^2 par rapport aux coefficients des matrices $A^{(0)}(\epsilon), A^{(1)}(\epsilon), \dots, A^{(i-1)}(\epsilon)$ précédentes. Les flèches minces ont pour origine un coefficient qui est connu lorsque $i = 3$ et que $A^{(i)}_1$ n'a pas encore été calculé. L'origine des flèches en gras désigne un coefficient à déterminer; les effets de bord de la prise en compte d'un tel coefficient sont indiqués par les flèches en pointillés. A partir de la deuxième colonne, toute matrice pointée par trois flèches est connue; les autres ne le sont que partiellement: niveau "B" pour une matrice pointée par deux flèches, et niveau "C" pour une matrice pointée par une seule flèche.*

Remarque 2.3 Pour le i-ième appel de la procédure `LRD` on doit disposer de $A^{(i-1)}_0$ et $A^{(i-1)}_1$, et donc des coefficients $A_0, A_1, \dots, A_i$ de la matrice $A(\epsilon)$ de départ. Si le minimum

Algorithme `MLR [Minimal Leading Rank]`

Entrée: - une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$.

Sortie: - les matrices $\tilde{A}_0$ et $\tilde{A}_1$.

- le rang dominant minimal minlr $A(\epsilon)$.

(1) [Initialisations]

$A_0^{(0)}, A_1^{(0)}, \ldots, A_n^{(0)} \leftarrow A(\epsilon) \bmod \epsilon^{n+1}$ et $i \leftarrow 1$.

(2) [Boucle principale]

faire

(2.1) [Appeler la procédure `LRD` sur $A_0^{(i-1)} + \epsilon A_1^{(i-1)}$]

déduire r, $\tilde{r}$, $A_0^{(i)}$, $B_1^{(i)}$, $C_2^{(i)}$, $P^{(i)}(\epsilon)$, $P^{(i)^{-1}}(\epsilon)$.

(2.2) [Déterminer $A_1^{(i)}$]

pour k de 1 à i

déterminer $A_{i-k+1}^{(k)}$, $B_{i-k+2}^{(i)}$, $C_{i-k+3}^{(k)}$ à partir de (2.5).

(2.3) [Le rang dominant minimal est atteint]

si $\tilde{r} = r$

$\tilde{A}_0 \leftarrow A_0^{(i)}$, $\tilde{A}_1 \leftarrow A_1^{(i)}$ et aller en (3)

sinon

(2.4) [Itérer]

$i \leftarrow i + 1$.

(3) [Compression des colonnes de $\tilde{A}_0$]

$\tilde{A}_0 + \epsilon\tilde{A}_1 \leftarrow V^{-1}(\tilde{A}_0 + \epsilon\tilde{A}_1)V$ avec $\tilde{A}_0 V$ échelonnée en colonnes, de rang $\tilde{r}$.

(4) [Retourner le résultat]

retourner l'entier $\tilde{r}$ et les matrices $\tilde{A}_0$ et $\tilde{A}_1$.

Algorithme 2.3: Calcul du rang dominant minimal seul est atteint avec $P^{(i)}(\epsilon)$, on s'arrête et le coefficient A_{i+1} n'a pas à être pris en compte. Comme la minimisation du rang dominant nécessite au plus $\operatorname{rg} A_0 \leq n$ itérations, la première étape de l'agorithme 2.3 (`MLR`) consiste à ne stocker que les coefficients de $A(\epsilon)$ mod ϵ^{n+1}.

Corollaire 2.2 *L'algorithme* `MLR` *calcule* $\tilde{A}_0$ *et* $\tilde{A}_1$ *en utilisant au plus les* $\operatorname{rg} A_0 + 1$ *premiers coefficients de* $A(\epsilon)$*. Le rang dominant minimal de* $A(\epsilon)$ *est* $\tilde{\eta}_0$*.*

2.3 Conséquences

2.3.1 Calcul de $\operatorname{maxval} A(\epsilon)$ par similitude polynomiale

L'algorithme 2.4 (`MVF`) et le corollaire 2.3 ci-dessous découlent immédiatement des algorithmes 2.1 (`LRD`) et 2.2 (`MLRF`) et du corollaire 2.1.

Algorithme `MVF [Maximal Valuation Form]`

Entrée: - une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$.
Sortie: - une perturbation de matrice $\tilde{A}(\epsilon) \sim A(\epsilon)$ et de valuation maximale v,
  telle que $\hat{A}(\epsilon) = \epsilon^{-v}\tilde{A}(\epsilon)$ soit de rang dominant minimal r et $\hat{\eta}_0 = r$.
  - les entiers v et r.
  - éventuellement, une matrice de passage $P(\epsilon)$ polynomiale (et son inverse).

(1) $v \leftarrow 0$.
(2) [Appeler la procédure `LRD` avec $A(\epsilon)$]
  $r \leftarrow \operatorname{lr} A(\epsilon)$, $\tilde{r} \leftarrow \operatorname{lr} \tilde{A}(\epsilon)$, $A(\epsilon) \leftarrow \tilde{A}(\epsilon)$.
(3) tant que $\tilde{r} < r$
  si $\tilde{r} = 0$
    $A(\epsilon) \leftarrow \epsilon^{-1}A(\epsilon)$.
    $v \leftarrow v + 1$.
  recommencer (2).
(4) [Compression des colonnes de A_0]
  $A(\epsilon) \leftarrow V^{-1}A(\epsilon)V$ avec A_0V échelonnée en colonnes, de rang r.
(5) [Retourner le résultat]
  $\tilde{A}(\epsilon) \leftarrow A(\epsilon)$.
  retourner la matrice $\tilde{A}(\epsilon)$ et les entiers v et r.

Algorithme 2.4: Calcul d'une forme réduite de valuation maximale

Corollaire 2.3 *L'algorithme 2.4 (*`MVF`*) calcule au moyen d'une matrice polynomiale* $P(\epsilon)$ *inversible de degré au plus* M *une matrice* $\tilde{A}(\epsilon)$ *semblable à* $A(\epsilon)$ *de valuation maximale* v*, telle que* $\hat{A}(\epsilon) = \epsilon^{-v}\tilde{A}(\epsilon)$ *soit de rang dominant minimal, égal à* $\hat{\eta}_0$*.*

Une version paresseuse basée sur l'algorithme 2.3 (MLR) est également possible. A chaque fois que le rang dominant s'annule, il faut non seulement déterminer $A_1^{(i)}$ mais aussi $A_2^{(i)}$. Sur la figure 2.2, cela se traduit par un décalage d'une colonne vers la droite.

2.3.2 Valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$

La caractérisation du rang dominant minimal proposée ci-dessous permet de déterminer les termes de premier ordre des valeurs propres de $A(\epsilon)$ d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$. On la déduit facilement du lemme 2.1 et de la proposition 2.1 qui sont à la base des algorithmes de minimisation du rang dominant vus précédemment. Elle peut être vue comme un analogue algébrique du critère d'irréductibilité d'un système différentiel linéaire introduit par Moser [46, théorème 1 page 381].

Proposition 2.2 *Une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ est de rang dominant minimal η_0 si et seulement si le faisceau $C_0 - \lambda D_0$ est régulier.*

Preuve. On a déjà montré (preuve du lemme 2.1) que si $\det(C_0 - \lambda D_0)$ est non nul alors $\operatorname{lr} A(\epsilon)$ est minimal et égal à η_0. Réciproquement, supposons que $\det(C_0 - \lambda D_0)$ est nul et, quitte à compresser les colonnes de A_0, que $\operatorname{lr} A(\epsilon) = \eta_0$. Alors $\det C_0 = 0$ et donc $\det \bar{C}_0 = 0$. Dans ce cas $\operatorname{lr} A(\epsilon)$ n'est pas minimal (preuve de la proposition 2.1). □

Une perturbation de matrice $A(\epsilon)$ de rang dominant minimal η_0 admet donc $\det(C_0 - \lambda D_0)$ pour polynôme quasi-Newton d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$ et nous notons désormais $\theta_1(\lambda) = \det(C_0 - \lambda D_0)$. Le lemme 1.2 permet alors de déduire du polynôme $\theta_1(\lambda)$ tous les termes dominants d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$ ainsi que le nombre de valeurs propres de $A(\epsilon)$ d'ordre $\mathrm{o}(\epsilon)$.

Précisons maintenant les monômes influents d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$ du polynôme caractéristique d'une telle matrice. Ils n'existent que lorsque le polynôme quasi-Newton $\theta_1(\lambda)$ n'est pas réduit à un monôme et leur détermination requiert alors non seulement la connaissance de $\theta_1(\lambda)$ mais aussi celle du rang dominant minimal. On commence donc par expliciter la valeur du rang dominant minimal en fonction du polynôme caractéristique. Une spécialisation du théorème 1.1 permettra ensuite de conclure.

Proposition 2.3 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$. Alors* $\operatorname{minlr} A(\epsilon) = n - \operatorname{val} p(\lambda\epsilon, \epsilon)$.

Preuve. Le coefficient de $p(\lambda\epsilon, \epsilon) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\epsilon)\lambda^{n-i}$ associé à λ^n étant ϵ^n, on a $0 \leq \operatorname{val} p(\lambda\epsilon, \epsilon) \leq n$. Cet encadrement est nécessaire car $\operatorname{minlr} A(\epsilon)$ est par définition compris entre 0 et n. Montrons maintenant que toute matrice $B(\epsilon)$ semblable à $A(\epsilon)$ vérifie

$$\operatorname{lr} B(\epsilon) \geq n - \operatorname{val} p(\lambda\epsilon, \epsilon). \tag{2.6}$$

Si $\operatorname{val} B(\epsilon) < 0$, c'est évident car alors $\operatorname{lr} B(\epsilon) = +\infty$. Si $\operatorname{val} B(\epsilon) \geq 0$, on suppose B_0 échelonnée en colonnes. La factorisation d'ordre $O(\epsilon)$ de $A(\epsilon)$ conduit alors à

$$\begin{aligned} p(\lambda\epsilon, \epsilon) &= \det(\lambda\epsilon I - A(\epsilon)) \\ &= \epsilon^n \det D^{-1}(\epsilon) \det(\lambda D(\epsilon) - C(\epsilon)). \end{aligned}$$

Comme $\det D(\epsilon) = \epsilon^{\operatorname{lr} B(\epsilon)}$ et puisque $C(\epsilon) - \lambda D(\epsilon)$ n'a pas de pôle en $\epsilon = 0$, nous obtenons (2.6) en considérant la valuation des deux membres de l'égalité précédente. Par conséquent,

$$\operatorname{minlr} B(\epsilon) \geq n - \operatorname{val} p(\lambda\epsilon, \epsilon).$$

Il reste à expliciter une perturbation de matrice $B(\epsilon)$ semblable à $A(\epsilon)$ pour laquelle il y a égalité dans (2.6). Nous en déduirons que $\operatorname{minlr} B(\epsilon)$ est en particulier atteint pour cette matrice et vaut $n - \operatorname{val} p(\lambda\epsilon, \epsilon)$.

La construction ci-dessous est celle proposée par Moser dans [46, p. 388-389] et s'appuie sur la forme canonique de Frobenius. Soit $F(\epsilon) = \operatorname{Diag}[C_{f_1}(\epsilon), \ldots, C_{f_l}(\epsilon)]$ la forme de Frobenius de $A(\epsilon)$ dans $\mathsf{F}^{n\times n}$. (Voir le livre de Gantmacher [24] et les thèses d'Ozello [49] et de Giesbrecht [25].) Soit $v = \operatorname{val} p(\lambda\epsilon, \epsilon)$. Soient également n_k la dimension du bloc compagnon associé au k-ième facteur invariant $f_k(\lambda, \epsilon)$ et v_k la valuation de ce facteur. Comme $n - v = \sum_{k=1}^{l}(n_k - v_k)$, il suffit de transformer séparément chacun des blocs de $F(\epsilon)$ en une matrice $B_k(\epsilon)$ telle que $\operatorname{lr} B_k(\epsilon) = n_k - v_k$. Nous supposons donc que $F(\epsilon)$ n'a qu'un bloc compagnon $C_p(\epsilon)$ défini par le polynôme caractéristique $p(\lambda, \epsilon)$ de $A(\epsilon)$.

Par définition, $v = \min\{\alpha_h + n - h \,:\, 0 \leq h \leq n\}$ et chaque $a_h(\epsilon)$ est ainsi mutiple de ϵ^{h+v-n}. En particulier, le vecteur $\bar{\boldsymbol{b}}(\epsilon) = [b_n(\epsilon), \ldots, b_1(\epsilon)]^T$ défini par

$$b_i(\epsilon) = \begin{cases} a_i(\epsilon) & \text{si } 1 \leq i \leq n - v\,, \\ \frac{a_i(\epsilon)}{\epsilon^{v-n+i}} & \text{si } n - v + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

a une valuation positive ou nulle. Posons $P(\epsilon) = \operatorname{Diag}[\operatorname{diag}[\epsilon^v, \epsilon^{v-1}, \ldots, 1], I_{n-v}]$. En rappelant que $\boldsymbol{e}^{(i)}$ désigne le i-ième vecteur canonique et que $\bar{\boldsymbol{a}}(\epsilon) = [a_n(\epsilon), \ldots, a_1(\epsilon)]^T$ on transforme alors

$$F(\epsilon) = [\boldsymbol{e}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(n)}, -\bar{\boldsymbol{a}}(\epsilon)]$$

en

$$B(\epsilon) = P^{-1}(\epsilon)F(\epsilon)P(\epsilon) = [\epsilon\boldsymbol{e}^{(2)}, \ldots, \epsilon\boldsymbol{e}^{(v+1)}, \boldsymbol{e}^{(v+2)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(n)}, -\bar{\boldsymbol{b}}(\epsilon)].$$

D'où $\operatorname{lr} B(\epsilon) \leq n - v$ et finalement $\operatorname{lr} B(\epsilon) = n - v$ d'après (2.6) . $\square$

Supposons $\theta_1(\lambda)$ non réduit à un monôme. D'après le lemme 1.2 il existe donc $j \in \{1, \ldots, q\}$ tel que $v_j = n_j = 1$. Comme $n_j = 1$, on a de plus $x_{j-1} = n - \deg \theta_1(\lambda)$. Il reste à déterminer y_{j-1}. L'équation (1.2) reliant l'abscisse et l'ordonnée d'un sommet du polygone de Newton s'écrit ici $y_{j-1} = \operatorname{val} p(\lambda\epsilon, \epsilon) - n + x_{j-1}$. D'après la proposition 2.3 démontrée juste avant on obtient finalement $y_{j-1} = n - \deg \theta_1(\lambda) - \eta_0$. En appliquant à $A(\epsilon)$ un des deux algorithmes de minimisation du rang dominant, on est ramené au cas où $A(\epsilon)$ est telle que sa matrice $\bar{C}_0$ associée est inversible. La structure de C_0 donnée par l'équation (2.3) entraîne $\theta_1(\lambda) = (-\lambda)^{n-\bar{r}} \det(\bar{C}_0 - \lambda \bar{D}_0)$. Comme $\det \bar{C}_0 \neq 0$, on a de plus en notant $d = \deg \theta_1(\lambda)$

$$x_{j-1} = n - d\,, \quad y_{j-1} = n - d - r\,, \quad r_j = d - n + \bar{r} \tag{2.7a}$$

et

$$r \leq n - d \leq \bar{r}.$$

(Voir la figure 2.3 pour une lecture de ces relations sur le polygone de Newton.) On en déduit que $\sharp_j = n - \bar{r}$. Or, si un coefficient de $\theta_1(\lambda) = \det(C_0 - \lambda D_0)$ apparaît dans $\det(\lambda I - A(\epsilon))$, c'est à $(-1)^n$ près. D'après le théorème 1.1 cela implique $(-\lambda)^{\sharp_j}\theta_1(\lambda) = (-1)^{\bar{r}}\phi_j(\lambda)$ et donc

$$\det(\bar{C}_0 - \lambda \bar{D}_0) = (-1)^{\bar{r}}\phi_j(\lambda). \tag{2.7b}$$

D'après (2.7) et comme $\det D(\epsilon) = \epsilon^{\eta_0}$ est un monôme unitaire, on déduit du théorème 1.1 le cas particulier suivant.

Corollaire 2.4 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice de rang dominant minimal η_0 obtenue en sortie de l'algorithme 2.2 (*`MLRF`*). Alors les monômes influents d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$ associés à $A(\epsilon)$ sont les monômes non nuls de la forme*

$$(-1)^{\bar{r}} c_k \epsilon^{n-d-r+k} \lambda^{d-k}\,, \quad 0 \leq k \leq d - n + \bar{r}\,,$$

les coefficients $c_k \in \mathsf{K}$ étant définis par

$$\det(\bar{C}_0 - \lambda \bar{D}_0) = \sum_{k=0}^{d-n+\bar{r}} c_k \lambda^{d-n+\bar{r}-k}.$$

Exemple 2.3 Nous reprenons la matrice 3×3 $A(\epsilon)$ de l'exemple 2.2. Son polynôme caractéristique est

$$p(\lambda, \epsilon) = \lambda^3 - \lambda^2 - \epsilon^2\lambda + \epsilon^2.$$

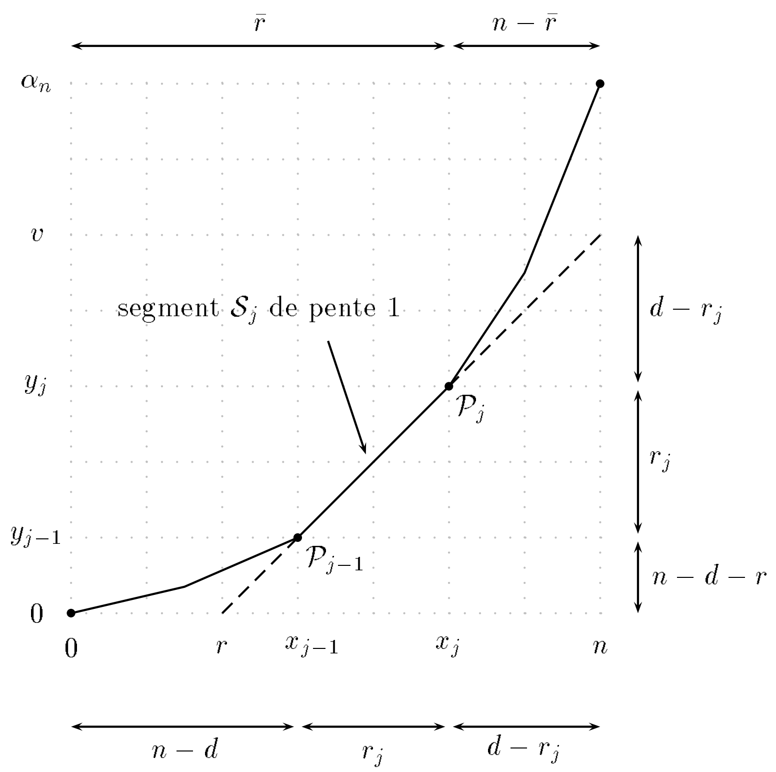


FIG. 2.3 – *Polygone de Newton associé à une perturbation de matrice* $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ *de rang dominant minimal* $r = \eta_0$ *et telle que* $\bar{C}_0$ *est inversible. Le* j*-ième segment est supposé être de pente* 1*. Le degré du polynôme de Newton associé à ce segment est* r_j *et, comme* $n_j = 1$*, celui du polynôme quasi-Newton d'ordre* $\mathrm{O}(\epsilon)$ *est* $d = n - x_{j-1}$ *d'après le lemme 1.2. D'après le théorème 1.1 on a* $\lambda^{-d+r_j}\theta_1(\lambda) = (-1)^n\phi_j(\lambda)$ *et la matrice* $A(\epsilon)$ *possède* r_j *valeurs propres d'ordre* $\mathrm{O}(\epsilon)$ *et* $d - r_j$ *valeurs propres d'ordre* $\mathrm{o}(\epsilon)$*; les* x_{j-1} *valeurs propres restantes sont d'ordre* $\mathrm{O}(\epsilon^\beta)$ *avec* $\beta < 1$*. La droite portant* $\mathcal{S}_j$ *a pour équation* $y = v - n + x$ *avec* $v = \mathrm{val}\, p(\lambda\epsilon, \epsilon)$*. Elle coupe donc l'axe des abscisses en* $x = r$ *d'après la proposition 2.3. On remarquera enfin que* $r \le n - d \le \bar{r}$ *et que* $n - \bar{r} = d - r_j$*.*

En dessinant le polygone de Newton correspondant, on déduit facilement que les monômes influents d'ordre $O(\epsilon)$ sont $-\lambda^2$ et ϵ^2. Le but de cet exemple est de retrouver ces monômes influents en minimisant le rang dominant de $A(\epsilon)$. Les différentes valeurs prises par $A(\epsilon)$ lors de l'exécution de l'algorithme 2.2 (`MLRF`) sont

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \epsilon^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \\ \hline 0 & \epsilon & 0 \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & \epsilon \\ \hline 0 & 0 & \epsilon \\ 0 & \epsilon & 0 \end{array}\right].$$

La dernière de ces quatre matrices vérifie donc les conditions du corollaire 2.4 précédent. Précisément, $r = \eta_0 = 1$, $\bar{r} = n = 3$ et

$$\bar{C}_0 - \lambda \bar{D}_0 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{array}\right].$$

Ainsi $\det(\bar{C}_0 - \lambda \bar{D}_0) = \lambda^2 - 1$, $d = 2$ et $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ et $c_2 = -1$. D'apres le corollaire 2.4 les monômes influents d'ordre $O(\epsilon)$ sont donc bien $-\lambda^2$ et ϵ^2. $\diamond$

Remarque 2.4 En utilisant une technique de preuve analogue à celle de la proposition 2.3 on peut montrer que $\operatorname{maxval} A(\epsilon) = M$. Il n'y a donc aucun monôme influent d'ordre $O(\epsilon^\beta)$ avec $\beta < M$ et pour déterminer les monômes influents d'ordre $O(\epsilon^M)$ on utilisera l'algorithme 2.4 (`MVF`) de maximisation de la valuation. Le problème 1.6 (*REDUCTION*) est donc résolu pour les perturbations de matrices dont toutes les valeurs propres ont la même valuation, égale à un entier.

2.3.3 Valeurs propres de valuation entière

Une première façon d'obtenir les termes dominants de toutes les valeurs propres de valuation entière consiste à diagonaliser par blocs la perturbation de matrice obtenue en sortie de l'algorithme 2.2 (`MLRF`). Cela est rendu possible par la régularité du faisceau $C_0 - \lambda D_0$ associé à une telle matrice (proposition 2.2). On obtient de plus ainsi une première forme normale rationnelle pour les perturbations de matrices.

Commençons par rappeler l'existence d'une forme normale rationnelle pour les faisceaux réguliers (voir par exemple le livre de Gantmacher [24, tome 2, page 25]).

Lemme 2.3 *[24] Pour tout faisceau $C - \lambda D \in \mathsf{K}[\lambda]^{n\times n}$ régulier il existe deux matrices U et V de $\mathsf{K}^{n\times n}$ inversibles telles que*

$$U(C - \lambda D)V = \begin{bmatrix} C^{11} - \lambda D^{11} & O \\ O & C^{22} - \lambda D^{22} \end{bmatrix}$$

et

$$\det(C^{11} - \lambda D^{11}) = 1\,, \quad \det(C^{22} - \lambda D^{22}) = \det(C - \lambda D).$$

A partir d'un algorithme de Van Dooren [55], Quéré-Stuchlik propose dans [52, page 50] un algorithme de calcul d'une telle forme diagonale par blocs ainsi que des matrices U et V. Le deuxième résultat que nous rappelons est un lemme de décomposition initialement donné par Pflügel [50, 51] dans un contexte différentiel et adapté à notre cas algébrique dans [32, lemme 1 page 124]: c'est une généralisation du lemme 1.1 selon laquelle toute perturbation de faisceau régulier peut être diagonalisée par blocs à l'aide de matrices de séries formelles pourvu que le faisceau non perturbé soit sous une forme appropriée, dont la forme normale vue dans le lemme précédent est un cas particulier. C'est une généralisation du lemme 1.1 (lemme de Wasow) au cas des faisceaux de matrices.

Lemme 2.4 *[32] Soit $C(\epsilon) - \lambda D(\epsilon) \in \mathsf{F}[\lambda]^{n\times n}$ la perturbation d'un faisceau $C_0 - \lambda D_0$ régulier. Si $C_0 - \lambda D_0$ est de la forme*

$$C_0 - \lambda D_0 = \begin{bmatrix} C_0^{11} - \lambda D_0^{11} & O \\ O & C_0^{22} - \lambda D_0^{22} \end{bmatrix}$$

où $C_0^{11} - \lambda D_0^{11}$ et $C_0^{22} - \lambda D_0^{22}$ n'ont aucune valeur propre - finie ou infinie - en commun, alors il existe deux perturbations de l'identité $S(\epsilon)$ et $T(\epsilon)$ dans $\mathsf{F}^{n\times n}$ telles que la perturbation de faisceau $\tilde{C}(\epsilon) - \lambda \tilde{D}(\epsilon) = S(\epsilon)(C(\epsilon) - \lambda D(\epsilon))T(\epsilon)$ soit diagonale par blocs, de même structure que $C_0 - \lambda D_0$.

Ces deux lemmes permettent de diagonaliser par blocs une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ à l'aide d'une matrice de passage dans $\mathsf{F}^{n\times n}$ de la façon suivante. Partant de $A(\epsilon)$, on commence par lui appliquer le lemme de décomposition de Wasow (lemme 1.1) pour obtenir

$$A(\epsilon) \sim \begin{bmatrix} \tilde{A}_1(\epsilon) & \\ & A'(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad \det \tilde{A}_{1,0} \neq 0\,, \quad A'_0 \text{ nilpotente.}$$

On transforme ensuite $A'(\epsilon)$ en $\hat{A}(\epsilon)$ avec l'agorithme 2.2 (`MLRF`). On a alors

$$A(\epsilon) \sim \begin{bmatrix} \tilde{A}_1(\epsilon) & \\ & \hat{A}(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad \hat{A}(\epsilon) = \epsilon \hat{C}(\epsilon)\hat{D}^{-1}(\epsilon)\,, \quad \det(\hat{C}_0 - \lambda \hat{D}_0) \neq 0.$$

Grâce au lemme 2.3 on réduit $\hat{C}(\epsilon) - \lambda \hat{D}(\epsilon)$ à $U(\hat{C}(\epsilon) - \lambda \hat{D}(\epsilon))V$ de façon à pouvoir appliquer le lemme 2.4 à cette nouvelle perturbation de faisceau. On obtient alors

$$\tilde{C}(\epsilon) - \lambda \tilde{D}(\epsilon) = S(\epsilon)U(\hat{C}(\epsilon) - \lambda \hat{D}(\epsilon))VT(\epsilon) = \begin{bmatrix} \tilde{C}^{11}(\epsilon) - \lambda \tilde{D}^{11}(\epsilon) & O \\ O & \tilde{C}^{22}(\epsilon) - \lambda \tilde{D}^{22}(\epsilon) \end{bmatrix}$$

et on pose $\tilde{A}(\epsilon) = \epsilon\tilde{C}(\epsilon)\tilde{D}^{-1}(\epsilon)$. Cette nouvelle perturbation de matrice est semblable à $\hat{A}(\epsilon)$. En effet, on peut vérifier que

$$S(\epsilon)U(\hat{A}(\epsilon) - \lambda I)U^{-1}S^{-1}(\epsilon) = (\tilde{A}(\epsilon) - \lambda I)\underbrace{\tilde{D}(\epsilon)T^{-1}(\epsilon)V^{-1}\hat{D}^{-1}(\epsilon)U^{-1}S^{-1}(\epsilon)}_{= I \text{ car } \tilde{D}(\epsilon) = S(\epsilon)U\hat{D}(\epsilon)VT(\epsilon)}.$$

Comme $\theta_1(\lambda) = \det(\hat{C}_0 - \lambda\hat{D}_0)$ est de degré $d = n - x_{j-1}$ (voir la figure 2.3) on obtient finalement

$$\tilde{A}(\epsilon) = S(\epsilon)U\hat{A}(\epsilon)U^{-1}S^{-1}(\epsilon) = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} \tilde{A}^{11}(\epsilon) & \\ & \tilde{A}^{22}(\epsilon) \end{array}\right] & \begin{array}{c} x_{j-1} \\ n - x_{j-1} \end{array} \\ \begin{array}{cc} x_{j-1} & n - x_{j-1} \end{array} & \end{array}$$

où

$$\det(\tilde{C}_0^{11} - \lambda\tilde{D}_0^{11}) = 1\,, \quad \det(\tilde{C}_0^{22} - \lambda\tilde{D}_0^{22}) = \theta_1(\lambda).$$

Par conséquent toutes les valeurs propres du bloc $\tilde{A}^{11}(\epsilon)$ sont d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\beta})$ avec $0 < \beta < 1$, et toutes celles de $\tilde{A}^{22}(\epsilon)$ sont d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\beta})$ avec $\beta \geq 1$. Les deux blocs $\tilde{A}^{11}(\epsilon)$ et $\tilde{A}^{22}(\epsilon)$ sont clairement de rang dominant minimal. Mais la valuation de $\tilde{A}^{22}(\epsilon)$ n'est pas forcément maximale. Sa valuation maximale est supérieure ou égale à 1 car $\tilde{A}^{22}(\epsilon)$ n'a que des valeurs propres de valuation au moins 1. En notant $\tilde{A}_2(\epsilon) = \tilde{A}^{11}(\epsilon)$ et en désignant par $\epsilon\tilde{A}_3(\epsilon)$ la matrice obtenue à partir de $\tilde{A}^{22}(\epsilon)$ en minimisant son rang dominant, on obtient

$$A(\epsilon) \sim \begin{bmatrix} \tilde{A}_1(\epsilon) & & \\ & \tilde{A}_2(\epsilon) & \\ & & \epsilon\tilde{A}_3(\epsilon) \end{bmatrix}$$

où $\tilde{A}_{1,0}$ est inversible, où $\tilde{A}_2(\epsilon)$ n'a que des valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\beta_2})$ avec $\beta_2 \in]0,1[\cap \mathbb{Q}$ et où $\tilde{A}_3(\epsilon)$ est une perturbation de matrice de $\mathsf{F}^{n\times n}$. De plus, la valuation de $\tilde{A}_2(\epsilon)$ est maximale, égale à 0; son rang dominant est minimal, égal à $\eta_{2,0}$ le nombre de ses colonnes de valuation nulle; et sa matrice $\bar{C}_{2,0}$ associée est inversible. La matrice $\tilde{A}_3(\epsilon)$ est également de rang dominant minimal mais celui-ci peut être nul; le cas échéant, la matrice non perturbée $\tilde{A}_{3,0}$ n'est pas forcément nilpotente. Si $\tilde{A}_3(\epsilon)$ est de dimension nulle, on s'arrête; sinon, on applique à cette matrice la transformation que l'on vient de décrire pour $A(\epsilon)$. Le corollaire ci-dessous précise la forme diagonale par blocs à laquelle conduisent ces itérations.

Corollaire 2.5 *Toute perturbation de matrice de $\mathsf{F}^{n\times n}$ est semblable à une perturbation de matrice $A(\epsilon)$ diagonale par blocs*

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} \epsilon^{v_1} A_1(\epsilon) & & & \\ & \epsilon^{v_2} A_2(\epsilon) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \epsilon^{v_l} A_l(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad 0 \le v_1 \le v_2 \le \ldots \le v_l\,,$$

telle que pour $k = 1, \ldots, l$

(i) la valuation de $\epsilon^{v_k} A_k(\epsilon)$ est $v_k \in \mathbb{N}$;

(ii) soit $A_{k0} = A_k(0)$ est inversible, soit $A_k(\epsilon)$ n'a que des valeurs propres de valuations comprises strictement entre 0 et 1 ;

(iii) la valuation de la perturbation de matrice $A_k(\epsilon)$ est maximale, égale à 0; son rang dominant minimal est minimal, égal à η_{k0} le nombre de ses colonnes de valuation nulle; et sa matrice $\bar{C}_{k0}$ associée est inversible.

Remarque 2.5 Une telle forme diagonale par blocs n'est bien sûr pas unique. Pour en déduire les termes dominants et les monômes influents, seules comptent les matrices non perturbées A_{k0} inversibles et, le cas échéant, les perturbations linéaires $A_k(\epsilon) \bmod \epsilon^2$ avec A_{k0} nilpotente.

En appliquant le corollaire 2.4 du paragraphe précédent à chacun des blocs $A_k(\epsilon)$ on voit que la forme bloc-diagonale ci-dessus permet aussi de déterminer tous les monômes influents dont l'ordre est de la forme $\mathrm{O}(\epsilon^{\text{un entier}})$. On a de plus le cas particulier suivant.

Corollaire 2.6 *Toute perturbation de matrice de $\mathsf{F}^{n\times n}$ n'ayant que des valeurs propres de valuation entière est semblable à une perturbation de matrice $A(\epsilon)$ diagonale par blocs*

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} \epsilon^{v_1} A_1(\epsilon) & & & \\ & \epsilon^{v_2} A_2(\epsilon) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \epsilon^{v_l} A_l(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad 0 \le v_1 \le v_2 \le \ldots \le v_l\,,$$

telle que pour $k = 1, \ldots, l$ $\operatorname{val} A_k(\epsilon) = v_k$ et les matrices constantes $A_{k0} = A_k(0)$ sont inversibles, sous forme canonique de Frobenius.

Pourtant, la détermination de ces monômes influents fait appel à des matrices de passage dont les coefficients sont des séries formelles en ϵ et non des polynômes. A ce stade, le problème 1.6 ($REDUCTION$) n'est donc pas résolu pour les valeurs propres de valuation entière.

Nous allons voir au chapitre 3 suivant qu'une telle diagonalisation par blocs n'est en fait pas nécessaire. En effet, nous y proposerons entre autres un algorithme de calcul des mêmes monômes influents à l'aide d'une matrice de passage polynomiale. Toute diagonalisation par blocs de la perturbation de matrice de départ, à quelque ordre que ce soit, est évitée.

Chapitre 3

Perturbations selon les valuations

Ce chapitre étudie la possibilité pour la valuation d'une colonne d'une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ d'être la valuation d'une des valeurs propres de $A(\epsilon)$. Les termes dominants que l'on peut espérer lire ainsi sont donc ceux de valeurs propres de valuation entière exclusivement.

Nous introduisons pour cela la notion de profil de valuations: c'est le vecteur d'ordre n des valuations des colonnes de $A(\epsilon)$. Partant de ce profil de valuations il est possible de définir une famille de perturbations quasi-génériques, dites perturbations quasi-génériques à profil de valuations fixé, pour laquelle le problème 1.1 ($TERMES{\cdot}DOMINANTS$) et ses deux versions rationnelles sont résolus. C'est donc une première solution au problème 1.4 ($PERT{\cdot}QUASI{\cdot}GEN$). En particulier, une perturbation quasi-générique à profil de valuations fixé qui possède r colonnes de valuation v admet exactement r valeurs propres de valuation v.

Nous proposons ensuite la définition d'une forme réduite par rapport à la famille des perturbations quasi-génériques à profil de valuations fixé, appelée forme v-réduite ("réduite au sens des valuations de colonnes"). Après une étude des invariants matriciels qui sont à la base de cette définition, nous caractérisons une forme v-réduite de deux manières. Selon la première, une forme v-réduite est une perturbation de matrice de profil de valuations maximal sur son orbite. Les invariants matriciels qui la définissent apparaissent ainsi comme des nombres minimaux de colonnes d'une valuation donnée. On parlera alors d'indices minimaux en valuation. Cette première caractérisation conduira de plus à un algorithme de réduction qui généralise la minimisation du rang dominant vue au chapitre précédent. Cependant, elle ne permet pas de décider si une perturbation de matrice est v-réduite sans la connaissance de son polynôme caractéristique. La deuxième caractérisation proposée résout ce problème en montrant que le calcul de quelques polynômes quasi-Newton d'ordre entier suffit. Elle conduit aussi, et surtout, à la résolution du problème 1.5 ($FORME \cdot REDUITE$). Grâce à l'algorithme issu de la première caractérisation, le problème 1.6 ($REDUCTION$) est également résolu. Enfin, le problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$) est résolu pour toute perturbation de matrice $A(\epsilon)$ qui est v-réduite et n'a que des valeurs propres de valuation entière.

Avant de conclure, une caractérisation à l'aide du polygone de Newton est proposée à la fois pour les perturbations quasi-génériques à profil de valuations fixé et pour la forme v-réduite, qui s'inspire des travaux de Moro, Burke et Overton [45].

Enfin, nous terminons ce chapitre en retrouvant les deux formes diagonales par blocs du chapitre précédent. On peut désormais parler de forme normale rationnelle associée à la famille des perturbations quasi-génériques à profil de valuations fixé et donc solution du problème 1.7 ($FORME \cdot NORMALE$). En particulier, la seconde forme normale est une perturbation quasi-générique à profil de valuations fixé diagonale par blocs.

La factorisation qui sera utilisée tout au long de ce chapitre est définie par

$$A(\epsilon) = \epsilon^i C_i(\epsilon) D_i^{-1}(\epsilon)\,, \quad D_i(\epsilon) = \operatorname{diag}\left[\epsilon^{\max(0, i - \operatorname{val} \boldsymbol{a}_k(\epsilon))}\right], \quad i \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

où $\boldsymbol{a}_k(\epsilon)$ désigne la k-ième colonne de $A(\epsilon)$. Le k-ième élément diagonal de $D_i(\epsilon)$ vaut donc $\epsilon^{i - \operatorname{val} \boldsymbol{a}_k(\epsilon)}$ lorsque $\operatorname{val} \boldsymbol{a}_k(\epsilon) < i$, et 1 sinon. De plus, la k-ième colonne de la matrice constante C_{i0} est nulle si et seulement si $\operatorname{val} \boldsymbol{a}_k(\epsilon) > i$; le cas échéant, sa j-ième composante est le coefficient de $a_{jk}(\epsilon)$ d'ordre $\operatorname{val} \boldsymbol{a}_k(\epsilon)$.

Exemple 3.1 Soient

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5\epsilon^3 & 7\epsilon^4 \\ 0 & 3\epsilon^2 & 0 & 8\epsilon^4 \\ 2 & 0 & 6\epsilon^3 & 0 \\ 0 & 4\epsilon^2 & 0 & 9\epsilon^4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad i = 3.$$

Alors $D_3(\epsilon) = \operatorname{diag}[\epsilon^3, \epsilon, 1, 1]$ et donc

$$C_3(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7\epsilon \\ 0 & 3 & 0 & 8\epsilon \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 9\epsilon \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_{30} - \lambda D_{30} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

◇

Lorsque i est fixé, une telle factorisation s'obtient à partir de la définition 1.6 en posant $a = i$, $b = 1$ et $L(\epsilon) = I$. Lorsque $i = 1$, on retrouve la factorisation d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$ du chapitre précédent.

3.1 Profil de valuations d'une perturbation de matrice

Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{m\times n}$. En considérant chacune de ses colonnes comme un vecteur de F^m, la matrice $A(\epsilon)$ se réécrit $A(\epsilon) = [\boldsymbol{a}_k(\epsilon)]$.

Définition 3.1 *Soit* $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{m\times n}$ *une perturbation de matrice. On appelle* **profil de valuations** *de* $A(\epsilon)$ *le vecteur de* n *entiers* $\mathrm{vp}\, A(\epsilon) = [\mathrm{val}\, \boldsymbol{a}_k(\epsilon)]$. *On associe à* $A(\epsilon)$ *la* **matrice de tête de ses valuations** $A \in \mathsf{K}^{m\times n}$ *définie par* $A(\epsilon)\epsilon^{-\mathrm{vp}\, A(\epsilon)} = A + \mathrm{O}(\epsilon)$.

Cette définition est l'analogue pour les perturbations de matrices de celle donnée dans le livre de Wolovich [62, p.27] pour les degrés en colonnes et la matrice de tête des degrés en colonne d'une matrice polynomiale. Ici on ne se place pas à l'infini mais au voisinage de $\epsilon = 0$; de plus on n'opère pas sur $A(\epsilon)$ par équivalence comme dans le cas, par exemple, de la mise sous forme colonne-réduite d'une matrice polynomiale, mais par similitude. (Voir aussi le livre de Kailath [35, §6.5.3].)

Remarque 3.1 Les profils de valuations étant des vecteurs de n entiers, on peut les comparer selon l'ordre lexicographique. Nous reviendrons sur ce point à la section 3.5.1.

Les colonnes de $A(\epsilon)$ seront désormais supposées rangées par ordre de valuations croissantes. Cette hypothèse se fait sans perte de généralité car il suffit de permuter simultanément certaines colonnes et certaines lignes de la matrice considérée. Soient

$$v_1 < v_2 < \ldots < v_q \tag{3.2a}$$

les q valeurs distinctes du profil de valuations de $A(\epsilon)$ et $r_1, r_2, \ldots, r_q$ leurs multiplicités respectives. Pour $j = 1, \ldots, q$ la matrice $A(\epsilon)$ possède donc r_j colonnes de valuation v_j et la famille des r_j forme une partition entière de n. En effet,

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_q = n. \tag{3.2b}$$

On peut alors identifier le profil de valuations de $A(\epsilon)$ au vecteur des q couples $(r_j, v_j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Nous notons donc également

$$\mathrm{vp}\, A(\epsilon) = [(r_1, v_1), (r_2, v_2), \ldots, (r_q, v_q)]. \tag{3.2c}$$

Dans la suite de ce chapitre, les colonnes de toute perturbation de matrice seront supposées rangées par ordre de valuations croissantes.

3.2 Perturbations quasi-génériques à profil de valuations fixé

Sous l'hypothèse précédente, les notions de profil de valuations et de matrice de tête des valuations conduisent à définir des conditions de régularité génériquement satisfaites et donc à proposer une nouvelle famille de perturbations quasi-génériques, dites perturbations quasi-génériques à profil de valuations fixé.

Définition 3.2 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$. Pour $j = 1,\ldots,q$ on appelle j-**ième sous-matrice influente** associée à $A(\epsilon)$ la sous-matrice principale de A d'ordre $r'_j = \sum_{i=1}^{j} r_i$ notée L_j. On appelle j-**ième condition de régularité** associée à $A(\epsilon)$ la condition "$\Delta_j \neq 0$" où $\Delta_j = \det L_j$.*

Puisque $r'_q = n$, la q-ième sous-matrice influente L_q est en fait la matrice de tête A des valuations de $A(\epsilon)$. Par ailleurs, dès que $j \geq 2$ la matrice L_{j-1} occupe le "coin supérieur gauche" de L_j.

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat dont la conséquence principale est la suivante: lorsque les conditions de régularité sont satisfaites, les termes dominants des valeurs propres de $A(\epsilon)$ sont entièrement définis par son profil de valuations et ses sous-matrices influentes.

Théorème 3.1 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$. Soient $j \in \{1,\ldots,q\}$ et $E_j = \mathrm{Diag}\,[O_{r'_{j-1}}, I_{r_j}]$. Supposons que $\Delta_j \neq 0$. Supposons de plus que $\Delta_{j-1} \neq 0$ lorsque $j \geq 2$. Alors la matrice $A(\epsilon)$ possède r_j valeurs propres de la forme*

$$\lambda_j^k(\epsilon) = \mu_j^k \epsilon^{v_j} + \mathrm{o}(\epsilon^{v_j})\,, \quad k = 1,\ldots,r_j\,,$$

où les μ_j^k sont les r_j racines du polynôme $\det(L_j - \lambda E_j)$.

Preuve. Soit $j \in \{1,\ldots,q\}$ fixé. Considérons la factorisation d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{v_j})$ de $A(\epsilon)$ définie par (3.1). Les colonnes $\boldsymbol{a}_k(\epsilon)$ de $A(\epsilon) = [\boldsymbol{a}_1(\epsilon),\ldots,\boldsymbol{a}_n(\epsilon)]$ étant supposées rangées par valuations croissantes, on a

$$C_{v_j0} = [\boldsymbol{a}_{1v_1},\ldots,\boldsymbol{a}_{r'_j,v_j},\boldsymbol{0},\ldots,\boldsymbol{0}] \quad \text{et} \quad D_{v_j0} = \mathrm{Diag}\,[O_{r'_{j-1}}, I_{n-r'_{j-1}}].$$

Par conséquent, $\det(C_{v_j0} - \lambda D_{v_j0}) = (-\lambda)^{n-r'_j}\det(L_j - \lambda E_j)$. Comme $\Delta_j \neq 0$, le faisceau $C_{v_j0} - \lambda D_{v_j0}$ est régulier et on peut appliquer le lemme 1.2 avec $a = v_j$, $b = 1$ et $L(\epsilon) = I$. De plus, si $j = 1$ alors $E_1 = I_{r_1}$ et $\det(L_1 - \lambda E_1)$ est de degré r_1. Si $j \geq 2$, l'hypothèse selon laquelle $\Delta_{j-1} \neq 0$ entraîne que $\det(L_j - \lambda E_j)$ est de degré r_j. Dans les deux cas, les r_j racines de $\det(L_j - \lambda E_j)$ dans $\overline{\mathsf{K}}$ sont toutes non nulles car $\Delta_j \neq 0$. □

Les conditions de régularité "$\Delta_j \neq 0$" étant génériquement satisfaites, le théorème précédent permet de définir une nouvelle famille de perturbations de matrices quasi-génériques et donc d'apporter une première réponse au problème 1.4 ($PERT \cdot QUASI \cdot GEN$).

Définition 3.3 *Une perturbation de matrice* $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ *est appelée* **perturbation quasi-générique à profil de valuations fixé** *lorsque toutes les conditions de régularité définies à partir de son profil de valuations sont satisfaites. On notera* $\mathcal{VP}$ *l'ensemble de ces matrices.*

Exemple 3.2 Considérons une matrice $A(\epsilon)$ de $\mathcal{VP}$ de dimension 6 et de profil de valuations $[0,0,1,1,1,3] = [(2,0),(3,1),(1,3)]$. Elle s'écrit $A(\epsilon) =$

$$\begin{bmatrix} \heartsuit & \heartsuit & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \heartsuit & \heartsuit & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \spadesuit & \spadesuit & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \spadesuit & \spadesuit & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \spadesuit & \spadesuit & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \diamondsuit & \diamondsuit & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \times & \times & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & 0 \\ \times & \times & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & 0 \\ \times & \times & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & 0 \\ \times & \times & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & 0 \\ \times & \times & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & 0 \\ \times & \times & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & 0 \end{bmatrix} \epsilon + \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \diamondsuit \\ \times & \times & \times & \times & \times & \diamondsuit \\ \times & \times & \times & \times & \times & \diamondsuit \\ \times & \times & \times & \times & \times & \diamondsuit \\ \times & \times & \times & \times & \times & \diamondsuit \\ \times & \times & \times & \times & \times & \diamondsuit \end{bmatrix} \epsilon^3 + \mathrm{O}(\epsilon^4).$$

Les termes dominants des valeurs propres de $A(\epsilon)$ ne dépendent que des $\heartsuit$, $\spadesuit$, $\diamondsuit$ et non des éléments désignés par $\times$ ni des termes d'ordre supérieur à 3. Plus précisément, $n = 6$, $q = 3$, $r'_1 = 2$, $r'_2 = 5$, $r'_3 = 6$ et

$$L_1 = \begin{bmatrix} \heartsuit & \heartsuit \\ \heartsuit & \heartsuit \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \left[\begin{array}{cc|ccc} \heartsuit & \heartsuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit \\ \heartsuit & \heartsuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit \\ \hline \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit \\ \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit \\ \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit \end{array}\right], \quad E_2 = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{array}\right],$$

$$L_3 = A = \left[\begin{array}{ccccc|c} \heartsuit & \heartsuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\ \heartsuit & \heartsuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\ \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\ \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\ \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\ \hline \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit \end{array}\right], \quad E_3 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ \hline & & & & & 1 \end{array}\right].$$

Comme $A(\epsilon) \in \mathcal{VP}$ les $\heartsuit$, $\spadesuit$, $\diamondsuit$ sont tels que les matrices L_1, L_2 et L_3 sont inversibles. Les polynômes $\det(L_1 - \lambda I_2)$, $\det(L_2 - \lambda E_2)$ et $\det(L_3 - \lambda E_3)$ n'ont donc pas de racine nulle et ont pour degrés respectifs 2, 3 et 1. Soient μ_1^1, μ_1^2, μ_2^1, μ_2^2, μ_2^3 et μ_3^1 leurs racines. D'après le théorème 3.1 la matrice $A(\epsilon)$ admet deux valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(1)$, trois d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$ et une d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^3)$:

$$\lambda_1^1(\epsilon) = \mu_1^1 + \mathrm{o}(1)\,, \quad \lambda_1^2(\epsilon) = \mu_1^2 + \mathrm{o}(1)\,,$$

$$\lambda_2^1(\epsilon) = \mu_2^1\epsilon + \mathrm{o}(\epsilon)\,, \quad \lambda_2^2(\epsilon) = \mu_2^2\epsilon + \mathrm{o}(\epsilon)\,, \quad \lambda_2^3(\epsilon) = \mu_2^3\epsilon + \mathrm{o}(\epsilon)\,,$$

$$\lambda_3^1(\epsilon) = \mu_3^1\epsilon^3 + \mathrm{o}(\epsilon^3).$$

$\diamondsuit$

On voit sur l'exemple précédent que les éléments désignés par $\times$ ne participent pas à la définition des termes dominants des valeurs propres de $A(\epsilon)$. L'ensemble $\mathcal{VP}$ est donc un sous-ensemble de l'ensemble des perturbations génériques.

Exemple 3.3 Reprenons l'exemple 3.1 du début. On vérifie facilement que $A(\epsilon) \in \mathcal{VP}$. En effet $\Delta_1 = 1$ et

$$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3\,, \quad \Delta_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} = -12\,, \quad \Delta_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 9 \end{bmatrix} = 20.$$

Cette perturbation de matrice $A(\epsilon)$ est bien sûr non générique (presque un élément sur deux est nul) et pourtant toutes ses conditions de régularité sont satisfaites. $\diamondsuit$

On pourra aussi remarquer que l'indice de ramification d'une valeur propre d'un élément de $\mathcal{VP}$ n'est pas nécessairement égal à 1. En effet,

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{VP}$$

et pourtant ses valeurs propres sont de la forme $1 \pm \epsilon^{1/2} + \mathrm{o}(\epsilon^{1/2})$ et donc d'indice de ramification 2. Mais si les r_j racines de $\det(L_j - \lambda E_j)$ sont deux à deux distinctes, les n valeurs propres se développent en n séries formelles deux à deux distinctes et donc d'indice de ramification 1. Ces séries se distinguent soit par des exposants dominants différents, soit, pour un même exposant dominant, par des coefficients dominants différents. C'est en particulier le cas des perturbations génériques à profil de valuations fixé.

Enfin, avec les mêmes notations que dans le théorème 3.1 on obtient immédiatement les solutions suivantes aux problèmes 1.2 ($POLY{\cdot}NEWTON$) et 1.3 ($MON{\cdot}INFLUENTS$) respectivement.

Corollaire 3.1 *Le polygone de Newton associé à une perturbation quasi-générique à profil de valuations fixé égal à $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$ est formé de r_j segments de pente v_j et de longueur 1, $j = 1, \ldots, q$. Le j-ième polynôme de Newton est $\phi_j(\lambda) = (-1)^{r'_j} \det(L_j - \lambda E_j)$.*

Corollaire 3.2 *Les monômes influents du polynôme caractéristique d'une perturbation quasi-générique à profil de valuations fixé égal à $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$ sont les monômes non nuls de la forme*

$$(-1)^{r'_j} c_{jk} \epsilon^{r^*_{j-1}+kv_j} \lambda^{n-r'_{j-1}-k}, \quad k = 0, \ldots, r_j, \quad , j = 1, \ldots, q,$$

avec $r^*_j = \sum_{i=1}^{j} r_i n_i$ et $\det(L_j - \lambda E_j) = \sum_{k=0}^{r_j} c_{jk} \lambda^{r_j-k}$.

D'après le théorème 3.1 les conditions de régularité de la définition 3.2 constituent des conditions suffisantes sur la matrice $A(\epsilon)$ pour qu'elle n'ait que des valeurs propres de valuation entière. Elles ne sont bien sûr pas nécessaires. De plus, toute perturbation de matrice n'est pas semblable à une perturbation quasi-générique à profil de valuations fixé. C'est par exemple le cas d'une perturbation de matrice de $\mathsf{F}^{2\times 2}$ dont les deux valeurs propres sont d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}})$. (Voir par exemple la matrice de l'exemple 1.2 au chapitre 1.) D'où la question suivante: existe-t-il une forme matricielle à laquelle *toute* perturbation de matrice $A(\epsilon)$ puisse être réduite par similitude et telle que tout exposant dominant entier d'une valeur propre de $A(\epsilon)$ soit la valuation d'un certain nombre de ses colonnes? C'est pour répondre à cette question que nous introduisons les notions d'indices minimaux en valuation (paragraphe 3.3) et de forme v-réduite (paragraphe 3.4).

3.3 Indices minimaux en valuation

Rappelons que $p(\lambda, \epsilon) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\epsilon) \lambda^{n-k}$ désigne le polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$ et que $\alpha_k = \operatorname{val} a_k(\epsilon)$ pour $k = 0, \ldots, n$. On étudie dans ce paragraphe la suite $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\delta_i = 2s_i - s_{i+1} - s_{i-1}, \quad s_i = \operatorname{val} p_i(\lambda, \epsilon), \quad p_i(\lambda, \epsilon) = p(\lambda\epsilon^i, \epsilon). \tag{3.3}$$

Comme $s_i = \min\{i(n-k) + \alpha_k \, : \, 0 \leq k \leq n\}$, on a $s_{-1} = -n$. De plus, les s_i forment une suite croissante et les $s_{i+1} - s_i$ une suite décroissante. (Cette propriété apparaît déjà dans [6, page 169].) Par conséquent, les δ_i sont tous positifs ou nuls. En rappelant que les n exposants dominants des valeurs propres de $A(\epsilon)$ vérifient $0 \leq M \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_n \leq N$ avec $M = \lfloor \beta_1 \rfloor$ et $N = \lceil \beta_n \rceil$, nous avons de plus la propriété suivante.

Propriété 3.1 *$s_i = in$ $\forall i \leq M$, $s_i = \alpha_n$ $\forall i \geq N$, $s_{M+1} < (M+1)n$ et $s_{N-1} < \alpha_n$.*

Preuve. Les exposants dominants β_{ij} des solutions de $p_i(\lambda, \epsilon) = 0$ vérifient $\beta_{ij} = \beta_j - i$ pour $1 \leq j \leq n$. Si $i \leq M$ alors $\beta_{ij} \geq 0$. La valuation s_i de $p_i(\lambda, \epsilon)$ est donc atteinte en λ^n et vaut in. Pour $i \geq N$, les β_{ij} sont tous négatifs ou nuls et s_i est atteinte en $a_n(\epsilon)$, le coefficient de $p_i(\lambda, \epsilon)$ indépendant de λ. Ainsi $s_i = \alpha_n$. D'autre part, $s_{M+1} \leq (M+1)n$ et, s'il y a égalité, c'est-à-dire si $\min\{(M+1)n - k + \alpha_k \ : \ 0 \leq k \leq n\}$ est atteint en particulier pour $k = 0$, alors tous les $\beta_{M+1,j}$ sont positifs ou nuls, ce qui contredit la définition de M. Le même raisonnement est valable pour s_{N-1}, qui conduit à contredire la définition de N. $\square$

Les propriétés (a), (b), (c) ci-dessous montrent que la suite $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est nulle presque partout et qu'elle définit une partition entière de n. Nous nous servirons des propriétés (d) et (e) pour démontrer le théorème 3.2. La propriété (e) sera également utilisée à plusieurs reprises aux paragraphes 3.5 et 3.7.

Propriété 3.2

(a) $\delta_i \in \mathbb{N}$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}$ *;*

(b) $\delta_i = 0$ *pour tout* $i \in \mathbb{N} \backslash \{M, \ldots, N\}$, $\delta_M \neq 0$ *et* $\delta_N \neq 0$ *;*

(c) $\sum_{i=M}^{N} \delta_i = n$ *;*

(d) $\sum_{i=M}^{N} i\delta_i = \alpha_n$ *;*

(e) Soit $j \in \mathbb{N}$. *Alors* $\sum_{i=M}^{j-1} (j - i)\delta_i = jn - s_j$.

Preuve. La décroissance de la suite des $s_{i+1} - s_i$ implique (a), et (b) est une conséquence directe de la propriété 3.1. De plus, $\sum_{i=M}^{N} 2s_i - s_{i+1} - s_{i-1}$ se réduit à $s_M - s_{M-1} + s_N - s_{N+1}$ car tous les s_i intermédiaires s'éliminent. En réappliquant la propriété 3.1 on trouve alors (c). Pour obtenir (d) et (e), il suffit d'observer que l'identité $-(i-1) + 2i - (i+1) = 0$ permet de simplifier les sommes. En effet, $\sum_{i=M}^{N} i\delta_i$ se réduit à

$$M(2s_M - s_{M-1}) - (M+1)s_M + N(2s_N - s_{N+1}) - (N-1)s_N \,,$$

et $\sum_{i=M}^{j-1} (j - i)\delta_i$ se réduit à

$$(j - M)(2s_M - s_{M-1}) - (j - M - 1)s_M - s_j.$$

D'après la propriété 3.1 ces expressions valent respectivement α_n et $jn - s_j$. □

Définition 3.4 *On appelle* **indices minimaux en valuation** *de $A(\epsilon)$ les δ_i non nuls.*

Exemple 3.4 Considérons la matrice de dimension $n = 4$

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \epsilon^3 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^5 \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $p(\lambda, \epsilon) = (\lambda^2 - \epsilon^3)(\lambda - \epsilon^2)(\lambda - \epsilon^5)$. Par conséquent, ses valeurs propres sont $\epsilon^{\frac{3}{2}}$, $-\epsilon^{\frac{3}{2}}$, ϵ^2, ϵ^5 et on a

$$M = 1 < \beta_1 = \beta_2 = \frac{3}{2} < \beta_3 = 2 < \beta_4 = N = 5.$$

De plus, le calcul des premières valeurs des suites $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ donne

i	0	$\boxed{1}$	2	3	4	$\boxed{5}$	6	7	...
s_i	0	4	7	8	9	10	10	10	...
δ_i	0	1	2	0	0	1	0	0	...

où les valeurs encadrées sont celles de M et N et où les pointillés indiquent que $s_i = s_7$ et $\delta_i = \delta_7$ pour tout $i > 7$. Les indices minimaux en valuation de la matrice $A(\epsilon)$ sont donc $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 2$ et $\delta_5 = 1$. Ils forment la partition entière $1 + 2 + 1 = 4$ de sa dimension. ◇

3.4 La forme v-réduite

Définition 3.5 *Une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$ est v-***réduite** *si $r_j = \delta_{v_j}$ pour $j = 1, \ldots, q$.*

Théorème 3.2 *Toute perturbation de matrice $n \times n$ est semblable à une forme v-réduite.*

Preuve. Soit $F(\epsilon) = \mathrm{Diag}\,[C_{f_1}(\epsilon), \ldots, C_{f_l}(\epsilon)]$ la forme de Frobenius de $A(\epsilon)$. Soit $(\delta_i^{(k)})_{i\in\mathbb{N}}$ la suite associée au k-ième facteur invariant $f_k(\lambda, \epsilon)$, définie à partir de (3.3). Comme $p(\lambda, \epsilon) = f_1(\lambda, \epsilon)...f_l(\lambda, \epsilon)$ nous pouvons décomposer chaque δ_i en $\delta_i = \delta_i^{(1)} + \ldots + \delta_i^{(l)}$. La réduction de $A(\epsilon)$ à une forme v-réduite se ramène donc à la réduction à une telle forme de chacun des blocs de sa forme de Frobenius. Nous pouvons donc supposer que $F(\epsilon)$ n'a qu'un bloc compagnon $C_p(\epsilon)$ défini par le polynôme caractéristique $p(\lambda, \epsilon) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\epsilon)\lambda^{n-k}$ de $A(\epsilon)$.

Explicitons maintenant une matrice de passage $P(\epsilon)$ telle que $P(\epsilon)^{-1}F(\epsilon)P(\epsilon)$ est v-réduite. Soit q le nombre des δ_i non nuls. Si les indices i correspondants sont désignés par $v_1 < v_2 < \ldots < v_q$ on a alors d'après le paragraphe précédent $v_1 = M$, $v_q = N$ et $\delta_{v_1} + \ldots + \delta_{v_q} = n$. Il s'agit donc de trouver une matrice $P(\epsilon)$ telle que $P(\epsilon)^{-1}F(\epsilon)P(\epsilon)$ possède δ_{v_j} colonnes de valuation v_j. Pour cela, une matrice diagonale de monômes en ϵ suffit, dont l'effet sur

$$F(\epsilon) = [\boldsymbol{e}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(n)}, -\bar{\boldsymbol{a}}(\epsilon)], \quad \bar{\boldsymbol{a}}(\epsilon) = [a_n(\epsilon), \ldots, a_1(\epsilon)]^T,$$

est le suivant. Les δ_{v_q} premiers $\boldsymbol{e}^{(i)}$ sont transformés en $\epsilon^{v_q}\boldsymbol{e}^{(i)}$, les $\delta_{v_{q-1}}$ suivants en $\epsilon^{v_{q-1}}\boldsymbol{e}^{(i)}$, et ainsi de suite jusqu'aux $\delta_{v_1} - 1$ derniers. Il restera à montrer que la dernière colonne de la matrice ainsi obtenue est de valuation v_1.

Puisque seuls les δ_{v_j} sont non nuls, on a $\delta'_{v_j} = \sum_{i=M}^{v_j} \delta_i = \delta_{v_1} + \ldots + \delta_{v_j}$ et $\delta^*_{v_j} = \sum_{i=M}^{v_j} i\delta_i = v_1\delta_{v_1} + \ldots + v_j\delta_{v_j}$ et donc également $\delta'_{v_j} = \delta'_{v_{j-1}} + \delta_{v_j}$ et $\delta^*_{v_j} = \delta^*_{v_{j-1}} + v_j\delta_{v_j}$. Posons alors $P(\epsilon) = \mathrm{Diag}\,[P_q(\epsilon), \ldots, P_1(\epsilon)]$ avec, pour $1 \le j \le q$, $P_j(\epsilon)$ de dimension δ_{v_j} définie par

$$P_j(\epsilon) = \mathrm{diag}\,[\epsilon^{\delta^*_{v_j}}, \ldots, \epsilon^{2v_j+\delta^*_{v_{j-1}}}, \epsilon^{v_j+\delta^*_{v_{j-1}}}].$$

Il est clair que $P(\epsilon)$ transforme les $n-1$ premières colonnes de $F(\epsilon)$ comme on le souhaite. Examinons maintenant la dernière colonne. Partitionnée conformément à la structure par blocs de $P(\epsilon)$, elle s'écrit

$$-\bar{\boldsymbol{a}}(\epsilon) = -[\bar{\boldsymbol{a}}_q(\epsilon), \ldots, \bar{\boldsymbol{a}}_1(\epsilon)]^T,$$

où, pour $1 \le j \le q$, le vecteur $\bar{\boldsymbol{a}}_j(\epsilon)$ est d'ordre δ_{v_j} et vérifie

$$\bar{\boldsymbol{a}}_j(\epsilon) = [a_{\delta'_{v_j}}(\epsilon), \ldots, a_{2+\delta'_{v_{j-1}}}(\epsilon), a_{1+\delta'_{v_{j-1}}}(\epsilon)]^T.$$

Par conséquent, la dernière colonne $-\bar{\boldsymbol{b}}(\epsilon)$ de la matrice $P(\epsilon)^{-1}F(\epsilon)P(\epsilon)$ est telle que pour $1 \le j \le q$ et $1 \le k \le \delta_{v_j}$

$$b_{k+\delta'_{v_{j-1}}}(\epsilon) = a_{k+\delta'_{v_{j-1}}}(\epsilon)/\epsilon^{Y_{jk}}, \quad Y_{jk} = \delta^*_{v_{j-1}} + kv_j - v_1.$$

Montrons d'abord que ces composantes sont de valuation au moins v_1. Comme $\epsilon^{s_{v_j}}$ divise $p_{v_j}(\lambda, \epsilon)$, on a $\alpha_{k+\delta'_{v_{j-1}}} \ge X_{jk}$ avec $X_{jk} = s_{v_j} - v_j(n - k - \delta'_{v_{j-1}})$. En réécrivant la somme $\delta^*_{v_{j-1}}$ on voit que $X_{jk} = Y_{jk} + v_1$, ou encore $\delta^*_{v_{j-1}} = s_{v_j} - v_j(n - \delta'_{v_{j-1}})$. En effet,

$$\begin{aligned}
\delta^*_{v_{j-1}} &= v_j(\delta_{v_1} + \ldots + \delta_{v_{j-1}}) + (v_1 - v_j)\delta_{v_1} + \ldots + (v_{j-1} - v_j)\delta_{v_{j-1}} \\
&= v_j\delta'_{v_{j-1}} - \sum_{i=M}^{v_j-1}(v_j - i)\delta_i \quad \text{car les seuls } \delta_i \text{ non nuls sont } \delta_{v_1}, \ldots, \delta_{v_q}, \\
&= v_j\delta'_{v_{j-1}} - v_jn + s_{v_j} \quad \text{d'après la propriété 3.2(e).}
\end{aligned}$$

Montrons enfin que la valuation de la première composante $-b_n(\epsilon)$ de $-\bar{\boldsymbol{b}}(\epsilon)$ est exactement v_1. Puisque $P(\epsilon)^{-1}F(\epsilon)P(\epsilon)$ est semblable à $A(\epsilon)$ et a la même structure qu'un bloc compagnon, le coefficient de $p(\lambda,\epsilon) = \det(\lambda I - A(\epsilon))$ qui ne dépend pas de λ vérifie

$$a_n(\epsilon) = (-1)^n \epsilon^{v_q\delta_{v_q}+\ldots+v_2\delta_{v_2}+v_1(\delta_{v_1}-1)} b_n(\epsilon).$$

D'où $\operatorname{val} b_n(\epsilon) = v_1 + \alpha_n - \delta^*_{v_q}$ et donc $\operatorname{val} b_n(\epsilon) = v_1$ d'après la propriété 3.2(d). $\square$

Exemple 3.5 Reprenons l'exemple 3.4. Le profil de valuations de $A(\epsilon)$ est $[0,2,3,5] = [(1,0),(1,2),(1,3),(1,5)]$. Mais $r_1 = 1 \neq \delta_0 = 0$ et cette matrice n'est pas v-réduite. Elle est cependant semblable à, par exemple,

$$\tilde{A}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \epsilon^2 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^5 \end{bmatrix}$$

dont le profil de valuations est $[1,2,2,5] = [(1,1),(2,2),(1,5)]$. En observant que $\tilde{r}_1 = \delta_1$, $\tilde{r}_2 = \delta_2$ et $\tilde{r}_3 = \delta_5$ on conclut que la matrice $\tilde{A}(\epsilon)$ est une forme v-réduite de $A(\epsilon)$. $\diamond$

La forme v-réduite n'est bien sûr pas unique. Sur l'exemple 3.5 précédent, il suffit d'ajouter à la première colonne de $\tilde{A}(\epsilon)$ sa deuxième colonne et de soustraire ensuite la première ligne de la deuxième ligne pour obtenir la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \epsilon^2 & 0 \\ \epsilon^2 & \epsilon^2 & -\epsilon^2 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^5 \end{bmatrix}.$$

Son profil de valuations étant celui de $\tilde{A}(\epsilon)$, c'est une autre forme v-réduite pour $A(\epsilon)$.

3.5 Deux caractérisations

On propose dans cette partie deux caractérisations d'une forme v-réduite. La première justifie l'expression "indices minimaux en valuation" et la seconde permet de décider si une perturbation de matrice est v-réduite en utilisant seulement un nombre fini de ces coefficients.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note η_k le nombre de colonnes de $A(\epsilon)$ de valuation k. D'après la factorisation d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^i)$ de $A(\epsilon)$ définie par (3.1) on a en particulier

$$\det D_i(\epsilon) = \epsilon^{\sum_{k=0}^{i-1}(i-k)\eta_k}. \tag{3.4}$$

Cette égalité sera utilisée pour chacune des deux caractérisations ci-dessous, tout comme la propriété suivante qui permet de borner les δ_i à partir du profil de valuations de $A(\epsilon)$.

Propriété 3.3 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\le j\le q}$. Pour $j \in \{1, \dots, q\}$ fixé on suppose que $r_k = \delta_{v_k}$, $k = 1, \dots, j-1$. Alors $\delta_i = 0$ pour tout $i < v_j$ tel que $i \notin \{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}\}$. De plus $r_j \ge \delta_{v_j}$.*

Preuve. Soit $i \le v_j$ tel que $i \notin \{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}\}$. La factorisation d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{i+1})$ de $A(\epsilon)$ définie par (3.1) conduit à

$$p_{i+1}(\lambda, \epsilon) = \epsilon^{(i+1)n} \det D_{i+1}^{-1}(\epsilon) \det(\lambda D_{i+1}(\epsilon) - C_{i+1}(\epsilon)).$$

D'après (3.4) et comme $\mathrm{val}\,(C_{i+1}(\epsilon) - \lambda D_{i+1}(\epsilon)) \ge 0$ on obtient pour la valuation de $p_{i+1}(\lambda, \epsilon)$ la minoration

$$s_{i+1} \ge (i+1)n - \sum_{k=0}^{i}(i-k+1)\eta_k \tag{3.5}$$

c'est-à-dire

$$\eta_i \ge (i+1)n - s_{i+1} - \sum_{k=0}^{i-1}(i-k+1)\eta_k.$$

D'après la propriété 3.2(e) cela s'écrit

$$\eta_i \ge \delta_i + \sum_{k=M}^{i-1}(i-k+1)\delta_k - \sum_{k=0}^{i-1}(i-k+1)\eta_k.$$

Par hypothèse et comme $k \le i-1 < v_j$, les η_k de la deuxième somme dans le membre de droite sont soit nuls soit égaux à δ_{v_k}; ils s'éliminent donc avec les termes correspondants dans la première sommme. Tous les δ_k restants étant positifs ou nuls (propriété 3.2(a)) on a finalement $\eta_i \ge \delta_i$. Le profil de valuations de $A(\epsilon)$ permet de conclure. □

3.5.1 Profil de valuations maximal

Partant d'une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\le j\le q}$ et d'un entier naturel k, désignons par $\mathcal{O}_k(A(\epsilon))$ l'ensemble des perturbations de matrices $\tilde{A}(\epsilon)$ semblables à $A(\epsilon)$ telles que $\tilde{\eta}_l = \eta_l$ pour $l = 0, \dots, k$, c'est-à-dire dont les nombres de colonnes de valuation au plus k coïncident avec ceux de $A(\epsilon)$. En notant $\mathcal{O}_{-1}(A(\epsilon))$ l'ensemble des perturbations de matrices semblables à $A(\epsilon)$, on a alors les inclusions

$$\mathcal{O}(A(\epsilon)) \supset \mathcal{O}_{-1}(A(\epsilon)) \supset \mathcal{O}_0(A(\epsilon)) \supset \mathcal{O}_1(A(\epsilon)) \supset \ldots \supset \mathcal{O}_{v_q}(A(\epsilon)) = \mathcal{O}_{v_{q+1}}(A(\epsilon)) = \ldots.$$

En particulier, dès que $i \geq v_q$, $\mathcal{O}_i(A(\epsilon))$ est l'ensemble des perturbations de matrices de même profil de valuations que $A(\epsilon)$. D'autre part, pour $j \in \{1, \ldots, q\}$ l'ensemble $\mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$ est formé de toutes les perturbations de matrices semblables à $A(\epsilon)$ dont les nombres de colonnes de valuation inférieure à v_j sont les mêmes que pour $A(\epsilon)$. Lorsque $j = 1$, $\mathcal{O}_{v_1-1}(A(\epsilon))$ est donc l'ensemble des perturbations de matrices semblables à $A(\epsilon)$ de valuation au moins $v_1 = \operatorname{val} A(\epsilon)$.

Le lemme 3.1 ci-dessous est à la base d'une première caractérisation d'une forme v-réduite. Il justifie de plus l'expression "indices minimaux en valuation" introduite au paragraphe 3.3 en exprimant que δ_{v_1} est le nombre minimal de colonnes de $A(\epsilon)$ de valuation v_1 dans $\mathcal{O}_{v_1-1}(A(\epsilon))$, puis que δ_{v_2} est le nombre minimal de ses colonnes de valuation v_2 dans $\mathcal{O}_{v_2-1}(A(\epsilon))$ etc.

Lemme 3.1 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$. Pour $j \in \{1, \ldots, q\}$ fixé supposons que $r_k = \delta_{v_k}$, $k = 1, \ldots, j-1$. Alors $r_j = \delta_{v_j}$ si et seulement si r_j est minimal dans $\mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$.*

Preuve. Nous montrons d'abord que si $r_j = \eta_{v_j}$ n'est pas minimal dans $\mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$ alors $r_j > \delta_{v_j}$. Soit $\tilde{A}(\epsilon) \in \mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$ telle que $\tilde{\eta}_{v_j} < \eta_{v_j}$. En appliquant (3.5) à $\tilde{A}(\epsilon)$ avec $i = v_j$ on obtient

$$s_{v_j+1} \geq (v_j+1)n - \sum_{k=1}^{j-1}(v_j - v_k + 1)\delta_{v_k} - \tilde{\eta}_{v_j} > (v_j+1)n - \sum_{k=1}^{j-1}(v_j - v_k + 1)\delta_{v_k} - \eta_{v_j}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\eta_{v_j} &> (v_j+1)n - s_{v_j+1} - \sum_{k=1}^{j-1}(v_j - v_k + 1)\delta_{v_k} \\ &> \delta_{v_j} + \sum_{i=M}^{v_j-1}(v_j - i + 1)\delta_i - \sum_{k=1}^{j-1}(v_j - v_k + 1)\delta_{v_k} \quad \text{d'après la propriété 3.2(e),}\end{aligned}$$

et finalement $r_j = \eta_{v_j} > \delta_{v_j}$ car les δ_i sont positifs ou nuls (propriété 3.2(a)). Réciproquement, supposons que r_j est minimal dans $\mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$ et montrons qu'alors $r_j = \delta_{v_j}$. D'après la propriété 3.3 $\delta_i = 0$ pour tout $i < v_j$ tel que $i \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}$. Par ailleurs les $\delta_{v_1}, \delta_{v_2}, \ldots, \delta_{v_{j-1}}$ sont tous non nuls car égaux, par hypothèse, à des nombres de colonnes de $A(\epsilon)$. Ce sont donc les $j-1$ premiers indices minimaux en valuation de $A(\epsilon)$. Si $\tilde{A}(\epsilon)$ désigne une forme v-réduite de $A(\epsilon)$ (théorème 3.2) on a donc $\tilde{A}(\epsilon) \in \mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$ et en particulier $\tilde{\eta}_{v_j} = \delta_{v_j} \geq r_j$. Comme $r_j \geq \delta_{v_j}$ (propriété 3.3) on obtient $r_j = \delta_{v_j}$. □

Rappelons que les colonnes de $A(\epsilon)$ ont été supposées rangées par ordre de valuations croissantes. Par conséquent, la minimisation du nombre des colonnes de plus petite valuation introduit en général des colonnes de valuation supérieure, faisant ainsi croître le profil de valuations par rapport à l'ordre lexicographique (voir la remarque 3.1 en début de chapitre). En répétant ce procédé avec des colonnes de valuations de plus en plus grandes, on finit par maximiser le profil de valuations dans l'orbite de $A(\epsilon)$. En effet, $\beta_n < +\infty$ désignant le plus grand exposant dominant pour les valeurs propres de $A(\epsilon)$ supposée inversible, on a $\mathrm{vp}\,\tilde{A}(\epsilon) \leq [\beta_n, \ldots, \beta_n]$ pour tout $\tilde{A}(\epsilon) \in \mathcal{O}(A(\epsilon))$ et l'ensemble des profils de valuations des matrices semblables à $A(\epsilon)$ admet un unique maximum.

Théorème 3.3 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $A(\epsilon)$ est v-réduite.

(ii) Le profil de valuations de $A(\epsilon)$ est maximal dans $\mathcal{O}(A(\epsilon))$ au sens lexicographique.

Preuve. On applique le lemme 3.1 successivement pour $j = 1, 2, \ldots, q$. □

Exemple 3.6 Reprenons les exemples 3.4 et 3.5 en introduisant une autre matrice, notée $\hat{A}(\epsilon)$, semblable à $A(\epsilon)$ et $\tilde{A}(\epsilon)$:

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \epsilon^3 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^5 \end{bmatrix} \sim \hat{A}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \epsilon^6 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^2 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \tilde{A}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \epsilon^2 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^5 \end{bmatrix}.$$

Leurs profils de valuations respectifs vérifient

$$[0, 2, 3, 5] < [1, 1, 2, 6] < [1, 2, 2, 5].$$

On déduit alors du théorème 3.3 que ni $A(\epsilon)$ ni $\hat{A}(\epsilon)$ ne sont v-réduites. Si l'on sait de plus que $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 2$ et $\delta_5 = 1$ on en déduit que $\tilde{A}(\epsilon)$ est v-réduite. Ainsi son profil de valuations $[1, 2, 2, 5]$ est le profil de valuations maximal dans $\mathcal{O}(A(\epsilon))$. ◇

Cette première caractérisation a pour intérêt principal de suggérer une méthode de calcul d'une forme v-réduite d'une perturbation de matrice $A(\epsilon)$ quelconque. Elle consiste à minimiser successivement par similitude des nombres de colonnes de valuations croissantes.

Nous proposerons au paragraphe 3.6 des algorithmes correspondants, qui généralisent les algorithmes de minimisation du rang dominant et de maximisation de la valuation étudiés au chapitre 2.

Cependant une telle caractérisation ne permet pas de décider si $A(\epsilon)$ est v-réduite ou non sans recourir aux valeurs de la suite $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui est définie à partir du polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$. C'est pourquoi nous présentons au paragraphe suivant une seconde caractérisation, basée sur la seule connaissance d'un nombre fini de coefficients de $A(\epsilon)$.

3.5.2 Polynômes quasi-Newton d'ordre entier

Pour $i \in \mathbb{N}$, soit

$$\varphi_i(\lambda,\epsilon) = \det(C_i(\epsilon) - \lambda D_i(\epsilon)).$$

Lorsque $\varphi_i(\lambda,0) = \det(C_{i0} - \lambda D_{i0})$ est non identiquement nul, c'est un polynôme quasi-Newton $\theta_i(\lambda)$ d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^i)$ associé à $A(\epsilon)$. D'après la définition de $D_i(\epsilon)$ les polynômes $\varphi_i(\lambda,\epsilon)$ et $\varphi_i(\lambda,0)$ dépendent du profil de valuations de $A(\epsilon)$. Ce ne sont donc pas des invariants de $A(\epsilon)$, contrairement à $p_i(\lambda,\epsilon)$. Cependant $\varphi_i(\lambda,0)$ ne peut prendre que deux valeurs, zéro ou $\theta_i(\lambda)$ qui est non nul par définition. Puisque $\varphi_i(\lambda,0)$ est nul si et seulement si la valuation de $\varphi_i(\lambda,\epsilon)$ est positive, explicitons $\operatorname{val}\varphi_i(\lambda,\epsilon)$ en fonction du profil de valuations et du polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$. En remplaçant cette matrice par sa factorisation d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^i)$ dans la définition de $p_i(\lambda,\epsilon)$, on trouve

$$\varphi_i(\lambda,\epsilon) = (-1)^n\epsilon^{-in}\det D_i(\epsilon)p_i(\lambda,\epsilon)$$

et donc d'après (3.4)

$$\operatorname{val}\varphi_i(\lambda,\epsilon) = s_i - in + \sum_{k=0}^{i-1}(i-k)\eta_k. \tag{3.6}$$

De la même façon qu'on avait obtenu au chapitre 2 un polynôme quasi-Newton d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$ en ne considérant que $v_1 = 0$, on s'intéresse désormais aux polynômes $\varphi_{v_j+1}(\lambda,0)$ pour $j = 1,\dots,q$ afin de caractériser une forme v-réduite à l'aide de polynômes quasi-Newton d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{v_j+1})$.

Lemme 3.2 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice de profil de valuations $[(r_j,v_j)]_{1\le j\le q}$. Pour $j \in \{1,\dots,q\}$ fixé, supposons que $r_k = \delta_{v_k}$, $k = 1,\dots,j-1$. Alors $r_j = \delta_{v_j}$ si et seulement si $\varphi_{v_j+1}(\lambda,0) \neq 0$.*

Preuve. Le polynôme $\varphi_{v_j+1}(\lambda, 0)$ est non nul si et seulement si val $\varphi_{v_j+1}(\lambda, \epsilon) = 0$. C'est-à-dire, par hypothèse et d'après (3.6),

$$r_j = (v_j + 1)n - s_{v_j+1} - \sum_{k=1}^{j-1}(v_j - v_k + 1)\delta_{v_k}.$$

Montrons que le membre de droite vaut δ_{v_j}. On a $(v_j + 1)n - s_{v_j+1} = \sum_{i=M}^{v_j}(v_j - i + 1)\delta_i$ d'après la propriété 3.2(e). En appliquant la propriété 3.3 cette somme se réduit à $\delta_{v_j} + \sum_{k=1}^{j-1}(v_j - v_k + 1)\delta_{v_k}$, ce qui permet de conclure. □

Théorème 3.4 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $A(\epsilon)$ est v-réduite.

(ii) $\varphi_{v_1+1}(\lambda, 0) \neq 0, \ldots, \varphi_{v_q+1}(\lambda, 0) \neq 0$.

Preuve. On applique le lemme 3.2 successivement pour $j = 1, 2, \ldots, q$. □

Remarque 3.2 Si $A(\epsilon)$ est v-réduite alors sa dernière condition de régularité "$\Delta_q \neq 0$" est toujours vérifiée car $\varphi_{v_q+1}(\lambda, 0) = \Delta_q$.

Exemple 3.7 Calculons quelques polynômes $\varphi_i(\lambda, 0)$ associés à chacune des trois matrices $A(\epsilon)$, $\hat{A}(\epsilon)$, $\tilde{A}(\epsilon)$ de l'exemple 3.6 précédent.

Pour $A(\epsilon)$, on a $v_1 = 0$ donc le premier polynôme à calculer est $\varphi_1(\lambda, 0)$. Or

$$\varphi_1(\lambda, 0) = \det \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right] = 0$$

et on retrouve le fait que $A(\epsilon)$ n'est pas v-réduite d'après le théorème 3.4. En particulier le lemme 3.2 nous indique que $r_1 = 1$, le nombre de colonnes de $A(\epsilon)$ de valuation $v_1 = 0$, n'est pas minimal dans $\mathcal{O}_0(A(\epsilon))$. En effet, $A(\epsilon)$ est semblable à $\hat{A}(\epsilon)$ de valuation $\hat{v}_1 = 1$. Calculons alors $\hat{\varphi}_2(\lambda, 0)$. On a

$$\hat{\varphi}_2(\lambda, 0) = \det \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right] = 0.$$

Par conséquent, $\hat{A}(\epsilon)$ n'est pas v-réduite car $\hat{v}_1 = 2$ n'est pas minimal dans $\mathcal{O}_0(\hat{A}(\epsilon))$, l'ensemble des matrices de valuation au moins 1 semblables à $\hat{A}(\epsilon)$. Enfin, $\tilde{A}(\epsilon)$ est telle que $\tilde{v}_1 = 1$, $\tilde{v}_2 = 2$ et $\tilde{v}_3 = 5$. Calculons les trois polynômes associés $\tilde{\varphi}_2(\lambda, 0)$, $\tilde{\varphi}_3(\lambda, 0)$ et $\tilde{\varphi}_6(\lambda, 0)$.

$$\tilde{\varphi}_2(\lambda, 0) = \det \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right] = \lambda(1-\lambda)\,,$$

$$\tilde{\varphi}_3(\lambda, 0) = \det \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{array}\right] = \lambda\,, \quad \tilde{\varphi}_6(\lambda, 0) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -1\,,$$

et on déduit du théorème 3.4 que $\tilde{A}(\epsilon)$ est v-réduite. $\diamond$

Cette seconde caractérisation est plus effective que la première dans la mesure où elle n'impose pas de connaître le polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$ mais utilise seulement $A(\epsilon) \bmod \epsilon^{v_q+1}$. Elle généralise de plus la caractérisation de Moser [46] vue au chapitre précédent: la proposition 2.2 correspond en effet à la minimisation du nombre de colonnes de $A(\epsilon)$ de valuation $v_1 = 0$.

Quant aux polynômes quasi-Newton $\varphi_{v_1+1}(\lambda, 0), \ldots, \varphi_{v_q+1}(\lambda, 0)$ du théorème 3.4 ils indiquent d'après le lemme 1.2 les termes dominants de toutes les valeurs propres dont la valuation est l'un des $v_j + 1$. Sur l'exemple précédent, on déduit de $\tilde{\varphi}_2(\lambda, 0) = \lambda(1-\lambda)$ que $A(\epsilon)$ possède une seule valeur propre d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^2)$ et que celle-ci est de la forme $\lambda(\epsilon) = \epsilon^2 + \mathrm{o}(\epsilon^2)$. En revanche, il est à ce stade impossible de conclure qu'il existe une valeur propre de valuation 5 comme cela a été annoncé dans l'exemple 3.4 à partir du polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$. En général, l'ensemble $\{\varphi_{v_1+1}(\lambda, 0), \ldots, \varphi_{v_q+1}(\lambda, 0)\}$ ne permet donc pas de déterminer les termes dominants de toutes les valeurs propres de valuation entière. Nous résoudrons ce problème au paragraphe 3.7.

Enfin, comme chaque condition de régularité "$\Delta_j \neq 0$" implique $\varphi_{v_j+1}(\lambda, 0) \neq 0$, on déduit du théorème 3.4 le corollaire suivant.

Corollaire 3.3 *Toute perturbation quasi-générique à profil de valuations fixé est v-réduite.*

Pour les autres, c'est-à-dire pour toutes les perturbations de matrices qui ne seraient pas quasi-génériques à profil de valuations fixé, nous allons voir maintenant comment les ramener à une forme v-réduite par similitude polynomiale. Une condition suffisante pour que la réciproque du corollaire 3.3 soit vraie apparaîtra de façon naturelle grâce au polygone de Newton (paragraphe 3.8, corollaire 3.11).

3.6 Calcul d'une forme v-réduite par similitude polynomiale

Le lemme 3.1 nous indique comment procéder: on cherche à déterminer un indice minimal donné en supposant tous les précédents déjà calculés. On s'arrête dès que la somme des indices obtenus vaut n. On considère donc une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$ telle que $r_k = \delta_{v_k}$ pour $k = 1, \ldots, j-1$. Le point essentiel de ce paragraphe est d'arriver à faire décroître r_j par similitude polynomiale. Cela conduira alors immédiatement à un algorithme de maximisation du profil de valuations.

Rappelons que η_i est le nombre de colonnes de $A(\epsilon)$ de valuation i et que $r'_j = \sum_{i=1}^{j} r_i$.

3.6.1 Compression de colonnes par similitude non constante

Si les colonnes non nulles de C_{v_j0} sont liées alors $\varphi_{v_j+1,0}(\lambda, 0) = 0$ et r_j n'est pas minimal dans $\mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$ (lemme 3.2). La première chose à faire est donc de compresser les colonnes de C_{v_j0} au moyen d'une similitude appliquée à $A(\epsilon)$. Comme les éléments de C_{v_j0} correspondent par définition à des colonnes de $A(\epsilon)$ de valuations différentes, la similitude à utiliser dépend nécessairement de ϵ. C'est la différence essentielle avec la décroissance du rang dominant étudiée au paragraphe 2.2.1 où il suffisait de compresser les colonnes non nulles de A_0 par similitude constante.

Lemme 3.3 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$. Pour $j \in \{1, \ldots, q\}$ fixé on suppose que $r_k = \delta_{v_k}$, $k = 1, \ldots, j-1$. Soient $V \in \mathsf{K}^{n\times n}$ une matrice inversible telle que $C_{v_j0}V$ soit échelonnée en colonnes, et*

$$L(\epsilon) = \mathrm{Diag}\,[\epsilon^{v_j - v_1} I_{r_1}, \ldots, \epsilon^{v_j - v_{j-1}} I_{r_{j-1}}, I_{n-r'_{j-1}}] \in \mathsf{K}[\epsilon]^{n\times n}.$$

Alors la similitude $V(\epsilon) = L(\epsilon)V$ transforme $A(\epsilon)$ en la perturbation de matrice $\tilde{A}(\epsilon) = V^{-1}(\epsilon)A(\epsilon)V(\epsilon) \in \mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$ de profil de valuations $[(\tilde{r}_j, \tilde{v}_j)]_{1\leq j\leq \tilde{q}}$ et telle que

$$\tilde{C}_{\tilde{v}_j0} = \left[\begin{array}{c||c} \tilde{C}^{11}_{\tilde{v}_j0} & O \\ \hline\hline \tilde{C}^{21}_{\tilde{v}_j0} & O \end{array}\right], \quad \tilde{C}^{11}_{\tilde{v}_j0} \in \mathsf{K}^{\tilde{r}'_j\times\tilde{r}'_j}, \quad \tilde{r}'_j = \mathrm{rg}\,\tilde{C}_{\tilde{v}_j0}. \tag{3.7}$$

Preuve. Par hypothèse et d'après le lemme 3.2 on a $\varphi_{v_{j-1}+1}(\lambda, 0) \neq 0$, ce qui entraîne que les r'_{j-1} premières colonnes de C_{v_j0} sont linéairement indépendantes. La matrice de passage $V(\epsilon)$ définit donc des opérations élémentaires de la forme

$$C_l \leftarrow C_l - a_{kl}\epsilon^{b_{kl}} C_k\,, \quad R_k \leftarrow R_k + a_{kl}\epsilon^{b_{kl}} R_l$$

avec $b_{kl} \geq 0$, $k < l$ et $l = r'_{j-1}+1, \ldots, r'_j$. Les opérations de colonnes ont clairement pour effet d'échelonner $C_{v_j 0}$ en colonnes; quant aux opérations de lignes, elle ne modifient pas le profil de valuations de $A(\epsilon)V(\epsilon)$. En effet, la valuation d'une colonne ne peut ni augmenter ni diminuer car $b_{kl} \geq 0$. □

3.6.2 Calcul d'une forme v-réduite par similitude polynomiale

Quitte à remplacer $A(\epsilon)$ par $V^{-1}(\epsilon)A(\epsilon)V(\epsilon)$ avec $V(\epsilon)$ définie dans le lemme 3.3 nous pouvons supposer que la matrice $C_{v_j 0}$ associée à $A(\epsilon)$ a la structure décrite par (3.7)

$$C_{v_j 0} = \left[\begin{array}{c||c} C^{11}_{v_j 0} & O \\ \hline\hline C^{21}_{v_j 0} & O \end{array}\right], \quad C^{11}_{v_j 0} \in \mathsf{K}^{r'_j \times r'_j}, \quad r'_j = \operatorname{rg} C_{v_j 0}. \tag{3.8}$$

C'est l'analogue de la structure (2.2) attribuée à A_0 au chapitre 2. (Choisir $v_j = 0$ pour retrouver $C_{00} = A_0$ et $r'_j = \operatorname{rg} A_0$.) Mais ici les r'_j premières colonnes de $C_{v_j 0}$ correspondent à des colonnes de $A(\epsilon)$ de valuation appartenant à $\{v_1, v_2, \ldots, v_j\}$. On a alors pour la factorisation d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{v_j+1})$

$$C_{v_j+1,0} = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c||c} C^{11}_{v_j 0} & A^{12}_{v_j+1} \\ \hline\hline C^{21}_{v_j 0} & A^{22}_{v_j+1} \end{array}\right] & \begin{array}{l} r'_j \\ n - r'_j \end{array} \\ \begin{array}{cc} r'_j & n - r'_j \end{array} & \end{array}$$

et $D_{v_j+1,0} = \operatorname{Diag}[O_{r'_j}, I_{n-r'_j}]$. Comme au chapitre 2 nous désignons par $\bar{r}'_j$ le plus petit entier compris entre r'_j et n tel que les $n - \bar{r}'_j$ dernières lignes de $C_{v_j+1,0}$ forment une matrice triangulaire supérieure stricte, et par $\bar{C}_{v_j+1,0}$ la sous-matrice principale de $C_{v_j 0}$ d'ordre $\bar{r}'_j$. On peut alors partitionner $C_{v_j+1,0}$ en 9 blocs

$$C_{v_j+1,0} = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c||c|c} C^{11}_{v_j 0} & A^{12a}_{v_j+1} & A^{12b}_{v_j+1} \\ \hline\hline C^{21a}_{v_j 0} & A^{22a}_{v_j+1} & A^{22b}_{v_j+1} \\ \hline O & O & A^{22d}_{v_j+1} \end{array}\right] & \begin{array}{l} r'_j \\ \bar{r}'_j - r'_j \\ n - \bar{r}'_j \end{array} \\ \begin{array}{ccc} r'_j & \bar{r}'_j - r'_j & n - \bar{r}'_j \end{array} & \end{array} \tag{3.9}$$

avec $A^{22d}_{v_j+1}$ triangulaire supérieure stricte. De plus,

$$\bar{C}_{v_j+1,0} = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c||c} C^{11}_{v_j 0} & A^{12a}_{v_j+1} \\ \hline\hline C^{21a}_{v_j 0} & A^{22a}_{v_j+1} \end{array}\right] & \begin{array}{l} r'_j \\ \bar{r}'_j - r'_j \end{array} \\ \begin{array}{cc} r'_j & \bar{r}'_j - r'_j \end{array} & \end{array} \quad \text{et} \quad C_{v_j+1,0} = \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c|c} \bar{C}_{v_j+1,0} & * \\ \hline O & A^{22d}_{v_j+1} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \bar{r}'_j \\ n - \bar{r}'_j \end{array} \\ \begin{array}{cc} \bar{r}'_j & n - \bar{r}'_j \end{array} & \end{array}.$$

Lemme 3.4 *Si* $\det \bar{C}_{v_j+1,0} \neq 0$ *alors* r_j *est minimal dans* $\mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$.

Preuve. Supposons qu'il existe une perturbation de matrice $\tilde{A}(\epsilon) \in \mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$ telle que $\tilde{r}_j < r_j$. Comme $A(\epsilon)/\epsilon^{v_j+1}$ et $\tilde{A}(\epsilon)/\epsilon^{v_j+1}$ sont semblables et d'après les factorisations d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{v_j+1})$ de $A(\epsilon)$ et $\tilde{A}(\epsilon)$, on a

$$\det(C_{v_j+1}(\epsilon) - \lambda D_{v_j+1}(\epsilon)) = \det D_{v_j+1}(\epsilon) \det \tilde{D}^{-1}_{v_j+1}(\epsilon) \det(\tilde{C}_{v_j+1}(\epsilon) - \lambda \tilde{D}_{v_j+1}(\epsilon)).$$

Puisque $\tilde{A}(\epsilon) \in \mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$ l'équation (3.4) entraîne $\det D_{v_j+1}(\epsilon) \det \tilde{D}^{-1}_{v_j+1}(\epsilon) = \epsilon^{r_j - \tilde{r}_j}$ avec $\tilde{r}_j < r_j$. Par conséquent $\det(C_{v_j+1,0} - \lambda D_{v_j+1,0}) = 0$ et donc $\operatorname{rg} \bar{C}_{v_j+1,0} < \bar{r}'_j$. $\square$

Lemme 3.5 *Soit* $\tilde{r}'_j = \operatorname{rg}[C^{11}_{v_j0} || A^{12a}_{v_j+1}]$. *Si* $\tilde{r}'_j < r'_j$, *c'est-à-dire si les* r'_j *premières lignes de* $\bar{C}_0$ *sont linéairement dépendantes, alors la similitude* $P(\epsilon) = \operatorname{Diag}[\epsilon I_{r'_j}, I_{\bar{r}'_j - r'_j}, \epsilon I_{n-\bar{r}'_j}]$ *transforme* $A(\epsilon)$ *en la perturbation de matrice* $\tilde{A}(\epsilon) = P^{-1}(\epsilon) A(\epsilon) P(\epsilon) \in \mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$ *telle que* $\operatorname{rg} \tilde{C}_{v_j0} = \tilde{r}'_j < \operatorname{rg} C_{v_j0}$.

Preuve. La similitude $P(\epsilon)$ transforme en particulier

$$C_{v_j0} = \left[\begin{array}{c||c|c} C^{11}_{v_j0} & O & O \\ \hline C^{21a}_{v_j0} & O & O \\ \hline\hline O & O & O \end{array}\right] \quad \text{et} \quad A_{v_j+1} = \left[\begin{array}{c||c|c} A^{11}_{v_j+1} & A^{12a}_{v_j+1} & A^{12b}_{v_j+1} \\ \hline\hline A^{21a}_{v_j+1} & A^{22a}_{v_j+1} & A^{22b}_{v_j+1} \\ \hline A^{21c}_{v_j+1} & O & A^{22d}_{v_j+1} \end{array}\right]$$

en, respectivement,

$$\tilde{C}_{v_j0} = \left[\begin{array}{c||c|c} C^{11}_{v_j0} & A^{12a}_{v_j+1} & O \\ \hline O & O & O \\ \hline\hline O & O & O \end{array}\right] \quad \text{et} \quad \tilde{A}_{v_j+1} = \left[\begin{array}{c||c|c} A^{11}_{v_j+1} & * & A^{12b}_{v_j+1} \\ \hline\hline C^{21a}_{v_j0} & A^{22a}_{v_j+1} & O \\ \hline A^{21c}_{v_j+1} & * & A^{22d}_{v_j+1} \end{array}\right],$$

les $*$ désignant des blocs d'éléments de A_{v_j+2}. $\square$

On déduit de ces deux lemmes l'algorithme 3.1 (`VPI`) de décroissance du nombre colonnes de $A(\epsilon)$ de valuation v_j par similitude dans $\mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$ de la même manière qu'on avait obtenu l'algorithme 2.1 (`LRD`) de décroissance du rang dominant. C'est bien sûr une façon de faire croître le profil de valuations de $A(\epsilon)$ dans $\mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$. La seule différence avec l'algorithme 2.1 (`LRD`) de décroissance du rang dominant est l'étape (1) où l'on compresse les composantes de colonnes de valuations différentes. (A l'étape (5) on fait aussi une compression de colonnes, mais dans le seul but de lire $\tilde{r}'_j$ comme le nombre de colonnes de $\tilde{A}(\epsilon)$ de valuation v_j car le rang $\tilde{r}'_j$ de $\tilde{C}_{v_j0}$ est connu depuis l'étape (4) d'après le lemme 3.5.) Toutes les similitudes constantes appliquées lors des étapes suivantes ne modifient

Procédure `VPI [Valuation Profile Increase]`

Entrée: - une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ avec $\mathrm{vp}\, A(\epsilon) = [(r_j, v_j)]_{1\le j\le q}$.

- un entier $j \in \{1,\dots,q\}$ tel que $r_k = \delta_{v_k}$ pour $k = 1,\dots,j-1$.

Sortie: - une perturbation de matrice $\tilde{A}(\epsilon) \in \mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$ telle que $\tilde{r}_j = \tilde{\eta}_{v_j} \le r_j$.

- les entiers r'_j et $\tilde{r}'_j$.

- éventuellement, une matrice de passage $P(\epsilon)$ polynomiale (et son inverse).

(1) [Compression des colonnes de C_{v_j0} et initialisations]

$A(\epsilon) \leftarrow V^{-1}(\epsilon)A(\epsilon)V(\epsilon)$ avec $V(\epsilon)$ définie par le lemme 3.4.

$r'_j \leftarrow \mathrm{rg}\, C_{v_j0}$.

si $r'_j = 0$ ou $r'_j = n$, $\tilde{r}'_j \leftarrow r'_j$ et aller en (5).

$\bar{r}'_j \leftarrow n$, $\bar{C}_{v_j+1,0} \leftarrow C_{v_j+1,0}$.

(2) [Calculer le rang des r'_j premières lignes de $\bar{C}_{v_j+1,0}$]

$P_1 \leftarrow \mathrm{Diag}\,[U_1, I_{n-r'_j}]$ avec $U_1[C^{11}_{v_j0}||A^{12a}_{v_j+1}]$ échelonnée en lignes, de rang $\tilde{r}'_j$.

$A(\epsilon) \leftarrow P_1A(\epsilon)P_1^{-1}$.

(3) [Boucle principale]

tant que $\tilde{r}'_j = r'_j$

(3.1) [Echelonner en lignes, sans pivotage, ce qui reste de $\bar{C}_{v_j+1,0}$]

$P_2 \leftarrow \mathrm{Diag}\,[U_2, I_{n-\bar{r}'_j}]$ avec $U_2\bar{C}_{v_j+1,0}$ échelonnée en lignes, de rang $\bar{r}_j$.

si $\bar{C}_{v_j+1,0}$ est de plein rang

aller en (5)

sinon

(3.2) [Calculer une permutation S annulant les dernières lignes de $U_2\bar{C}_{v_j+1,0}$]

$P_3 \leftarrow \mathrm{Diag}\,[I_r, S, I_{n-\bar{r}'_j}]$.

$A(\epsilon) \leftarrow P_3P_2A(\epsilon)P_2^{-1}P_3^{-1}$.

(3.3) [Mise à jour de $\bar{r}'_j$ et $\bar{C}_{v_j+1,0}$]

$\bar{r}'_j \leftarrow \bar{r}_j$.

$\bar{C}_{v_j+1,0} \leftarrow$ la sous-matrice principale de $C_{v_j+1,0}$ d'ordre $\bar{r}'_j$.

(3.4) [Calculer le rang des r'_j premières lignes de $\bar{C}_{v_j+1,0}$]

$P_4 \leftarrow \mathrm{Diag}\,[U_3, I_{n-r'_j}]$ avec $U_3[C^{11}_{v_j0}||A^{12a}_{v_j+1}]$ échelonnée en lignes, de rang $\tilde{r}'_j$.

$A(\epsilon) \leftarrow P_4A(\epsilon)P_4^{-1}$.

(4) [Décroissance stricte du nombre de colonnes de valuation v_j]

$P_5(\epsilon) \leftarrow \mathrm{Diag}\,[\epsilon I_{r'_j}, I_{\bar{r}'_j-r'_j}, \epsilon I_{n-\bar{r}'_j}]$.

$A(\epsilon) \leftarrow P_5^{-1}(\epsilon)A(\epsilon)P_5(\epsilon)$.

(5) [Compression des colonnes de C_{v_j0} et résultat]

$\tilde{A}(\epsilon) \leftarrow V^{-1}(\epsilon)A(\epsilon)V(\epsilon)$ avec $V(\epsilon)$ définie par le lemme 3.4.

$\tilde{r}'_j \leftarrow \mathrm{rg}\,\tilde{C}_{v_j0}$.

retourner la matrice $\tilde{A}(\epsilon)$ et les entiers r'_j et $\tilde{r}'_j$.

Algorithme 3.1: Décroissance du nombre de colonnes de $A(\epsilon)$ de valuation v_j dans $\mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$

pas les valuations des r'_{j-1} premières colonnes de la matrice courante pour les mêmes raisons que celles données dans la preuve de la proposition 2.1. D'où le résultat suivant.

Corollaire 3.4 *Soient $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$. Pour $j \in \{1,\ldots,q\}$ la procédure* `VPI` *calcule au moyen d'une matrice polynomiale $P(\epsilon)$ inversible de degré au plus 1 une matrice $\tilde{A}(\epsilon) \in \mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$ telle que $\tilde{r}_j \leq r_j$. Il y a égalité si et seulement si r_j est le j-ième indice minimal en valuation de la matrice $A(\epsilon)$ en entrée.*

On déduit du lemme 3.1 que si $\tilde{r}'_j = r'_j$ alors r_j est le j-ième indice minimal en valuation de la matrice $A(\epsilon)$. Sinon il suffit de repéter les appels à la procédure `VPI` afin de minimiser r_j dans $\mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$. En itérant sur j on finit alors par maximiser le profil de valuations de $A(\epsilon)$ (théorème 3.4). C'est l'algorithme 3.2 (`VRF`) suivant.

Algorithme `VRF [Valuation Reduced Form]`

Entrée: - une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ avec vp $A(\epsilon) = [(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$.
Sortie: - une forme v-réduite $\tilde{A}(\epsilon)$ semblable à $A(\epsilon)$.
- la liste $\mathcal{I}$ des indices minimaux en valuation de $A(\epsilon)$.
- éventuellement, une matrice de passage $P(\epsilon)$ polynomiale (et son inverse).

(1) [Initialisations]
$\mathcal{I} \leftarrow \emptyset$, $\sigma \leftarrow 0$, $j \leftarrow 1$.
(2) [Maximisation du profil de valuations]
tant que $\sigma \neq n$
(2.1) [Appeler la procédure `VPI` avec $A(\epsilon)$ et j]
$r'_j \leftarrow \sum_{i=1}^{j} r_i$, $\tilde{r}'_j \leftarrow \sum_{i=1}^{j} \tilde{r}_i$, $A(\epsilon) \leftarrow \tilde{A}(\epsilon)$.
(2.2) recommencer (2.1) jusqu'à ce que $\tilde{r}'_j = r'_j$.
(2.3) [Ici $A(\epsilon)$ est telle que r_j est minimal dans $\mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$ et vaut η_{v_j}]
si $r_j \neq 0$
[r_j est le j-ième indice minimal en valuation de $A(\epsilon)$]
$\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{I} \cup \{r_j\}$.
[Mise à jour de σ et j]
$\sigma \leftarrow \sigma + r_j$, $j \leftarrow j+1$.
(3) [Retourner le résultat]
$\tilde{A}(\epsilon) \leftarrow A(\epsilon)$.
retourner la matrice $\tilde{A}(\epsilon)$ et la liste $\mathcal{I}$.

Algorithme 3.2: Calcul d'une forme v-réduite par similitude polynomiale

Corollaire 3.5 *L'algorithme* `VRF` *calcule au moyen d'une matrice polynomiale $P(\epsilon)$ inversible une forme v-réduite $\tilde{A}(\epsilon)$ semblable à $A(\epsilon)$.*

3.7 Valeurs propres de valuation entière

On suppose dans toute cette partie que la perturbation de matrice $A(\epsilon)$ considérée est v-réduite. La propriété ci-dessous précise la nature des polynômes $\varphi_i(\lambda, 0)$ associés à une telle matrice.

Propriété 3.4 *Soient $i \in \mathbb{N}$ et $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$. Si $A(\epsilon)$ est v-réduite alors*

(a) le polynôme $\varphi_i(\lambda, 0)$ est non nul;

(b) si $\varphi_i(\lambda, 0)$ n'est pas un monôme alors $i \in \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$.

Preuve. Pour (a) il suffit de vérifier que $\operatorname{val}\varphi_i(\lambda, \epsilon) = 0$. Or (3.6) on a $\operatorname{val}\varphi_i(\lambda, \epsilon) = s_i - in + \sum_{k=0}^{i-1}(i-k)\eta_k$. La matrice $A(\epsilon)$ étant supposée v-réduite, la somme dans le membre de droite vaut $\sum_{\delta_k\neq 0}(i-k)\delta_k$ c'est-à-dire $in - s_i$ d'après la propriété 3.2(e). Pour (b) supposons que $i \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$. Alors

$$\varphi_i(\lambda, 0) = \det \left[\begin{array}{c|c} * & O \\ \hline * & -\lambda I \end{array}\right],$$

les blocs $*$ regroupant des éléments de K issus de colonnes de $A(\epsilon)$ de valuation inférieure à i. Ce déterminant, non nul d'après (a), est donc un monôme en λ. $\square$

Remarque 3.3 La réciproque de la propriété 3.4(b) ci-dessus est fausse: certains $\varphi_{v_j}(\lambda, 0)$ peuvent être des monômes. En effet, soit par exemple

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^2 \\ 0 & 0 & \epsilon & 0 \end{bmatrix}.$$

On vérifie facilement que cette perturbation de matrice est v-réduite, de profil de valuations $[(1,0),(2,1),(1,2)]$. Soit alors $i = 1$. On a $i \in \{0, 1, 2\}$ et pourtant

$$\varphi_1(\lambda, 0) = \det \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{array}\right] = -\lambda^2.$$

Un cas particulier trivial de la propriété 3.4(b) est obtenu avec $i = 0$ car si A_0 est nilpotente, c'est-à-dire si $\varphi_0(\lambda, 0) = \det(A_0 - \lambda I)$ n'est pas un monôme, $A(\epsilon)$ est de valuation nulle.

Corollaire 3.6 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$. Si $A(\epsilon)$ est v-réduite alors l'ensemble $\{\varphi_{v_1}(\lambda, 0), \ldots, \varphi_{v_q}(\lambda, 0)\}$ contient tous les polynômes quasi-Newton associés à $A(\epsilon)$ dont l'ordre est $\mathrm{O}(\epsilon^{un\ entier})$.*

Ce résultat indique donc que les termes dominants de toutes les valeurs propres de valuation entière d'une perturbation de matrice $A(\epsilon)$ v-réduite peuvent être obtenus à partir de $A(\epsilon) \bmod \epsilon^{v_q+1}$. Ce n'était pas le cas au chapitre 2 précédent où nous avions utilisé une diagonalisation par blocs de $A(\epsilon)$ au moyen de matrices de séries formelles. La forme v-réduite est donc bien une forme réduite au sens du problème 1.5 ($FORME{\cdot}REDUITE$). Grâce à l'algorithme 3.2 (`VRF`) précédent, le problème 1.6 ($REDUCTION$) est également résolu. Enfin, le problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$) est résolu dès que $A(\epsilon)$ est v-réduite et n'a que des valeurs propres de valuation entière.

Remarque 3.4 Lorsque $\mathsf{K} = \mathbb{C}$ et que ϵ est un paramètre réel, les valeurs propres d'une perturbation de matrice $A(\epsilon)$ symétrique se développent en séries de Taylor au voisinage de $\epsilon = 0$ (voir par exemple le livre de Baumgärtel [10, page 21] ou celui de Kato [37, page 120].) Par conséquent, si $A(\epsilon)$ est sous forme v-réduite, on déduira de ses polynômes quasi-Newton d'ordre entier les termes dominants de *toutes* ses valeurs propres. De telles perturbations de matrices apparaissent en particulier lors de la discrétisation d'un opérateur de Schrödinger en théorie des semi-conducteurs [41, 36, 22, 33].

Nous terminons ce paragraphe en montrant comment déduire d'une forme v-réduite tous les monômes influents d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\text{un entier}})$ associés à son polynôme caractéristique. Soit $i \in \{1, \ldots, q\}$ tel que le polynôme quasi-Newton $\theta_{v_i}(\lambda) = \varphi_{v_i}(\lambda, 0)$ ne soit pas un monôme. Il existe donc au moins deux monômes influents du polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$ d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{v_i})$. En désignant comme d'habitude par $\phi_j(\lambda)$ le polynôme de Newton correspondant. Le j-ième segment $\mathcal{S}_j$ du polygone de Newton associé à $A(\epsilon)$ est donc de pente v_i et de longueur $r_i = \delta_{v_i}$. Comme $\det D_{v_i}(\epsilon)$ est un monôme unitaire et en notant $\sharp_j$ la multiplicité de la racine nulle de $\theta_{v_i}(\lambda)$, on a d'après le théorème 1.1 $(-\lambda)^{-\sharp_j}\theta_{v_i}(\lambda) = (-1)^{\sharp}\phi_j(\lambda)$ avec $\sharp \in \{0, 1\}$.

On exprime $\phi_j(\lambda)$ en fonction de $\theta_{v_i}(\lambda)$ de la même façon qu'au paragraphe 2.3.2 en remplaçant $\bar{r}$ par $\bar{r}_{v_i}$ et $\det(\bar{C}_0 - \lambda\bar{D}_0)$ par $\det(\bar{C}_{v_i0} - \lambda\bar{D}_{v_i0})$ dans la matrice obtenue à l'issue de la minimisation du nombre de colonnes de valuation v_i lors de l'exécution de l'algorithme 3.2 (VRF) (début de l'étape (2.3)). On a donc

$$\det(\bar{C}_{v_i0} - \lambda \bar{D}_{v_i0}) = (-1)^{\bar{r}_i} \phi_j(\lambda).$$

D'autre part, on a clairement

$$x_{j-1} = n - d_{v_i}\,, \quad d_{v_i} = \deg \theta_{v_i}(\lambda)\,, \tag{3.10a}$$

$$\deg \det(C_{v_i0} - \lambda D_{v_i0}) = d_{v_i} - n + \bar{r}_i\,, \tag{3.10b}$$

et, d'après (1.2),

$$y_{j-1} = s_{v_i} - v_i(n - d_{v_i}). \tag{3.10c}$$

Il reste à déterminer s_{v_i}. Si $i = 1$ alors $s_{v_1-1} = s_{v_1} = v_1 n$ d'après la propriété 3.1. En supposant s_{v_i-1} et s_{v_i} connus, on peut de plus en déduire $s_{v_{i+1}}$. En effet, $s_{v_i+1} = 2s_{v_i} - s_{v_i-1} - \delta_{v_i}$ et, pour $k = 1, \ldots, v_{i+1} - v_i - 1$,

$$s_{v_i+k+1} = 2s_{v_i+k} - s_{v_i+k-1} \quad \text{car } \delta_{v_i+k} = 0 \text{ pour } 0 < k < v_{i+1} - v_i.$$

En rappelant qu'une suite entière définie par ses deux premières valeurs u_0 et u_1 et par $u_{k+1} = 2u_k - u_{k-1}$ vérifie $u_{k+1} = u_1 + k(u_1 - u_0)$, on obtient

$$s_{v_i+k+1} = (k+1)(2s_{v_i} - s_{v_i-1} - \delta_{v_i}) - ks_{v_i}\,, \quad k = 0, \ldots, v_{i+1} - v_i - 1. \tag{3.10d}$$

Finalement, l'ensemble des monômes influents d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\text{un entier}})$ peut être obtenu à partir d'une forme v-réduite de la façon suivante.

Corollaire 3.7 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice v-réduite obtenue en sortie de l'algorithme 3.2 (*VRF*). Soient $\mathrm{vp}\,A(\epsilon) = [(r_j, v_j)]_{1\le j\le q}$ et $i \in \{1, \ldots, q\}$. Alors les monômes influents d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{v_i})$ associés à $A(\epsilon)$ sont les monômes non nuls de la forme*

$$(-1)^{\bar{r}_i} c_k \epsilon^{y_{j-1}+kv_i} \lambda^{d_{v_i}-k}\,, \quad 0 \le k \le d_{v_i} - n + \bar{r}_i\,,$$

les coefficients $c_k \in \mathsf{K}$ étant définis par

$$\det(\bar{C}_{v_i0} - \lambda \bar{D}_{v_i0}) = \sum_{k=0}^{d_{v_i}-n+\bar{r}_i} c_k \lambda^{d_{v_i}-n+\bar{r}_i-k}.$$

3.8 Interprétations avec le polygone de Newton

Nous présentons ici une caractérisation des perturbations quasi-génériques à profil de valuations fixé et une caractérisation de la forme v-réduite basées sur le polygone de Newton associé à une perturbation de matrice. Il s'agit essentiellement d'identifier le profil de valuations d'une perturbation de matrice à un diagramme comparable au polygone de Newton associé à cette perturbation. Cette approche caractérise les conditions de régularité "$\Delta_j \neq 0$" de façon simple et en fait apparaître d'autres, plus fines, que nous noterons "$\Delta_j^k \neq 0$".

Désignons par $A(\epsilon)$ une perturbation de matrice dans $\mathsf{F}^{n\times n}$ dont le profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$ seul est imposé et déterminons parmi tous les polygones de Newton possibles pour $A(\epsilon)$ celui qui est le plus bas. Pour cela, on fixe une abscisse $x \in \{1, \ldots, n\}$ et on cherche l'ordonnée $y(x)$ minimale compatible avec le profil de valuations de $A(\epsilon)$. Le théorème 3.5 ci-dessous précise $y(x)$ ainsi que le coefficient correspondant $\hat{a}_x$ du polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$. La technique de preuve que nous utilisons est due à Moro, Burke et Overton [45, théorème 3.1 page 807] et repose uniquement sur la définition du déterminant d'une matrice. On rappelle les notations $r'_j = \sum_{i=1}^{j} r_i$ et $r_j^* = \sum_{i=1}^{j} r_i v_i$.

Théorème 3.5 *Soient $j \in \{1, \ldots, q\}$ et $0 < k \leq r_j$. Si $x = r'_{j-1} + k$ alors $y(x) = r_{j-1}^* + kv_j$ et le coefficient $\hat{a}_x$ de $\epsilon^{y(x)}$ dans $a_x(\epsilon)$ est égal à $(-1)^x$ fois la somme de tous les mineurs principaux de L_j d'ordre $r'_{j-1} + k$ qui contiennent L_{j-1}. En particulier, $\hat{a}_{r'_j} = (-1)^{r'_j} \det L_j$.*

Preuve. Rappelons que le polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$ est une combinaison linéaire de coefficients ± 1 de tous les produits possibles de n éléments de la matrice $\lambda I - A(\epsilon)$ non situés sur une même ligne ou une même colonne. Un terme de $p(\lambda, \epsilon)$ en λ^{n-x} est donc obtenu en choisissant $n - x$ λ sur la diagonale et en les complétant avec des ϵ pris parmi les colonnes de $\lambda I - A(\epsilon)$ non encore utilisées. Notons $y_i \in \{0, \ldots, r_i\}$ le nombre de ϵ^{v_i} pris dans des colonnes de valuation v_i. On a alors $x = \sum_{i=1}^{q} y_i$ et on veut que $y(x) = \sum_{i=1}^{q} y_i v_i$ ait la plus petite valeur possible. Comme $v_1 < v_2 < \ldots < v_q$ ce minimum est atteint en prenant le plus possible de ϵ^{v_1}, puis le plus possible de ϵ^{v_2} etc., c'est-à-dire pour $y_1 = r_1, \ldots, y_{j-1} = r_{j-1}$ et $y_j = k$. Ainsi $y(x) = r_{j-1}^* + kv_j$.

Les différentes façons de choisir les k colonnes de $A(\epsilon)$ de valuation v_j conduisent à prendre la somme de tous les mineurs de L_j d'ordre $r'_{j-1} + k$ contenant L_{j-1} dans leur coin supérieur gauche. Le signe $(-1)^x$ vient du fait qu'on utilise x éléments de $-A(\epsilon)$ par définition du polynôme caractéristique. $\square$

La première conséquence de ce résultat est que le polygone de Newton le plus bas possible pour $A(\epsilon)$ est entièrement déterminé par le profil de valuations vp $A(\epsilon)$. D'où la définition ci-dessous.

Définition 3.6 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$. Soient les points du plan $\mathcal{Q}_0 = (0,0)$ et $\mathcal{Q}_j^k = (r'_{j-1} + k, r^*_{j-1} + kv_j)$ pour $j = 1, \dots, q$ et $k = 1, \dots, r_j$. On note $\mathcal{Q}_j = \mathcal{Q}_j^{r_j}$ et on appelle* **enveloppe de Newton** *associée au profil de valuations de $A(\epsilon)$ l'enveloppe convexe inférieure $\mathcal{E}_v$ de l'ensemble $\{\mathcal{Q}_j\}_{0\leq j\leq q}$.*

L'enveloppe $\mathcal{E}_v$ est donc le polygone obtenu en mettant bout à bout les segments reliant $\mathcal{Q}_{j-1}$ à $\mathcal{Q}_j$ pour $j = 1, \dots, q$. Le j-ième de ces segments est de pente v_j et de hauteur $r_j v_j$. On notera de plus que les points $\mathcal{Q}_j$ constituent les sommets de $\mathcal{E}_v$ alors que les points $\mathcal{Q}_j^k$ avec $k < r_j$ et à j fixé sont tous situés sur un même segment, de pente v_j. Enfin nous identifions $\mathcal{E}_v$ au profil de valuations de $A(\epsilon)$ en notant

$$\mathcal{E}_v = [(r_1, v_1), \dots, (r_q, v_q)]. \tag{3.11}$$

Soit Δ_j^k la somme de tous les mineurs principaux de L_j d'ordre $r'_{j-1} + k$ qui contiennent L_{j-1} dans leur "coin supérieur gauche". Les coefficients du polynôme caractéristique explicités dans le théorème 3.5 étant égaux à $\pm\Delta_j^k$, on obtient un ensemble de conditions "$\Delta_j^k \neq 0$" contenant les conditions de régularité "$\Delta_j \neq 0$". Les deux caractérisations suivantes sont alors immédiates.

Corollaire 3.8 *Soient $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$ et $\mathcal{N}$ son polygone de Newton. Soient $j \in \{1, \dots, q\}$ et $k \in \{1, \dots, r_j\}$. Alors $\mathcal{Q}_j^k \in \mathcal{N}$ si et seulement si $\Delta_j^k \neq 0$.*

Corollaire 3.9 *Une perturbation de matrice est quasi-générique à profil de valuations fixé si et seulement si son polygone de Newton et l'enveloppe de Newton associée à son profil de valuations coïncident.*

Pour caractériser graphiquement la forme v-réduite, nous adoptons le point de vue symétrique consistant à imposer $A(\epsilon)$ et à faire varier son profil de valuations par similitude dans $\mathcal{O}(A(\epsilon))$. Le théorème 3.4 et l'écriture (3.11) conduisent au résultat suivant.

Corollaire 3.10 *Une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ est v-réduite si et seulement si l'enveloppe de Newton associée à son profil de valuations est "la plus haute possible" dans $\mathcal{O}(A(\epsilon))$.*

Rappelons que si $A(\epsilon)$ est v-réduite alors $\Delta_q \neq 0$. Par conséquent l'enveloppe de Newton et le polygone de Newton ont les mêmes extrémités $\mathcal{Q}_0$ et $\mathcal{Q}_q$. L'expression "la plus haute possible" doit alors est comprise de la façon suivante: une forme v-réduite d'une perturbation de matrice $A(\epsilon)$ définit la meilleure approximation du polygone de Newton $\mathcal{N}$ associé à $A(\epsilon)$ par un polygone convexe situé sous $\mathcal{N}$, dont les extrémités coïncident avec celles de $\mathcal{N}$ et n'ayant que des pentes entières.

De plus, on retrouve graphiquement les propriétés 3.2(c) et 3.2(d): par définition du polygone de Newton $\mathcal{N}$ et puisque ses extrémités coïncident avec celles de l'enveloppe $\mathcal{E}_v$ associée, la longueur de $\mathcal{N}$ vaut $\sum_{i=M}^{N} \delta_i = n$ et sa hauteur vaut $\sum_{i=M}^{N} i\delta_i = \alpha_n$.

Exemple 3.8 Reprenons les trois matrices semblables $A(\epsilon)$, $\hat{A}(\epsilon)$, $\tilde{A}(\epsilon)$ de l'exemple 3.6. Rappelons que leur polynôme caractéristique vaut $p(\lambda,\epsilon) = \lambda^4 - (\epsilon^2+\epsilon^5)\lambda^3 - (\epsilon^3-\epsilon^7)\lambda^2 + (\epsilon^5+\epsilon^8)\lambda - \epsilon^{10}$ et qu'elles ont pour profils de valuations respectifs

$$\operatorname{vp} A(\epsilon) = [0,2,3,5]\,, \quad \operatorname{vp} \hat{A}(\epsilon) = [1,1,2,6]\,, \quad \operatorname{vp} \tilde{A}(\epsilon) = [1,2,2,5].$$

La figure 3.1 représente leur polygone de Newton commun $\mathcal{N}$ et les enveloppes de Newton $\mathcal{E}_v$, $\hat{\mathcal{E}}_v$, $\tilde{\mathcal{E}}_v$ associées à leurs profils de valuations. Dans les trois derniers graphiques, le polygone de Newton a été dessiné en pointillés afin de repérer les segments "cachés" par l'enveloppe. On notera que lorsque l'enveloppe est maximale (quatrième graphique) le seul segment du polygone de Newton avec lequel elle ne coïncide pas est celui de pente non entière, égale à $\frac{3}{2}$.

On déduit du quatrième graphique que la première condition de régularité "$\Delta_1 \neq 0$" n'est pas vérifiée, alors que $\Delta_2 \neq 0$ mais aussi $\Delta_2^1 \neq 0$. $\diamond$

Remarque 3.5 Notons que l'enveloppe peut ne pas contenir le dernier sommet du polygone de Newton. C'est même le cas si et seulement si $\mathcal{Q}_q \notin \mathcal{N}$. Un exemple est

$$\begin{bmatrix} 0 & \epsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

car ici $q = 1$ et $\Delta_1 = 0$.

Notons enfin une conséquence du corollaire 3.10 que nous utiliserons au paragraphe suivant.

Propriété 3.5 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice v-réduite. Si $A(\epsilon)$ n'a que des valeurs propres de valuation entière alors $\mathcal{E}_v$ coïncide avec $\mathcal{N}$. Sinon, tout segment de pente non entière β de $\mathcal{N}$ est approché par deux segments de $\mathcal{E}_v$ de pentes $\lfloor\beta\rfloor$ et $\lfloor\beta\rfloor+1$.*

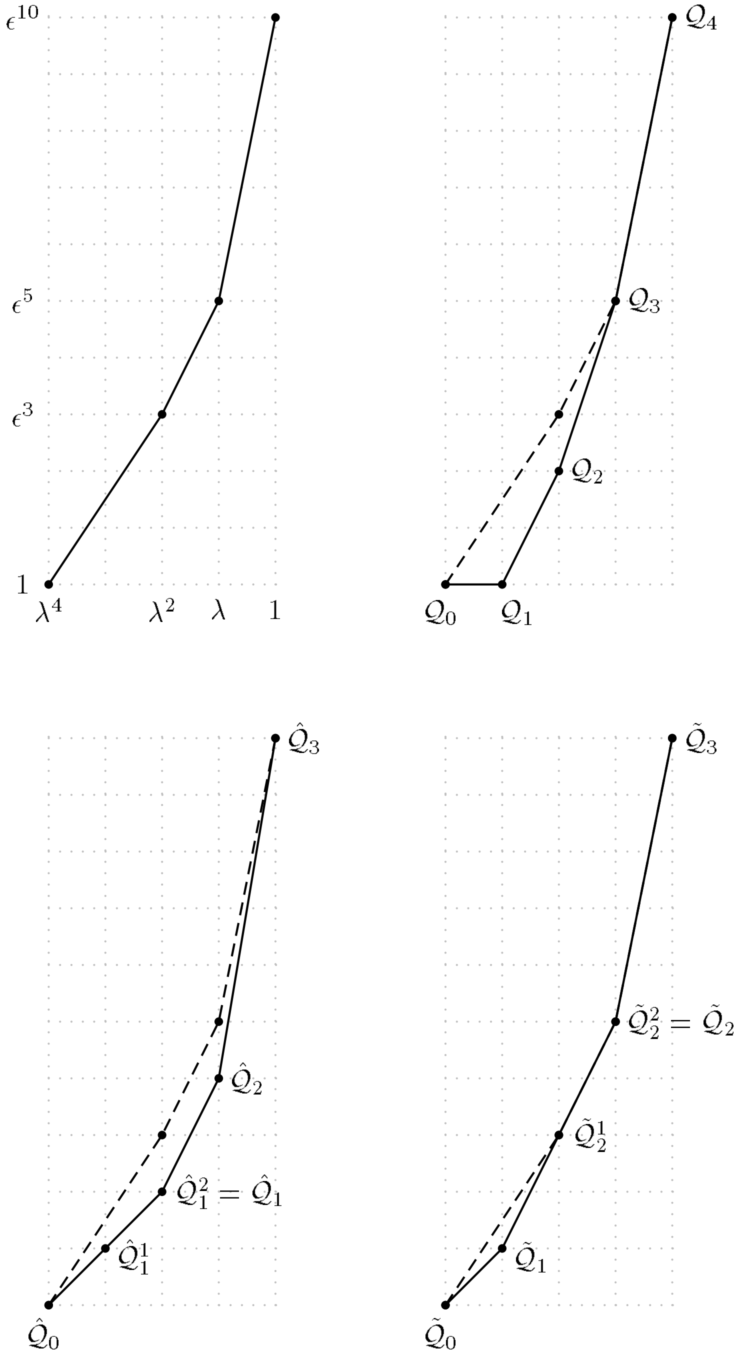


FIG. 3.1 – *Polygone $\mathcal{N}$ et enveloppes $\mathcal{E}_v$, $\mathcal{E}_{\hat{v}}$ et $\mathcal{E}_{\tilde{v}}$ de Newton associés aux trois perturbations de matrices $A(\epsilon)$, $\hat{A}(\epsilon)$ et $\tilde{A}(\epsilon)$ de l'exemple 3.6. La meilleure approximation de $\mathcal{N}$ à l'aide de pentes entières uniquement est $\mathcal{E}_{\tilde{v}}$ (quatrième dessin): c'est l'enveloppe "la plus haute possible" dans $\mathcal{O}(A(\epsilon))$. On en déduit que $\tilde{A}(\epsilon)$ est v-réduite et que ni $A(\epsilon)$ ni $\hat{A}(\epsilon)$ ne le sont. En revanche il est impossible de comparer graphiquement $\mathcal{E}_{\hat{v}}$ et $\mathcal{E}_v$ car ces deux enveloppes, lorsqu'on les superpose, se croisent au point $(2,2)$.*

En rappelant que $\mathcal{Q}_j \in \mathcal{N}$ entraîne $\Delta_j \neq 0$ on déduit de ce qui précède une réciproque "faible" du corollaire 3.3.

Corollaire 3.11 *Toute perturbation de matrice qui est v-réduite et qui n'a que des valeurs propres de valuation entière est quasi-générique à profil de valuations fixé.*

3.9 Formes normales rationnelles

On retrouve les deux formes diagonales par blocs décrites à la fin du chapitre 2. En effet, si $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ est une perturbation de matrice v-réduite de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q}$, on sait d'après le théorème 3.4 que $\varphi_{v_1+1}(\lambda, 0) = \det(C_{v_1+1,0} - \lambda D_{v_1,0})$ est non nul. On peut donc diagonaliser par blocs le faisceau $C_{v_1+1}(\epsilon) - \lambda D_{v_1+1}(\epsilon)$ résultant de la factorisation d'ordre $\mathrm{O}(e^{v_1+1})$ de la matrice $A(\epsilon)$ comme on l'a fait au chapitre 2 avec $v_1 = 0$. En répétant le procédé on obtient une forme v-réduite, diagonale par blocs comme dans le corollaire 2.5. On a donc une forme normale solution du problème 1.7 $(FORME\cdot NORMALE)$ associée à la famille des perturbations quasi-génériques à profil de valuations fixé.

De plus, on peut davantage préciser la structure indiquée dans le corollaire 2.5 grâce à l'interprétation d'une forme v-réduite avec le polygone de Newton du paragraphe précédent. Si l'on note $\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_{q'}}$ les indices minimaux en valuation de $A(\epsilon)$ et si pour $j \in \{1, \ldots, q'\}$ on désigne par d_j le nombre des valeurs propres de $A(\epsilon)$ de valuation i_j et par e_j le nombre de ses valeurs propres de valuations strictement comprises entre i_j et i_{j+1} on voit que les indices minimaux en valuation regroupent et séparent les valuations $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_n$ des n valeurs propres de $A(\epsilon)$ comme décrit ci-dessous.

$$\begin{aligned}
0 \leq \beta_1 = \ldots = \beta_{d_1} &= i_1 \\
&< \beta_{d_1+1} \leq \ldots \leq \beta_{d_1+e_1} \\
&< \beta_{d_1+e_1+1} = \ldots = \beta_{d_1+e_1+d_2} = i_2 \\
&\;\vdots \\
&< \beta_{d_1+e_1+\ldots+d_{q'-1}+1} \leq \ldots \leq \beta_{d_1+e_1+\ldots+d_{q'-1}+e_{q'-1}} \\
&< \beta_{d_1+e_1+\ldots+e_{q'-1}+1} = \ldots = \beta_{d_1+e_1+\ldots+e_{q'-1}+d_{q'}} = i_{q'}
\end{aligned}$$

et $\sum_{j=1}^{q'} d_j + \sum_{j=1}^{q'-1} e_j = n$, certains d_j et e_j pouvant être nuls. Comme $i_{j+1} = i_j + 1$ dès que $e_j \neq 0$ (propriété 3.5), on obtient finalement la forme normale décrite dans le théorème suivant.

Théorème 3.6 *Toute perturbation de matrice de* $\mathsf{F}^{n\times n}$ *est semblable à une forme v-*

réduite $A(\epsilon)$ diagonale par blocs

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} \epsilon^{v_1} A_1(\epsilon) & & & \\ & \epsilon^{v_2} A_2(\epsilon) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \epsilon^{v_l} A_l(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \ldots \leq v_l\,,$$

telle que pour $k = 1, \ldots, l$ il existe $j \in \{1, \ldots, q'\}$ tel que $v_k = i_j$ et
- soit A_{k0} est inversible et $\dim A_l(\epsilon) = d_j$;
- soit A_{k0} est nilpotente non nulle et $A_l(\epsilon)$ est de dimension e_j et ses colonnes sont de valuation au plus 1. Dans ce cas $A_l(\epsilon)$ n'a que des valeurs propres de valuations strictement comprises entre i_j et $i_j + 1$.

Remarque 3.6 Le nombre de blocs l est égal au nombre des d_j et e_j non nuls.

Exemple 3.9 En reprenant les trois matrices semblables des exemples précédents, on a $q' = 3$, $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ et $i_3 = 5$. De plus,

$$d_1 = 0, \quad e_1 = 2, \quad d_2 = 1, \quad e_2 = 0, \quad d_3 = 1$$

et donc $l = 3$. On observe effectivement que $e_1 \neq 0$ et que $i_2 = i_1 + 1$. Finalement, la forme normale rationnelle pour ces trois matrices est

$$\begin{bmatrix} \epsilon A_1(\epsilon) & & \\ & \epsilon^2 a_2(\epsilon) & \\ & & \epsilon^5 a_3(\epsilon) \end{bmatrix}$$

avec $\operatorname{vp} A_1(\epsilon) = [0, 1]$, $A_1(0) \in \mathsf{K}^{2\times 2}$ nilpotente non nulle, $a_2(0) \neq 0$ et $a_3(0) \neq 0$. Sur le quatrième dessin de la figure 3.1 cela revient à "découper verticalement" le polygone de Newton en trois parties aux points $\tilde{Q}_2^1$ et $\tilde{Q}_2$. $\diamond$

Lorsque $A(\epsilon)$ n'a que des valeurs propres de valuation entière - disons r_j valeurs propres de valuation v_j avec $1 \leq j \leq q$ -, on a pour les notations précédentes $q' = q$,

$$d_j = r_j\,, \quad e_j = 0\,, \quad i_j = v_j\,, \qquad j = 1, \ldots, q\,,$$

et on retrouve la forme diagonale par blocs du corollaire 2.6 avec $q = l$. C'est une perturbation quasi-générique à profil de valuations fixé égal à $[(r_j, v_j)]_{1 \leq j \leq q}$. De plus, par définition des sous-matrices influentes on a pour $j = 1, \ldots, q$

$$L_j = \operatorname{Diag}\,[A_{10}, \ldots, A_{j0}]$$

et donc

$$\phi_j(\lambda) = (-1)^{r'_j} \det(\lambda I - A_{j0}) \prod_{i=1}^{j-1} \det A_{i0}.$$

Tous les monômes influents du polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$ peuvent donc être déterminés à partir du profil de valuations de cette perturbation de matrice et des coefficients des polynômes caractéristiques des matrices constantes $A_{1,0}, \ldots, A_{q0}$ (corollaire 3.2).

Ce qui suit ne se limite plus aux valeurs propres de valuation entière. D'après la théorie de Lidskii [40, 45] et comme nous allons le rappeler, la structure de Jordan de la matrice non perturbée joue un rôle clé dans l'apparition d'exposants dominants rationnels non entiers, notamment lorsqu'il s'agit d'inverses d'entiers. Or, jusqu'à présent cette structure a été ignorée. Au chapitre suivant nous la substituons au profil de valuations: au lieu de considérer une perturbation de matrice à profil de valuations fixé, on considère une perturbation d'une forme de Jordan nilpotente donnée. Profil de valuations et structure de Jordan seront associés au chapitre 5 pour généraliser un théorème de Lidskii et permettre de voir désormais tout exposant dominant d'une valeur propre d'une perturbation de matrice comme le quotient d'une valuation de colonne par une dimension de bloc de Jordan.

Chapitre 4

Perturbations d'une forme de Jordan nilpotente

On propose ici une approche duale de celle du chapitre précédent, basée sur la connaissance de la structure de Jordan de la matrice $A(0)$ non perturbée d'une perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$. Un exemple classique [61, §2.2] est donné par la matrice d'ordre n

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \epsilon & & & 0 \end{bmatrix}$$

où l'on voit que l'unique valeur propre nulle du bloc de Jordan nilpotent d'ordre n se disperse dans le champ complexe en n valeurs propres

$$e^{\frac{2i\pi h}{n}} \epsilon^{\frac{1}{n}}, \quad h = 1, \ldots, n.$$

En particulier, $A(\epsilon)$ admet donc n valeurs propres de valuation $1/n$, l'inverse de la dimension de l'unique bloc de Jordan de $A(0)$. Partant de ce cas simple et de son extension par un théorème de Lidskii [40] au cas d'une structure de Jordan arbitraire, nous posons la question: dans quelle mesure la dimension d'un des blocs de la forme de Jordan de $A(0)$ peut-elle être considérée comme l'inverse - ou, à défaut, "le plus proche possible" de l'inverse - de la valuation d'une valeur propre de $A(\epsilon)$? Nous nous plaçons donc dans le cas où $A(0)$ est nilpotente et où il s'agit de lire sur $A(\epsilon)$ des exposants dominants de la forme l'inverse d'un entier positif.

Nous commençons par rappeler un résultat de Lidskii [40, 45] qui peut être utilisé directement pour définir une deuxième famille de perturbations quasi-génériques, solution du problème 1.4 ($PERT \cdot QUASI \cdot GEN$), que nous appellerons perturbations de Lidskii. Il indique en particulier que si la structure de Jordan de $A(0)$ possède m blocs d'ordre r alors $A(\epsilon)$ admet mr valeurs propres de valuation $1/m$. Cependant, nous donnons de ce résultat une preuve permettant de le voir comme une minimisation de rang dominant explicite.

Afin d'apporter une réponse au problème 1.5 ($FORME \cdot REDUITE$) par rapport à la famille des perturbations de Lidskii, nous proposons ensuite une seconde forme réduite, duale de la forme v-réduite: la forme J-réduite ("réduite par rapport aux dimensions des blocs de la forme de Jordan dominante"). Deux caractérisations d'une telle forme sont encore proposées, la première en termes de forme de Jordan dominante minimale; la seconde en termes de polynômes quasi-Newton d'ordre l'inverse d'un entier positif. Les indices minimaux à partir desquels la forme J-réduite est définie sont d'autres invariants matriciels que les indices minimaux en valuation, que nous appelons indices minimaux en dimension. Les deux caractérisations sont utilisées de la même façon qu'au chapitre précédent: la première pour donner une idée algorithmique, la seconde pour montrer que la forme J-réduite est une seconde réponse au problème 1.5 ($FORME \cdot REDUITE$).

De plus, en reprenant l'analyse de la théorie de Lidskii en termes de polygone de Newton due à Moro, Burke et Overton [45] on obtient facilement une caractérisation graphique d'une forme J-réduite. Nous l'exploitons à deux reprises; d'abord pour construire un algorithme de minimisation de la forme de Jordan dominante solution du problème 1.6 ($REDUCTION$). L'algorithme de réduction présenté ici généralise celui proposé dans [31]; ensuite pour établir une normalisation rationnelle d'une forme J-réduite, solution du problème 1.7 ($FORME \cdot NORMALE$). On procède ici directement, sans passer par une diagonalisation par blocs d'une perturbation de faisceau comme celle du chapitre 2. Enfin, le problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$) sera résolu pour les perturbations d'une forme de Jordan nilpotente qui sont J-réduites et qui n'ont que des valeurs propres de valuation l'inverse d'un entier positif.

Si cette étude est duale de celle faite au chapitre 3 (voir la synthèse donnée à la fin de ce chapitre), la notion de forme de Jordan nilpotente semble cependant plus riche que celle de profil de valuations à cause du rang qui lui est associé. En particulier, la minimisation du rang dominant préalable à celle de la forme de Jordan nilpotente conduit à une interprétation originale en termes du diagramme de Ferrer associé à une partition entière que nous décrivons au paragraphe 4.7.1.

Enfin, deux factorisations apparaissent dans ce chapitre. Celle d'ordre $O(\epsilon)$ définie au chapitre 2 par (2.1) et une autre, d'ordre $O(\epsilon^{1/i})$, $i \in \mathbb{N}^*$, introduite au paragraphe 4.5. Nous utiliserons la première pour démontrer le théorème de Lidskii et la seconde pour caractériser une forme J-réduite.

4.1 Formes de Jordan nilpotentes

La notation adoptée pour représenter la forme de Jordan d'une matrice est celle d'Arnold ([3, page 36],[21]). Par exemple $(\lambda^3)^2(\mu^2)^3\mu$ désigne la forme de Jordan constituée de deux blocs d'ordre 3 associés à la valeur propre λ et trois blocs d'ordre 2 et un bloc d'ordre 1 associés à la valeur propre μ. Toute forme de Jordan nilpotente dans $\mathsf{K}^{n\times n}$ s'écrit alors

$$J = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q} \tag{4.1a}$$

avec

$$n_1 > n_2 > \dots > n_q \geq 1 \tag{4.1b}$$

quitte à échanger des blocs. On a de plus une partition entière de n donnée par

$$r_1 n_1 + r_2 n_2 + \dots + r_1 n_1 = n. \tag{4.1c}$$

En identifiant la forme de Jordan nilpotente définie par (4.1a) au vecteur de q couples d'entiers positifs $[(r_j, n_j)]_{1\leq j\leq q}$, on pourra comparer (4.1) avec (3.2). On appelle **perturbation d'une forme de Jordan nilpotente** J toute perturbation de matrice $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ telle que $A_0 = J$. La structure de blocs de J permet de voir $A(\epsilon)$ comme une matrice par blocs $[A^{kl}(\epsilon)]$ partitionnée conformément à J. Enfin, le **coin inférieur gauche** d'une matrice de dimension $m \times n$ est défini comme son élément de position $(m, 1)$. Le coin inférieur gauche d'un bloc de Jordan nilpotent étant toujours zéro, les coins inférieurs gauches des blocs $A^{kl}(\epsilon)$ sont donc tous de valuation au moins 1. Ils jouent un rôle essentiel au paragraphe suivant.

Dans la suite de ce chapitre, les blocs de toute forme de Jordan nilpotente seront supposés rangés par ordre de dimensions décroissantes.

4.2 Perturbations de Lidskii

Un théorème de Lidskii

Ce résultat, dont nous donnons une démonstration en termes de minimisation du rang dominant minimal à la fin de ce paragraphe, donne des conditions suffisantes sur le coefficient A_1 de $A(\epsilon) = J+\epsilon A_1+\mathrm{O}(\epsilon^2)$ pour que le problème 1.1 ($TERMES{\cdot}DOMINANTS$) soit résolu. Nous introduisons au préalable les notions de sous-matrice de Lidskii et de condition de Lidskii.

Définition 4.1 *Soient $A(\epsilon) = J + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de la forme de Jordan nilpotente $J = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q}$ et $r' = \sum_{i=1}^{q} r_i$. Soient $A_1 = [A_1^{kl}]$ le coefficient d'ordre 1 de $A(\epsilon)$ partitionné en r'^2 blocs conformément à la structure par blocs de $A_0 = J$, et b_{kl} le coin inférieur gauche du bloc A_1^{kl}. Pour $j = 1, \dots, q$ on appelle j-***ième sous-matrice de Lidskii*** associée à $A(\epsilon)$ la matrice constante $L_j = [b_{kl}]_{1\le k,l\le r'_j}$ d'ordre $r'_j = \sum_{i=1}^{j} r_i$. On appelle j-***ième condition de Lidskii*** associée à $A(\epsilon)$ la condition "$\Delta_j \neq 0$" où $\Delta_j = \det L_j$.*

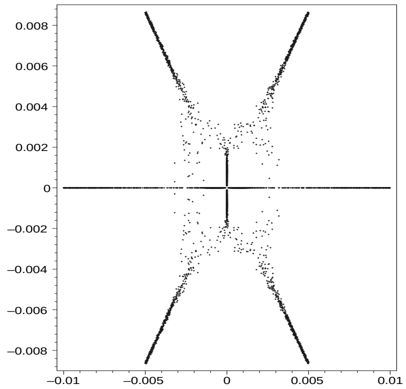
Théorème 4.1 *(Lidskii [40]) Soit $A(\epsilon) = J + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de la forme de Jordan nilpotente $J = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q}$. Soient $j \in \{1, \dots, q\}$ et $E_j = \mathrm{Diag}\,[O_{r'_{j-1}}, I_{r_j}]$. Supposons que $\Delta_j \neq 0$. Supposons de plus que $\Delta_{j-1} \neq 0$ lorsque $j \geq 2$. Alors la matrice $A(\epsilon)$ possède $r_j n_j$ valeurs propres de la forme*

$$\lambda_j^{kl}(\epsilon) = (\mu_j^k)^{1/n_j} \omega_{n_j}^l \epsilon^{1/n_j} + \mathrm{o}(\epsilon^{1/n_j}), \quad l = 0, \dots, n_j - 1, \quad k = 1, \dots, r_j,$$

où les μ_j^k sont les r_j racines du polynôme $\det(L_j - \lambda E_j)$.

La différence essentielle par rapport aux perturbations selon les valuations est l'apparition de valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{1/n_j}) \gg \mathrm{O}(\epsilon)$ pour ϵ suffisamment petit et dès que $n_j \geq 2$ (bloc de Jordan de dimension au moins 2). Le fait de prendre les n_j racines n_j-ièmes de ϵ est à l'origine du phénomène suivant: la valeur propre nulle de la matrice non perturbée J "se disperse" sous l'effet de la perturbation A_1 en n_j valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{1/n_j})$.

Cette dispersion est facile à observer lorsque $\mathsf{K} = \mathbb{C}$. Soient par exemple $J = 0^3 0^2$ et $A_1 \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ telle que les conditions de Lidskii soient vérifiées. On obtient alors deux valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ et trois d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\frac{1}{3}})$. Comme les conditions de Lidskii sont des déterminants de matrices extraites de A_1, elles sont génériquement satisfaites. En pratique il suffit de choisir A_1 au hasard. Les valeurs numériques des valeurs propres de $J + \epsilon A_1$ obtenues pour $\epsilon = 10^{-6}$ et 1000 choix aléatoires de A_1 sont représentées sur la figure ci-dessous.



On observe que les valeurs propres se répartissent dans le champ complexe selon trois directions d'une part (étoile) et selon deux directions d'autre part (croix centrale). De plus, les valeurs dessinant l'étoile sont bien de l'ordre de $\epsilon^{\frac{1}{3}} = 0.01$ et celles situées au centre sont de l'ordre de $\epsilon^{\frac{1}{2}} = 0.001$. Les cinq directions qui apparaissent de façon floue indiquent des perturbations pour lesquelles la première condition de Lidskii n'est pas satisfaite. On peut montrer [45] qu'on a alors dans ce cas 5 valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\frac{2}{5}})$. Par ailleurs, pour une étude de la "réciproque" on pourra consulter la thèse d'Ilahi [29]: dans quelle mesure ce dessin indique-t-il que la matrice que l'on a perturbée admet bien $0^3 0^2$ comme structure de Jordan et non $0^4 0$ ou 0^5 ?

Mais le théorème de Lidskii ne se contente pas d'indiquer les exposants dominants des valeurs propres. Il précise de plus leurs coefficients dominants. Cela nous amène alors à considérer une seconde famille de perturbations quasi-génériques.

Une famille de perturbations quasi-génériques, exemple et conséquences

Nous posons la définition suivante, qui apparaît déjà dans [29].

Définition 4.2 *Une perturbation de matrice $A(\epsilon) = J + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ d'une forme de Jordan nilpotente J est appelée* **perturbation de Lidskii** *lorsque toutes les conditions de Lidskii définies à partir de la structure de J sont satisfaites. On notera $\mathcal{L}$ l'ensemble de ces matrices.*

Exemple 4.1 Considérons une matrice $A(\epsilon)$ de $\mathcal{L}$ telle que $J = (0^3)^2 (0^2)^3 0$. En partitionnant A_1 conformément à la structure par blocs de $J = A_0$ on a

$$A(\epsilon) = J + \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc|cc|cc|c}
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\heartsuit & \times & \times & \heartsuit & \times & \times & \spadesuit & \times & \spadesuit & \times & \spadesuit & \times & \diamondsuit \\
\hline
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\heartsuit & \times & \times & \heartsuit & \times & \times & \spadesuit & \times & \spadesuit & \times & \spadesuit & \times & \diamondsuit \\
\hline
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\spadesuit & \times & \times & \spadesuit & \times & \times & \spadesuit & \times & \spadesuit & \times & \spadesuit & \times & \diamondsuit \\
\hline
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\spadesuit & \times & \times & \spadesuit & \times & \times & \spadesuit & \times & \spadesuit & \times & \spadesuit & \times & \diamondsuit \\
\hline
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\spadesuit & \times & \times & \spadesuit & \times & \times & \spadesuit & \times & \spadesuit & \times & \spadesuit & \times & \diamondsuit \\
\hline
\diamondsuit & \times & \times & \diamondsuit & \times & \times & \diamondsuit & \times & \diamondsuit & \times & \diamondsuit & \times & \diamondsuit
\end{array}\right] \epsilon + \mathrm{O}(\epsilon^2).$$

D'après le théorème de Lidskii les termes dominants des valeurs propres de $A(\epsilon) \in \mathfrak{L}$ ne dépendent que des $\heartsuit$, $\spadesuit$, $\diamondsuit$ et non des éléments désignés par $\times$ ni des termes d'ordre supérieur à 1. Comme dans l'exemple 3.2 du chapitre 3 on a les mêmes indices $q = 6$, $r'_1 = 2$, $r'_2 = 5$, $r'_3 = 6$. Les sous-matrices de Lidskii ont donc les mêmes dimensions que les sous-matrices influentes du chapitre précédent et s'emboîtent de la même façon:

$$L_1 = \begin{bmatrix} \heartsuit & \heartsuit \\ \heartsuit & \heartsuit \end{bmatrix}, \quad E_1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \left[\begin{array}{cc|ccc}
\heartsuit & \heartsuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit \\
\heartsuit & \heartsuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit \\
\hline
\spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit \\
\spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit \\
\spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit
\end{array}\right], \quad E_2 = \left[\begin{array}{cc|ccc}
0 & & & & \\
 & 0 & & & \\
\hline
 & & 1 & & \\
 & & & 1 & \\
 & & & & 1
\end{array}\right],$$

$$L_3 = \left[\begin{array}{ccccc|c}
\heartsuit & \heartsuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\
\heartsuit & \heartsuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\
\spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\
\spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\
\spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\
\hline
\diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit
\end{array}\right], \quad E_3 = \left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & & & & & \\
 & 0 & & & & \\
 & & 0 & & & \\
 & & & 0 & & \\
 & & & & 0 & \\
\hline
 & & & & & 1
\end{array}\right].$$

Mais ici n vaut 13 et non 6 et les sous-matrices de Lidskii sont entièrement définies par la géométrie de $A_0 = J$ et par les valeurs des éléments de A_1. Comme $A(\epsilon) \in \mathcal{L}$, les polynômes $\det(L_1 - \lambda_1 E_1)$, $\det(L_2 - \lambda_1 E_2)$ et $\det(L_3 - \lambda_1 E_3)$ sont de degré 2, 3 et 1 respectivement et n'ont que des racines non nulles. En notant μ_1^1, μ_1^2, μ_2^1, μ_2^2, μ_2^3 et μ_3^1 leurs racines, on sait d'après le théorème de Lidskii que $A(\epsilon)$ possède six valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{1/3})$, six d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{1/2})$ et une d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$:

$$\lambda_1^{1l}(\epsilon) = (\mu_1^1)^{1/3} e^{\frac{2i\pi l}{3}} \epsilon^{1/3} + \mathrm{o}(\epsilon^{1/3}) \quad \text{et} \quad \lambda_1^{2l}(\epsilon) = (\mu_1^2)^{1/3} e^{\frac{2i\pi l}{3}} \epsilon^{1/3} + \mathrm{o}(\epsilon^{1/3}) \quad \text{avec } l \in \{0,1,2\},$$

$$\lambda_2^{1l}(\epsilon) = (\mu_2^1)^{1/2} e^{i\pi l} \epsilon^{1/2} + \mathrm{o}(\epsilon^{1/2}), \quad \lambda_2^{2l}(\epsilon) = (\mu_2^2)^{1/2} e^{i\pi l} \epsilon^{1/2} + \mathrm{o}(\epsilon^{1/2})$$

$$\text{et} \quad \lambda_2^{3l}(\epsilon) = (\mu_2^3)^{1/2} e^{i\pi l} \epsilon^{1/2} + \mathrm{o}(\epsilon^{1/2}) \quad \text{avec } l \in \{0,1\},$$

$$\lambda_3^{11}(\epsilon) = \mu_3^1 \epsilon + \mathrm{o}(\epsilon).$$

◇

Nous pouvons faire ici deux remarques déjà faites lors de l'étude des perturbations quasi-génériques à profil de valuations fixé. D'une part, les conditions de Lidskii sont moins fortes que la généricité de A_1. La famille des perturbations de Lidskii est donc un sous-ensemble des perturbations génériques de formes de Jordan nilpotentes.

D'aure part, les exposants dominants des valeurs propres d'une perturbation de Lidskii n'ont pas nécessairement pour dénominateur un indice de ramification. Considérons par exemple la perturbation de $(0^2)^4$

$$A(\epsilon) = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & 1 & & & & & & \\ \epsilon & 0 & \epsilon & & & & & \\ \hline & & 0 & 1 & & & & \\ & & \epsilon & 0 & \epsilon & & & \\ \hline & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & \epsilon & 0 & \epsilon & \\ \hline & & & & & & 0 & 1 \\ \epsilon^2 & & & & & & \epsilon & 0 \end{array}\right] \in \mathcal{L}. \tag{4.2}$$

Son unique condition de Lidskii est satisfaite car $\Delta_1 = 1$ et la matrice $A(\epsilon)$ est bien une perturbation de Lidskii. Pourtant ses huit valeurs propres vérifient

$$\lambda_h(\epsilon) = \epsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} e^{\frac{3i\pi h}{2}} \epsilon^{\frac{3}{4}} + \cdots, \quad h = 1, \ldots, 4,$$

et

$$\lambda_{h+4}(\epsilon) = -\epsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} e^{\frac{3i\pi h}{2}} \epsilon^{\frac{3}{4}} + \cdots, \quad h = 1, \ldots, 4.$$

Leur indice de ramification commun n'est donc pas la dimension 2 des blocs de Jordan de A_0 mais 4. Ce phénomème ne peut se produire que parce $\det(L_1 - \lambda E_1) = (1-\lambda)^4$ possède une racine multiple. En effet, dès que tous les polynômes $\det(L_j - \lambda E_j)$ n'ont que des racines simples, les n valeurs propres de $A(\epsilon)$ se développent en séries de Puiseux formelles d'indices de ramification les dimensions des blocs de la forme de Jordan nilpotente que l'on perturbe. C'est bien sûr le cas lorsque A_1 est générique. Cette observation a déjà été faite pour les perturbations analytiques par Moro, Burke et Overton dans [45, page 798].

Enfin, le théorème de Lidskii (théorème 4.1) permet évidemment de résoudre les problèmes 1.2 ($POLY \cdot NEWTON$) et 1.3 ($MON \cdot INFLUENTS$) dès que $A(\epsilon) \in \mathfrak{L}$.

Corollaire 4.1 *Le polygone de Newton associé à une perturbation de Lidskii de la forme de Jordan nilpotente* $(0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q}$ *est formé de* $r_j n_j$ *segments de pente* $1/n_j$, $j = 1, \dots, q$. *Le* j*-ième polynôme de Newton est* $\phi_j(\lambda) = (-1)^{r'_j} \det(L_j - \lambda E_j)$.

Corollaire 4.2 *Les monômes influents du polynôme caractéristique d'une perturbation de Lidskii de la forme de Jordan nilpotente* $(0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q}$ *sont les monômes non nuls pris parmi*

$$(-1)^n c_{jk} \epsilon^{r'_{j-1}+k} \lambda^{n-r^*_{j-1}-kn_j}\,, \quad k = 0, \dots, r_j\,, \quad , j = 1, \dots, q\,,$$

avec $r^*_j = \sum_{i=1}^{j} r_i n_i$ *et* $\det(L_j - \lambda E_j) = \sum_{k=0}^{r_j} c_{jk} \lambda^{r_j - k}$.

Démonstration du théorème de Lidskii

La démonstration initialement proposée par Lidskii [40] et rappelée par Moro, Burke et Overton dans [45, page 799] consiste à poser $z = \epsilon^{1/n_j}$ et à expliciter les termes dominants d'ordre $O(z)$ des valeurs propres de la matrice ramifiée $A(z^{n_j})$ en fonction des sous-matrices de Lidskii. Pour cela, $A(z^{n_j})$ est réduite par équivalence à $L^{-1}(z)A(z^{n_j})R(z)$. Un bon choix des diagonales de monômes $L(z)$ et $R(z)$ conduit à une nouvelle équation algébrique $q(\lambda, z) = 0$ équivalente à $\det(\lambda - A(z^{n_j})) = 0$ et telle que $q(\lambda, 0)$ est, à une puissance de λ près, égale à $\det(L_j - \lambda^{n_j} E_j)$.

La preuve que nous donnons ci-dessous est légèrement différente. On procède en effet par similitude et non par équivalence, en explicitant une matrice de passage $P(z)$ diagonale inspirée du choix de $L(z)$ et $R(z)$ dans [45] et qui minimise le rang dominant de $A(z^{n_j})$ sur son orbite. La matrice $P(z)$ est suffisamment simple pour mesurer son effet sur $A(z^{n_j})$ et exprimer un polynôme quasi-Newton d'ordre $O(z)$ associé à $P^{-1}(z)A(z^{n_j})P(z)$ en fonction du polynôme $\det(L_j - \lambda^{n_j} E_j)$.

Nous réutiliserons cette technique pour généraliser le théorème 4.1 au chapitre 5.

Moro, Burke et Overton ont développé dans [45] une autre preuve, basée sur le polygone de Newton. Nous avons déjà repris leur approche au paragraphe 3.8 du chapitre précédent pour démontrer le théorème 3.5. Nous y reviendrons au paragraphe 4.6.

Preuve. Soit $j \in \{1, \ldots, q\}$. En posant $z = \epsilon^{1/n_j}$ on cherche à déterminer les valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(z)$ de la matrice ramifiée $A(z^{n_j})$. Soit

$$P(z) = \mathrm{Diag}\,[P_1^1(z), \ldots, P_1^{r_1}(z), \ldots, P_q^1(z), \ldots, P_q^{r_q}(z)]$$

où pour $1 \leq i \leq q$

$$P_i^1(z) = \ldots = P_i^{r_i}(z) = \begin{cases} \mathrm{Diag}\,[I_{n_i - n_j}, \mathrm{diag}\,[1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{n_j - 1}]] & \text{si } i < j, \\ \mathrm{diag}\,[1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{n_i - 1}] & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

Posons $\tilde{A}(z) = P^{-1}(z) A(z^{n_j}) P(z)$ et désignons par $V \in \mathbb{N}^{n \times n}$ et $\tilde{V} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ les matrices des valuations par rapport à z des éléments de $A(z^{n_j})$ et $\tilde{A}(z)$ respectivement. Partitionnées elles aussi conformément à la structure de J, les matrices V et $\tilde{V}$ possèdent ${r'_q}^2$ blocs et nous notons $V = [V^{kl}]$ et $\tilde{V} = [\tilde{V}^{kl}]$. Un moyen simple de quantifier l'effet de la similitude $P(z)$ sur $A(z^{n_j})$ consiste à exprimer $\tilde{V}$ en fonction de V. En effet, $P(z)$ étant par définition une diagonale de monômes unitaires, elle ne modifie que les valuations des éléments de $A(z^{n_j})$ mais pas la valeur des coefficients de ces éléments. En désignant par v_{gh}^{kl} l'élément du bloc V^{kl} de position (g, h) dans ce bloc, on a à cause de la structure de Jordan de J

$$v_{gh}^{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } (k, h) = (l, g+1), \\ n_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

En notant $z^{u_g^k}$ le g-ième élément diagonal du k-ième bloc diagonal de $P(z)$ on a de plus pour $\tilde{V}$

$$\tilde{v}_{gh}^{kl} = \begin{cases} u_{g+1}^k - u_g^k & \text{si } (k, h) = (l, g+1), \\ n_j + u_h^l - u_g^k & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.3}$$

Comme il y a deux définitions les blocs de $P(z)$ selon que $i < j$ ou $i \geq j$, quatre situations se présentent pour la valeur de la différence $u_h^l - u_g^k$.

$\boxed{k, l > r'_{j-1}}$ Dans ce cas $u_h^l - u_g^k = h - g$ par définition de $P(z)$. D'après (4.3) et comme $n_i < n_j$ pour tout $i > j$, on a alors

$$\tilde{v}_{gh}^{kl} \begin{cases} = 1 & \text{si } (k, h) = (l, g+1) \text{ ou si } k \leq r'_j \text{ et } (g, h) = (n_j, 1), \\ \geq 2 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.4}$$

$\boxed{k, l \leq r'_{j-1}}$ Considérons d'abord les $n_l - n_j + 1$ premières colonnes de $\tilde{V}^{kl}$ en rappelant que $u^l_h = 0$ pour $1 \leq h \leq n_l - n_j + 1$. Si $k = l$ les éléments de la première surdiagonale de $\tilde{V}^{ll}$ vérifient donc

$$\tilde{v}^{ll}_{h-1,h} = 0\,, \quad 2 \leq h \leq n_l - n_j + 1. \tag{4.5a}$$

Comme u^k_g est égal à $n_j - 1$ si $g = n_k$ et est inférieur à $n_j - 1$ sinon, cela entraîne pour les autres éléments de $\tilde{V}^{kl}$

$$\tilde{v}^{kl}_{gh} \begin{cases} = 1 & \text{si } g = n_k, \\ \geq 2 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad 1 \leq h \leq n_l - n_j + 1\,, \quad (k,h) \neq (l, g+1). \tag{4.5b}$$

Considérons maintenant les colonnes restantes de $\tilde{V}^{kl}$. Pour $n_l - n_j + 2 \leq h \leq n_l$ on a cette fois $u^l_h \geq 1$. Comme $u^l_h = u^l_{h-1} + 1$ les éléments de la première surdiagonale de $\tilde{V}^{ll}$ vérifient

$$\tilde{v}^{ll}_{h-1,h} = 1\,, \quad n_l - n_j + 2 \leq h \leq n_l. \tag{4.5c}$$

Comme $u^l_h \geq 1$ et $u^k_g \leq n_j - 1$, les autres éléments de $\tilde{V}^{kl}$ vérifient

$$\tilde{v}^{kl}_{gh} \geq 2\,, \quad n_l - n_j + 2 \leq h \leq n_l\,, \quad (k,h) \neq (l, g+1). \tag{4.5d}$$

$\boxed{l \leq r'_{j-1} < k}$ Ici le bloc de départ V^{kl} ne contient aucun zéro car $k \neq l$ et (4.3) se réduit à $\tilde{v}^{kl}_{gh} = n_j + u^l_h - u^k_g$. Comme $k \geq j$ on a $u^k_g = g - 1$ et donc $\tilde{v}^{kl}_{gh} = n_j + u^l_h - g + 1$. Si $k > j$ alors $n_k < n_j$ entraîne $g < n_j$ et donc $\tilde{v}^{kl}_{gh} \geq 2$. Si $k = j$ et $g < n_j$ on a encore $\tilde{v}^{kl}_{gh} \geq 2$; si $k = j$ et $g = n_j$ alors $\tilde{v}^{kl}_{n_j h} = u^l_h + 1$ et donc $\tilde{v}^{kl}_{n_j h}$ est égal à 1 si $1 \leq h \leq n_l - n_j + 1$ et est supérieur à 1 sinon. Finalement,

$$\tilde{v}^{kl}_{gh} \begin{cases} = 1 & \text{si } k \leq r'_j \text{ et } g = n_j \text{ et } 1 \leq h \leq n_l - n_j + 1, \\ \geq 2 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.6}$$

$\boxed{k \leq r'_{j-1} < l}$ Dans ce cas, (4.3) se réduit encore à $\tilde{v}^{kl}_{gh} = n_j + u^l_h - u^k_g$ car $k \neq l$. Comme $l \geq j$ on a $u^l_h = h - 1$ et donc $\tilde{v}^{kl}_{gh} = n_j + h - 1 - u^k_g$. Si $g < n_k$ alors $u^k_g < n_j - 1$ et donc $\tilde{v}^{kl}_{gh} \geq 2$. Si $g = n_k$ alors $u^k_g = n_j - 1$ et donc $\tilde{v}^{kl}_{n_k h} = h$. D'où finalement

$$\tilde{v}^{kl}_{gh} \begin{cases} = 1 & \text{si } (g,h) = (n_k, 1), \\ \geq 2 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.7}$$

L'étude de la matrice $\tilde{V}$ que nous venons de faire indique en particulier que $\tilde{A}(z)$ est de valuation positive ou nulle. C'est donc bien une perturbation de matrice en la variable z et nous pouvons considérer sa factorisation $\tilde{A}(z) = zC(z)D^{-1}(z)$ d'ordre $\mathrm{O}(z)$ définie au chapitre 2 par (2.1). Rappelons qu'un élément de la diagonale $D(z)$ vaut z (resp. 1) si la colonne de $\tilde{A}(z)$ correspondante est de valuation nulle (resp. positive). Le but est d'expliciter $\det(C_0 - \lambda D_0)$ en fonction des matrices constantes L_j et E_j. Pour cela, une première remarque concernant la structure du faisceau $C_0 - \lambda D_0$ peut être faite. En effet, on voit sur (4.4) et (4.7) que lorsque $l > r'_j$ le bloc $\tilde{V}^{kl}$ n'a aucun zéro. Avec $r^*_j = \sum_{i=1}^{j} r_i n_i$, cela signifie que les $n - r^*_j$ dernières colonnes de $\tilde{A}(z)$ sont toutes de valuation positive, et donc $D(z) = \mathrm{Diag}[D^{11}(z), I_{n-r^*_j}]$. D'autre part, lorsque $l \leq r'_j < k$ les éléments des blocs $\tilde{V}^{kl}$ sont tous supérieurs à 1 d'après (4.4) et (4.6) et la matrice C_0 est donc triangulaire supérieure. Plus précisément,

$$C_0 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} C_0^{11} & C_0^{12} \\ 0 & C_0^{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} r^*_j \\ n - r^*_j \end{array} \\ \begin{array}{cc} r^*_j & n - r^*_j \end{array} & \end{array} \quad , \quad D_0 = \begin{bmatrix} D_0^{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r^*_j} \end{bmatrix} \; , \quad r^*_j = \sum_{i=1}^{j} r_i n_i \, ,$$

et $C_0^{22} = (0^{n_{j+1}})^{r_{j+1}} \ldots (0^{n_q})^{r_q}$ car d'après (4.4) seuls les blocs diagonaux $\tilde{V}^{ll}$ ont des éléments égaux à 1 lorsque $l > r'_j$, qui sont ceux de leurs surdiagonales. Finalement

$$\det(C_0 - \lambda D_0) = (-1)^{n - r^*_j} \det(C_0^{11} - \lambda D_0^{11}). \tag{4.8}$$

En considérant les ${r'_j}^2$ blocs $F^{kl}(\lambda)$ du faisceau $C_0^{11} - \lambda D_0^{11} = [F^{kl}(\lambda)]$ partitionné conformément à J, on a pour $1 \leq l \leq r'_{j-1}$

$$F^{ll}(\lambda) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -\lambda & 1 & & & & & & \\ & 0 & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & & -\lambda & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & -\lambda & 1 \\ b_{kl} & & & & & & & -\lambda \end{array} \right] \tag{4.9}$$

et

$$F^{kl}(\lambda) = \left[\begin{array}{c|c} & \\ & \\ \hline & \\ b_{kl} \quad \times \quad \dots \quad \times & \end{array}\right] \quad \text{si } k \neq l. \tag{4.10}$$

Pour chacun des blocs diagonaux $F^{ll}(\lambda)$ définis par (4.9) il existe $i \in \{1, \dots, j-1\}$ tel que $F^{ll}(\lambda)$ soit d'ordre $n_i > n_j$ et possède $n_i - n_j$ zéros sur la diagonale. Pour $r'_{j-1} < l \leq r'_j$ on a les blocs diagonaux d'ordre n_j et les blocs non diagonaux $n_i \times n_j$ avec $n_i > n_j$ suivants.

$$F^{ll}(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda & 1 \\ b_{kl} & & & -\lambda \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F^{kl}(\lambda) = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \\ b_{kl} & & \end{bmatrix} \quad \text{si } k \neq l. \tag{4.11}$$

Considérons la colonne de blocs $F^{kl}(\lambda)$ avec $l \in \{r'_{j-1}+1, \dots, r'_j\}$ fixé. D'après la structure des deux matrices dans (4.11) on voit que $\det(C_0 - \lambda D_0)$ ne change pas lorsqu'on ajoute à la première colonne de $[F^{kl}(\lambda)]$ λ fois sa deuxième colonne, puis λ^2 fois sa troisième etc. On peut donc finalement remplacer la matrice $F^{ll}(\lambda)$ de (4.11) par le nouveau bloc diagonal

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & -\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \\ b_{kl} - \lambda^{n_j} & & & & -\lambda \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Les blocs non diagonaux $F^{kl}(\lambda)$ ne sont pas modifiés.

Les matrices définies par (4.9), (4.10), (4.11) et (4.12) permettent de simplifier le calcul du déterminant de $C_0 - \lambda D_0$. En effet, la première ligne des blocs contenant la matrice $F^{ll}(\lambda)$ de (4.9) a pour seuls éléments non nuls $-\lambda$ et 1. A cause des zéros diagonaux dans (4.9), on ne développe que par rapport au 1 de cette première ligne, et on itère sur l'opposé de la sous-matrice obtenue. (Il y a un changement de signe car l'élément par rapport auquel on développe est situé sur la première surdiagonale.) En continuant jusqu'à l'avant-dernière ligne et en répétant cela pour tous les blocs définis par (4.9), on isole les b_{kl} qui définissent la sous-matrice de Lidskii L_{j-1}. Il y a eu $\sum_{i=1}^{j-1} r_i(n_i - 1)$ changements de signe en tout. De la même façon, on développe par rapport aux 1 de la surdiagonale de chacune des r_j matrices d'ordre n_j définies par (4.12). Cela nécessite $r_j(n_j - 1)$ changements de signe et cela permet surtout de compléter L_{j-1} avec d'autres éléments b_{kl} de façon à avoir L_j. On obtient ainsi

$$\det(C_0^{11} - \lambda D_0^{11}) = (-1)^{r_j^* - r_j'} \det(L_j - \lambda^{n_j} E_j)$$

et donc d'après (4.8)

$$\det(C_0 - \lambda D_0) = (-1)^{n - r_j'} \det(L_j - \lambda^{n_j} E_j).$$

Comme $\Delta_j \neq 0$ le faisceau $C_0 - \lambda D_0$ est régulier et on peut appliquer le lemme 1.2 à la matrice $\tilde{A}(z)$ avec $a = b = 1$ et $L(z) = I$. Si $j = 1$ alors $E_1 = I_{r_1}$ et $\det(L_1 - \lambda^{n_1} E_1)$ est de degré $r_1 n_1$. Si $j \geq 2$, l'hypothèse supplémentaire $\Delta_{j-1} \neq 0$ entraîne que $\deg\det(L_j - \lambda E_j) = r_j$. Dans les deux cas, les r_j racines de $\det(L_j - \lambda E_j)$ dans $\overline{\mathsf{K}}$ sont toutes non nulles car $\Delta_j \neq 0$. $\square$

Dans cette preuve, la régularité du faisceau $C_0 - \lambda D_0$ indique que la matrice $\tilde{A}(z)$ est effectivement de rang dominant minimal égal à son nombre de colonnes de valuation zéro (proposition 2.2). Ce rang dominant minimal vaut $\sum_{i=1}^{j-1} r_i(n_i - n_j)$ d'après la structure des blocs diagonaux d'ordre $n_i > n_j$ définis par (4.9). Cette possibilité de minimiser explicitement le rang dominant de la matrice $A(z^{n_j})$ au moyen d'une similitude très simple car diagonale n'apparaît pas dans l'étude de Moro, Burke et Overton [45].

Si $A(\epsilon)$ n'est pas une perturbation de Lidskii, nous cherchons dans son orbite une matrice qui soit la plus proche possible d'une perturbation de Lidskii. La question est désormais: existe-t-il une perturbation $\tilde{A}(\epsilon)$ d'une forme de Jordan nilpotente $\tilde{J}$ à laquelle *toute* perturbation $A(\epsilon)$ d'une forme de Jordan nilpotente puisse être réduite par similitude et telle que pour toute valeur propre de $A(\epsilon)$ d'exposant dominant l'inverse d'un entier positif cet entier soit la dimension d'un bloc de $\tilde{J}$? Pour identifier une telle forme réduite, nous commençons par étudier d'autres invariants de $A(\epsilon)$ que les indices minimaux en valuation, que nous appelons indices minimaux en dimension.

4.3 Indices minimaux en dimension

On étudie ici la suite $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\delta_i = 2s_i - s_{i+1} - s_{i-1}\,, \quad s_i = \mathrm{val}\, p_i(\lambda,\epsilon)\,, \quad p_i(\lambda,\epsilon) = p(\lambda\epsilon, \epsilon^i). \tag{4.13}$$

Cette suite est duale de celle définie par (3.3) au chapitre 3 à cause du choix de $p_i(\lambda,\epsilon)$. Elle possède des propriétés analogues, décrites par les propriétés 4.1 et 4.2 ci-dessous. Comme $s_i = \min\{n-k+i\alpha_k \,:\, 0 \le k \le n\}$, on peut poser $s_0 = 0$ et on montre facilement que $(s_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante et que $(s_{i+1}-s_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante. Les δ_i sont donc tous positifs ou nuls. Introduisons maintenant l'indice j_1 égal au nombre de valeurs propres d'exposant dominant inférieur ou égal à 1 et les deux entiers positifs M et N tels que

$$N = \left\lceil \frac{1}{\beta_1} \right\rceil\,, \quad M = \left\lfloor \frac{1}{\beta_{j_1}} \right\rfloor.$$

Ainsi N est le plus petit entier positif tel que $\frac{1}{N} \le \beta_1$ et M est le plus grand entier tel que $\beta_{j_1} \le \frac{1}{M}$. D'où

$$0 < \frac{1}{N} \le \beta_1 \le \ldots \le \beta_{j_1} \le \frac{1}{M} \le 1 < \beta_{j_1+1} \le \ldots \le \beta_n.$$

Propriété 4.1 *$s_i = n$ $\forall i \ge N$ et $s_{N-1} < N$.*

Preuve. Les exposants dominants β_{ij} des solutions de $p_i(\lambda,\epsilon) = 0$ vérifient cette fois $\beta_{ij} = i\beta_j - 1$. Si $i \ge N$ ils sont tous positifs ou nuls et s_i est atteinte en $k = 0$ et vaut n. On a $s_{N-1} = \min\{n-k+(N-1)\alpha_k \,:\, 0 \le k \le n\}$ et donc en particulier $s_{N-1} \le n$ pour $k = 0$. Si $s_{N-1} = n$ alors tous les $\beta_{N-1,j}$ sont positifs ou nuls, c'est-à-dire $\beta_j \ge 1/(N-1)$ pour tout $1 \le j \le n$, ce qui contredit la définition de N. □

Propriété 4.2

(a) $\delta_i \in \mathbb{N}^*$ *pour tout* $i \in \mathbb{N}^*$ *;*

(b) $\delta_i = 0$ *pour tout* $i > N$ *et* $\delta_N \neq 0$ *;*

(c) $\sum_{i=1}^N i\delta_i = n$ *;*

(d) $\sum_{i=1}^N \delta_i = n - j_1 + \alpha_{j_1}$ *;*

(e) Soit $j \in \mathbb{N}$*. Alors* $\sum_{i=j+1}^N (i-j)\delta_i = n - s_j$.

Preuve. On déduit (a) de la décroissance de $(s_{i+1}-s_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et (b) de la propriété 4.1. Pour (c), (d) et (e) rappelons que $s_N = s_{N+1} = n$ d'après la propriété 4.1. La somme $\sum_{i=1}^N i\delta_i$ de (c) se réduit à $-s_0 + N(2s_N - s_{N+1}) - (N-1)s_N$. Puisque $s_0 = 0$ elle est donc égale à n. Pour (d) la somme $\sum_{i=1}^{N} \delta_i$ se réduit à $s_1 + s_N - s_{N+1}$ et donc à s_1. Or $\beta_{1j} \le 0$ pour $j \le j_1$ et $\beta_{1j} > 0$ pour $j > j_1$. Par conséquent, $s_1 = \min\{n - k + \alpha_k \,:\, 0 \le k \le n\}$ est atteint pour $k = j_1$ et $s_1 = n - j_1 + \alpha_{j_1}$. Enfin pour (e) la somme se réduit à $-s_j + (N - j + 1)s_N - (N - j)s_{N+1}$ et vaut donc $n - s_j$. $\square$

Définition 4.3 *On appelle* **indices minimaux en dimension** *de $A(\epsilon)$ les δ_i non nuls.*

Exemple 4.2 Considérons la perturbation de la forme de Jordan nilpotente $0^5 0^2 0$

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^2 & \epsilon^2 & \epsilon & \epsilon^2 & 0 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\epsilon & 0 & -2\,\epsilon^2 & -\epsilon - 2\,\epsilon^2 & -3\,\epsilon & -2\,\epsilon^2 & -\epsilon & 0 \\ 2\,\epsilon & 0 & 2\,\epsilon^2 & 2\,\epsilon^2 + \epsilon & 5\,\epsilon & 2\,\epsilon^2 & 3\,\epsilon & \epsilon \end{bmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $p(\lambda, \epsilon) = \lambda^8 - \epsilon\lambda^7 - \epsilon^2\lambda^5 + \left(-\epsilon + \epsilon^3\right)\lambda^4 + \epsilon^2\lambda^3 + \epsilon^3\lambda - \epsilon^4$ et on vérifie facilement à l'aide du polygone de Newton que $A(\epsilon)$ possède quatre valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\frac{1}{4}})$, trois d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\frac{2}{3}})$ et une d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon)$. D'où $N = 4$, $M = 1$ et $j_1 = 8$. Le début des suites $(s_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est indiqué dans le tableau

i	$\boxed{1}$	2	3	$\boxed{4}$	5	6	...
s_i	4	6	7	8	8	8	...
δ_i	2	1	0	1	0	0	...

où les valeurs encadrées sont celles de M et$N$. Pour $i > 4$ on observe que $s_i = 8$ et que $\delta_i = 0$. Les indices minimaux en dimension de $A(\epsilon)$ sont $\delta_4 = 1$, $\delta_2 = 1$ et $\delta_1 = 2$. Ils ne définissent pas à eux seuls une partition entière de $n = 8$, mais on a $4\delta_4 + 2\delta_2 + \delta_1 = 8$. $\diamond$

4.4 La forme J-réduite

Définition 4.4 *Une perturbation de matrice $A(\epsilon) = J + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ d'une forme de Jordan nilpotente $J = (0^{n_1})^{r_1} \ldots (0^{n_q})^{r_q}$ est* **J-réduite** *si $r_j = \delta_{n_j}$ pour $j = 1, \ldots, q$.*

Théorème 4.2 *Toute perturbation de matrice d'une forme de Jordan nilpotente est semblable à une forme J-réduite.*

Preuve. Nous nous ramenons comme dans la preuve du théorème 3.2 du chapitre 3 au cas d'une perturbation de matrice $A(\epsilon)$ dont la forme de Frobenius $F(\epsilon)$ est réduite au bloc compagnon défini par le polynôme caractéristique $p(\lambda,\epsilon)=\sum_{k=0}^{n} a_k(\epsilon)\lambda^{n-k}$ de $A(\epsilon)$.

On cherche alors à expliciter une matrice de passage $P(\epsilon)$ telle que $P^{-1}(\epsilon)F(\epsilon)P(\epsilon)$ est J-réduite. Soit q le nombre des δ_i non nuls. En désignant par $n_q < \ldots < n_2 < n_1$ les indices $i \geq 1$ correspondants, il suffit donc de trouver une matrice $P(\epsilon)$ telle que $P^{-1}(\epsilon)F(\epsilon)P(\epsilon)$ soit une perturbation de la forme de Jordan nilpotente $(0^{n_q})^{\delta_{n_q}}\ldots(0^{n_1})^{\delta_{n_1}}$. Puisque seuls les δ_{n_j} sont non nuls, on a $\delta'_{n_j}=\sum_{i=n_j}^{N}\delta_i=\delta_{n_j}+\ldots+\delta_{n_1}$ et $\delta^*_{n_j}=\sum_{i=n_j}^{N} i\delta_i = n_j\delta_{n_j}+\ldots+n_1\delta_{n_1}$. Partant du bloc compagnon

$$F(\epsilon)=[\boldsymbol{e}^{(2)},\ldots,\boldsymbol{e}^{(n)},-\bar{\boldsymbol{a}}(\epsilon)]\,,\quad \bar{\boldsymbol{a}}(\epsilon)=[a_n(\epsilon),\ldots,a_1(\epsilon)]^T\,,$$

on remplace certains 1 de sa première sous-diagonale par des ϵ en lui appliquant la similitude $P(\epsilon)=\mathrm{Diag}\,[P_q(\epsilon),\ldots,P_1(\epsilon)]$ où, pour $1\leq j\leq q$, la matrice $P_j(\epsilon)$ de dimension $\delta_{n_j}n_j$ est définie par

$$P_j(\epsilon)=\mathrm{Diag}\,[P_j^{\delta_{n_j}}(\epsilon),\ldots,P_j^1(\epsilon)]\quad \text{avec}\quad P_j^k(\epsilon)=\epsilon^{k+\delta'_{n_{j-1}}}I_{n_j}\,,\quad 1\leq k\leq\delta_{n_j}.$$

Les $n-n_1$ premières colonnes de $P^{-1}(\epsilon)F(\epsilon)P(\epsilon)$ sont donc la perturbation d'une matrice formée de δ_{n_q} blocs $0^{n_q},\ldots,\delta_{n_2}$ blocs 0^{n_2} et $\delta_{n_1}-1$ blocs 0^{n_1}. Partitionnons la dernière colonne de $F(\epsilon)$ conformément à la structure par blocs de $P(\epsilon)$. On a

$$-\bar{\boldsymbol{a}}(\epsilon)=-[\bar{\boldsymbol{a}}_q^{\delta_{n_q}}(\epsilon),\ldots,\bar{\boldsymbol{a}}_q^1(\epsilon),\ldots,\bar{\boldsymbol{a}}_1^{\delta_{n_1}}(\epsilon),\ldots,\bar{\boldsymbol{a}}_1^1(\epsilon)]^T$$

où pour $1\leq j\leq q$ et $1\leq k\leq\delta_{n_j}$ le vecteur $\bar{\boldsymbol{a}}_j^k(\epsilon)$ est d'ordre n_j et vérifie

$$\bar{\boldsymbol{a}}_j^k(\epsilon)=[a_{\delta^*_{n_j}+kn_j}(\epsilon),\ldots,a_{\delta^*_{n_{j-1}}+(k-1)n_j+2}(\epsilon),a_{\delta^*_{n_{j-1}}+(k-1)n_j+1}(\epsilon)]^T.$$

Les n_1 dernières colonnes de $P^{-1}(\epsilon)F(\epsilon)P(\epsilon)$ définissent alors la matrice de $\mathsf{F}^{n\times n_1}$

$$[\boldsymbol{e}^{(n-n_1+2)},\ldots,\boldsymbol{e}^{(n)},-\bar{\boldsymbol{b}}(\epsilon)]$$

où

$$-\bar{\boldsymbol{b}}(\epsilon)=-[\bar{\boldsymbol{b}}_q^{\delta_{n_q}}(\epsilon),\ldots,\bar{\boldsymbol{b}}_q^1(\epsilon),\ldots,\bar{\boldsymbol{b}}_1^{\delta_{n_1}}(\epsilon),\ldots,\bar{\boldsymbol{b}}_1^1(\epsilon)]^T$$

est tel que pour $1\leq j\leq q$ et $1\leq k\leq\delta_{n_j}$

$$\bar{\boldsymbol{b}}_j^k(\epsilon)=\epsilon^{-Y_j^k}\bar{\boldsymbol{a}}_j^k(\epsilon)\,,\quad Y_j^k=\delta'_{n_{j-1}}+k-1.$$

Pour que la matrice $P^{-1}(\epsilon)F(\epsilon)P(\epsilon)$ soit une perturbation de $(0^{n_q})^{\delta_{n_q}}\ldots(0^{n_1})^{\delta_{n_1}}$ il suffit donc de montrer que sa dernière colonne $-\bar{\boldsymbol{b}}(\epsilon)$ est de valuation au moins 1. Pour $1\leq l\leq n_j$

la l-ième composante du vecteur $\bar{\boldsymbol{a}}_j^k(\epsilon)$ étant de valuation $\alpha_{\delta^*_{n_{j-1}}+(k-1)n_j+l}$ cela revient à montrer que $\alpha_{\delta^*_{n_{j-1}}+(k-1)n_j+l} > Y_j^k$. Puisque $\epsilon^{s_{n_j}}$ divise $p(\lambda\epsilon, \epsilon^{n_j})$, on sait par définition de s_{n_j} que $\alpha_{\delta^*_{n_{j-1}}+(k-1)n_j+l} \geq X_j^k/n_j$ avec $X_j^k = s_{n_j} - n + \delta^*_{n_{j-1}} + (k-1)n_j + l$. Vérifions que $X_j^k/n_j > Y_j^k$. On réécrit pour cela la somme $\delta^*_{n_{j-1}}$ comme

$$\begin{aligned}
\delta^*_{n_{j-1}} &= n_j\delta'_{n_{j-1}} + \sum_{i=1}^{j-1}(n_i - n_j)\delta_{n_i} \\
&= n_j\delta'_{n_{j-1}} + \sum_{i=n_j+1}^{N}(i - n_j)\delta_i \quad \text{car seuls les } \delta_{n_i} \text{ sont non nuls et car } n_j < n_{j-1}, \\
&= n_j\delta'_{n_{j-1}} + n - s_{n_j} \quad \text{d'après la propriété 4.2(e).}
\end{aligned}$$

Par définition de X_j^k et Y_j^k on obtient finalement $X_j^k = n_jY_j^k + l$ avec $l \in \{1, \ldots, n_j\}$ et donc $X_j^k/n_j > Y_j^k$. $\square$

Exemple 4.3 On reprend l'exemple 4.2 où $J = 0^5 0^2 0$. On a $n_1 = 5$ et $r_1 = 1$. Comme $\delta_5 = 0$ la matrice $A(\epsilon)$ n'est pas J-réduite. Elle est pourtant semblable à

$$\tilde{A}(\epsilon) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\epsilon & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon
\end{bmatrix}$$

qui est une perturbation de $\tilde{J} = 0^4 0^2 (0)^2$. C'est une forme J-réduite de $A(\epsilon)$ car $\tilde{r}_1 = \delta_4 = 1$, $\tilde{r}_2 = \delta_2 = 1$ et $\tilde{r}_3 = \delta_1 = 2$. $\diamond$

Comme pour la forme v-réduite, il n'y a pas unicité de la forme J-réduite. On la caractérise également de deux façons, en termes de forme de Jordan nilpotente minimale, puis en termes de polynômes quasi-Newton d'ordre l'inverse d'un entier positif.

4.5 Deux caractérisations

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note ici η_k le nombre de blocs de J de dimension k. On introduit de plus une factorisation d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{1/i})$ pour $i \in \mathbb{N}^*$ qui permet de séparer les blocs de J de dimension supérieure à i de ceux de dimension inférieure ou égale à i. Nous considérons pour cela

$$A(\epsilon^i) = \epsilon L_i^{-1}(\epsilon) C_i(\epsilon) R_i^{-1}(\epsilon)\,, \quad D_i(\epsilon) = L_i(\epsilon) R_i(\epsilon)\,, \tag{4.14a}$$

où $L_i(\epsilon)$ et $R_i(\epsilon)$ sont deux diagonales de monômes telles que le produit $D_i(\epsilon)$ et la matrice $C_i(\epsilon) = L_i(\epsilon) A(\epsilon^i) R_i(\epsilon)/\epsilon$ soient de valuation positive ou nulle. Il reste à choisir $L_i(\epsilon)$ et $R_i(\epsilon)$. En nous inspirant des transformations de Lidskii rappelées par Moro, Burke et Overton dans [45, page 799] et afin d'obtenir deux caractérisations d'une forme J-réduite analogues à celles données au chapitre 3 pour la forme v-réduite, nous prenons

$$L_i(\epsilon) = \mathrm{Diag}\,[L_{i1}^1(\epsilon), \ldots, L_{i1}^{r_1}(\epsilon), \ldots, L_{iq}^1(\epsilon), \ldots, L_{iq}^{r_q}(\epsilon)] \tag{4.14b}$$

$$R_i(\epsilon) = \mathrm{Diag}\,[R_{i1}^1(\epsilon), \ldots, R_{i1}^{r_1}(\epsilon), \ldots, R_{iq}^1(\epsilon), \ldots, R_{iq}^{r_q}(\epsilon)] \tag{4.14c}$$

où pour $1 \leq j \leq q$

$$L_{ij}^1(\epsilon) = \ldots = L_{ij}^{r_j}(\epsilon) = \begin{cases} \mathrm{Diag}\,[I_{n_j-i}, \mathrm{diag}\,[1, \epsilon^{-1}, \epsilon^{-2}, \ldots, \epsilon^{-i+1}]] & \text{si } n_j > i, \\ \mathrm{diag}\,[1, \epsilon^{-1}, \epsilon^{-2}, \ldots, \epsilon^{-n_j+1}] & \text{si } n_j \leq i, \end{cases} \tag{4.14d}$$

et

$$R_{ij}^1(\epsilon) = \ldots = R_{ij}^{r_j}(\epsilon) = \begin{cases} \mathrm{Diag}\,[1, \epsilon I_{n_j-i}, \mathrm{diag}\,[\epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{i-1}]] & \text{si } n_j > i, \\ \mathrm{diag}\,[1, \epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{n_j-1}] & \text{si } n_j \leq i. \end{cases} \tag{4.14e}$$

Ainsi pour $k = 1, \ldots, r_j$

$$\det L_{ij}^k(\epsilon) \det R_{ij}^k(\epsilon) = \begin{cases} \epsilon^{n_j-i} & \text{si } n_j > i, \\ 1 & \text{si } n_j \leq i. \end{cases}$$

En rappelant que η_k désigne le nombre de blocs de J de dimension k et que n_1 est la plus grande dimension possible pour un bloc de J, on en déduit que

$$\det D_i(\epsilon) = \epsilon^{\sum_{k=i+1}^{n_1}(k-i)\eta_k}. \tag{4.15}$$

Dans cette expression, certains η_k peuvent bien sûr être nuls. D'autre part, comme $A(\epsilon^i) - J$ est de valuation au moins i la matrice $C_i(\epsilon)$ est bien de valuation positive ou nulle.

Propriété 4.3 *Soit $A(\epsilon) = J + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de la forme de Jordan nilpotente $J = (0^{n_1})^{r_1} \ldots (0^{n_q})^{r_q}$. Pour $j \in \{1, \ldots, q\}$ fixé on suppose que $r_k = \delta_{n_k}$, $k = 1, \ldots, j-1$. Alors $\delta_i = 0$ pour tout $i > n_j$ tel que $i \notin \{n_1, n_2, \ldots, n_{j-1}\}$. De plus $r_j \geq \delta_{n_j}$.*

Preuve. La démarche est la même que pour la propriété 3.3 du chapitre précédent. D'après (4.14a) et en rappelant que $p_{i-1}(\lambda,\epsilon) = \det(\lambda\epsilon I - A(\epsilon^{i-1}))$ on a

$$p_{i-1}(\lambda,\epsilon) = \epsilon^n \det D_{i-1}^{-1}(\epsilon)\det(\lambda D_{i-1}(\epsilon) - C_{i-1}(\epsilon)). \tag{4.16}$$

Par hypothèse et d'après la propriété 4.2(e) cela conduit à

$$\eta_i \geq \sum_{k=i}^{N}(k-i+1)\delta_k - \sum_{k=i}^{n_1}(k-i+1)\eta_k.$$

Comme $k \geq i > n_j$ on en déduit que $\delta_i = 0$ lorsque $i \notin \{n_1, n_2, \ldots, n_{j-1}\}$ et que $r_j = \eta_{n_j} \geq \delta_{n_j}$. $\square$

4.5.1 Forme de Jordan dominante minimale

Afin de pouvoir considérer l'orbite de $A(\epsilon)$ et pas seulement les perturbations d'une forme de Jordan nilpotente semblables à $A(\epsilon)$, nous introduisons la définition suivante.

Définition 4.5 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$. Si $\operatorname{val} A(\epsilon) \geq 0$ notons $(0^{n_1})^{r_1}\ldots(0^{n_q})^{r_q}$ la forme de Jordan de A_0. La* **forme de Jordan dominante** *de $A(\epsilon)$ est définie par*

$$\mathrm{lJ}\, A(\epsilon) = \begin{cases} [n_1, \ldots, n_1, \ldots, n_q, \ldots, n_q] & si \ \ \operatorname{val} A(\epsilon) \geq 0, \\ [n] & si \ \ \operatorname{val} A(\epsilon) < 0, \end{cases}$$

où dans le premier cas n_j est répété r_j fois pour $1 \leq j \leq q$.

On utilisera encore l'ordre lexicographique pour comparer deux formes de Jordan dominantes. Les valeurs extrêmes possibles pour une forme de Jordan dominante sont la matrice nulle O_n et le bloc de Jordan 0^n. Ainsi,

$$\underbrace{[1, \ldots, 1]}_{n} \leq \mathrm{lJ}\, A(\epsilon) \leq [n]\,, \quad \forall\ A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}. \tag{4.17}$$

Un exemple où ces bornes sont atteintes est, en dimension n,

$$\begin{bmatrix} 0 & \epsilon & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & \epsilon \\ \epsilon & & & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \epsilon^n & & & 0 \end{bmatrix}$$

en prenant $\operatorname{diag}[1, \epsilon^{-1}, \epsilon^{-2}, \ldots, \epsilon^{-n+1}]$ pour passer de la première matrice à la seconde par similitude. On remarquera que contrairement aux profils de valuations, les vecteurs lJ $\tilde{A}(\epsilon)$ et lJ $A(\epsilon)$ associés à deux perturbations de matrices semblables $A(\epsilon)$ et $\tilde{A}(\epsilon)$ n'ont pas nécessairement le même nombre de composantes.

Enfin, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et pour une perturbation $A(\epsilon) = J + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ de la forme de Jordan nilpotente $J = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q}$, nous notons $\mathcal{O}_k(A(\epsilon))$ l'ensemble des perturbations d'une forme de Jordan nilpotente $\tilde{A}(\epsilon) = \tilde{J} + \mathrm{O}(\epsilon)$ semblables à $A(\epsilon)$ et telles que $\tilde{\eta}_l = \eta_l$ pour $l = k, \dots, n_1$, c'est-à-dire telles $\tilde{J}$ et J aient les mêmes nombres de blocs de dimension au moins k. D'où

$$\mathcal{O}(A(\epsilon)) \supset \mathcal{O}_n(A(\epsilon)) = \dots = \mathcal{O}_{n_1+1}(A(\epsilon)) \supset \mathcal{O}_{n_1}(A(\epsilon)) \supset \dots \supset \mathcal{O}_{n_q}(A(\epsilon)) = \dots = \mathcal{O}_1(A(\epsilon)).$$

Pour $1 \leq i \leq n_q$ $\mathcal{O}_i(A(\epsilon))$ est l'ensemble des perturbations de la forme de Jordan nilpotente J semblables à $A(\epsilon)$, et pour $n_1 < i \leq n$ c'est l'ensemble des perturbations d'une forme de Jordan nilpotente arbitraire semblables à $A(\epsilon)$. Le lemme ci-dessous donne des conditions suffisantes sur J pour qu'une valeur δ_i soit un nombre minimal de blocs de Jordan de dimension i.

Lemme 4.1 *Soit $A(\epsilon) = J + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de la forme de Jordan nilpotente $J = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q}$. Pour $j \in \{1, \dots, q\}$ fixé supposons que $r_k = \delta_{n_k}$, $k = 1, \dots, j-1$ et, si $j = q$, $n_q \geq 2$. Alors $r_j = \delta_{n_j}$ si et seulement si r_j est minimal dans $\mathcal{O}_{n_j+1}(A(\epsilon))$.*

On remarquera que lorsque $j = q$ et $n_q = 1$ le nombre de blocs de J de dimension 1 est nécessairement minimal dans $\mathcal{O}_{n_q+1}(A(\epsilon))$.

Preuve. On procède comme pour la preuve du lemme 3.1 en montrant d'abord que si r_j qui ici vaut η_{n_j} n'est pas minimal dans $\mathcal{O}_{n_j+1}(A(\epsilon))$ alors $r_j > \delta_{n_j}$. On applique pour cela (4.16) à $\tilde{A}(\epsilon) \in \mathcal{O}_{n_j+1}(A(\epsilon))$ telle que $\tilde{\eta}_{n_j} < \eta_{n_j}$. Les propriétés 4.2(e) et 4.2(a) permettent de conclure. On montre ensuite que si r_j est minimal dans $\mathcal{O}_{n_j+1}(A(\epsilon))$ alors $r_j = \delta_{n_j}$ en remarquant que d'après la propriété 4.3 la forme J-réduite construite pour démontrer le théorème 4.2 est bien un élément de $\mathcal{O}_{n_j+1}(A(\epsilon))$. $\Box$

D'après (4.17) il existe une unique plus petite forme de Jordan dominante dans $\mathcal{O}(A(\epsilon))$. On déduit alors du lemme précédent une première caractérisation d'une forme J-réduite en termes de ce minimum.

Théorème 4.3 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation d'une forme de Jordan nilpotente. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $A(\epsilon)$ est J-réduite.

(ii) La forme de Jordan dominante de $A(\epsilon)$ est minimale dans $\mathcal{O}(A(\epsilon))$ par rapport à l'ordre lexicographique.

Preuve. On applique le lemme 4.1 successivement pour $j = 1, 2, \ldots, q$. $\square$

L'expression "indices minimaux en dimension" trouve ici son explication. On peut de plus faire la remarque évidente suivante, que nous retrouverons lors du calcul d'une forme J-réduite (paragraphe 4.7).

Remarque 4.1 Toute forme J-réduite est de rang dominant minimal dans $\mathcal{O}(A(\epsilon))$.

Exemple 4.4 On reprend les deux exemples 4.2 et 4.3 en considérant une troisième matrice $\hat{A}(\epsilon)$ semblable à $A(\epsilon)$ et $\tilde{A}(\epsilon)$

$$\hat{A}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ -\epsilon & 0 & 0 & -\epsilon & -\epsilon & -\epsilon & -\epsilon & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & 0 & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{bmatrix}.$$

On voit que $\mathrm{lJ}\,\hat{A}(\epsilon) = [5, 1, 1, 1]$ et on a $\mathrm{lJ}\,A(\epsilon) > \mathrm{lJ}\,\hat{A}(\epsilon) > \mathrm{lJ}\,\tilde{A}(\epsilon)$ car

$$[5, 2, 1] > [5, 1, 1, 1] > [4, 2, 1, 1].$$

D'après le théorème 4.3 ni $A(\epsilon)$ ni $\hat{A}(\epsilon)$ ne sont J-réduites. On peut cependant conclure que $\tilde{A}(\epsilon)$ l'est si l'on sait que $\delta_4 = 1$, $\delta_2 = 1$ et $\delta_1 = 2$. La forme de Jordan dominante $[4, 2, 1, 1]$ est donc minimale dans $\mathcal{O}(A(\epsilon))$. $\diamond$

Une seconde caractérisation à l'aide de polynômes quasi-Newton est donnée dans le paragraphe suivant. Elle n'utilise qu'un nombre fini de coefficients matriciels de la série $A(\epsilon)$.

4.5.2 Polynômes quasi-Newton d'ordre l'inverse d'un entier

Si $n_1 = 1$ alors $q = 1$, $r_1 = n$ et J est la matrice nulle. Nous supposerons donc $n_1 \geq 2$. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$\varphi_i(\lambda, \epsilon) = \det(C_i(\epsilon) - \lambda D_i(\epsilon))$$

et on vérifie que

$$\varphi_i(\lambda,\epsilon) = (-1)^n \epsilon^{-n} \det D_i(\epsilon) p_i(\lambda,\epsilon)$$

et donc d'après (4.15)

$$\operatorname{val} \varphi_i(\lambda,\epsilon) = s_i - n + \sum_{k=i+1}^{n_1} (k-i)\eta_k. \tag{4.18}$$

Lemme 4.2 *Soit* $A(\epsilon) = J + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ *une perturbation de la forme de Jordan nilpotente* $J = (0^{n_1})^{r_1} \ldots (0^{n_q})^{r_q}$. *Pour* $j \in \{1,\ldots,q\}$ *fixé, supposons que* $r_k = \delta_{n_k}$, $k = 1,\ldots,j-1$ *et, si* $j = q$, $n_q \geq 2$. *Alors* $r_j = \delta_{n_j}$ *si et seulement si* $\varphi_{n_j-1}(\lambda, 0) \neq 0$.

Preuve. Le polynôme $\varphi_{n_j-1}(\lambda,0)$ est non nul si et seulement si $\operatorname{val}\varphi_{n_j-1}(\lambda,\epsilon) = 0$. On applique alors (4.18) et les propriétés 4.2(e) et 4.3. □

Théorème 4.4 *Soit* $A(\epsilon) = J + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ *une perturbation de la forme de Jordan nilpotente* $J = (0^{n_1})^{r_1} \ldots (0^{n_q})^{r_q}$. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $A(\epsilon)$ *est J-réduite.*

(ii) $\varphi_{n_1-1}(\lambda,0) \neq 0, \ldots, \varphi_{n_{q-1}-1}(\lambda,0) \neq 0$ *et, si* $n_q \geq 2$, $\varphi_{n_q-1}(\lambda,0) \neq 0$.

Preuve. On applique le lemme 4.2 successivement pour $j = 1, 2, \ldots, q-1$ (q si $n_q \geq 2$). □

Exemple 4.5 Toujours à partir des exemples 4.2, 4.3 et 4.4 précédents, commençons par vérifier pour $A(\epsilon)$ et $\hat{A}(\epsilon)$ que $\varphi_4(\lambda,0)$ et $\tilde{\varphi}_4(\lambda,0)$ sont nuls. On déduira alors du théorème 4.4 que ces deux matrices ne sont pas J-réduites. Comme lJ $A(\epsilon) = [5,2,1]$ on a d'après (4.14)

$$L_4(\epsilon) = \operatorname{diag}[1,1,\epsilon^{-1},\epsilon^{-2},\epsilon^{-3},1,\epsilon^{-1},1] \quad \text{et} \quad R_4(\epsilon) = \operatorname{diag}[1,\epsilon,\epsilon,\epsilon^2,\epsilon^3,1,\epsilon,1].$$

On obtient alors avec la factorisation $A(\epsilon^4) = \epsilon L_4^{-1}(\epsilon) C_4(\epsilon) R_4^{-1}(\epsilon)$ d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\frac{1}{4}})$

$$\varphi_4(\lambda,0) = \det \left[\begin{array}{c|c|cccccc}
-\lambda & 1 & & & & & & \\
\hline
 & 0 & 1 & & & & & \\
\hline
 & & -\lambda & 1 & & & & \\
 & & & -\lambda & 1 & & & \\
 & & & & -\lambda & 0 & & \\
 & & & & & -\lambda & 1 & \\
 & & & & & & -\lambda & 1 \\
 & & & & & & & -\lambda
\end{array}\right] = 0.$$

Cela signifie d'après le lemme 4.2 qu'il existe une perturbation de forme de Jordan nilpotente semblable à $A(\epsilon)$ dont la forme de Jordan dominante n'a que des blocs de dimension inférieure à 5.

Il en est bien sûr de même pour $\hat{A}(\epsilon)$ dont on a vu dans l'exemple 4.4 que lJ $\hat{A}(\epsilon) = [5,1,1,1]$. On pourra vérifier que $\hat{\varphi}_4(\lambda,0) = 0$. (On a en fait $\hat{\varphi}_4(\lambda,0) = \varphi_4(\lambda,0)$.)

Calculons maintenant pour $\tilde{A}(\epsilon)$ les polynômes $\tilde{\varphi}_3(\lambda,0)$ et $\tilde{\varphi}_1(\lambda,0)$. Puisque lJ $\tilde{A}(\epsilon) = [4,2,1,1]$ la factorisation $\tilde{A}(\epsilon^3) = \epsilon \tilde{L}_3^{-1}(\epsilon)\tilde{C}_3(\epsilon)\tilde{R}_3^{-1}(\epsilon)$ d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\frac{1}{3}})$ est définie par

$$\tilde{L}_3(\epsilon) = \operatorname{diag}[1,1,\epsilon^{-1},\epsilon^{-2},1,\epsilon^{-1},1,1] \quad \text{et} \quad \tilde{R}_3(\epsilon) = \operatorname{diag}[1,\epsilon,\epsilon,\epsilon^2,1,\epsilon,1,1],$$

ce qui conduit à

$$\tilde{\varphi}_3(\lambda,0) = \det \left[\begin{array}{c|c|cccccc} -\lambda & 1 & & & & & & \\ \hline & 0 & 1 & & & & & \\ \hline & & -\lambda & 1 & & & & \\ 1 & & & -\lambda & 1 & & & \\ & & & & -\lambda & 1 & & \\ & & & & & -\lambda & 0 & \\ & & & & & & -\lambda & 0 \\ & & & & & & & -\lambda \end{array}\right] = -\lambda^4.$$

Enfin, pour $\tilde{\varphi}_1(\lambda,0)$ on a $\tilde{A}(\epsilon) = \epsilon \tilde{L}_1^{-1}(\epsilon)\tilde{C}_1(\epsilon)\tilde{R}_1^{-1}(\epsilon)$ avec $\tilde{L}_1(\epsilon) = I_8$ et $\tilde{R}_1(\epsilon) = \operatorname{diag}[1,\epsilon,\epsilon,\epsilon,1,\epsilon,1,1]$. D'où

$$\tilde{\varphi}_1(\lambda,0) = \det \left[\begin{array}{c|ccc|c|c|cc} -\lambda & 1 & & & & & & \\ \hline & 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ 1 & & & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & & -\lambda & 1 & & \\ \hline & & & & & 0 & 1 & \\ \hline & & & & 1 & & -\lambda & 0 \\ & & & & & & & 1-\lambda \end{array}\right] = \lambda - 1.$$

On constate que $\tilde{\varphi}_3(\lambda,0)$ et $\tilde{\varphi}_1(\lambda,0)$ sont deux polynômes quasi-Newton d'ordres respectifs $\mathrm{O}(\epsilon^{\frac{1}{3}})$ et $\mathrm{O}(\epsilon)$ et on conclut grâce au théorème 4.4 que $\tilde{A}(\epsilon)$ est une forme J-réduite. $\diamond$

Enfin en remarquant que $\Delta_j \neq 0$ entraîne $\varphi_{n_j-1}(\lambda,0) \neq 0$ par définition de la factorisation (4.14), on déduit du théorème 4.4 le corollaire suivant.

Corollaire 4.3 *Toute perturbation de Lidskii est J-réduite.*

4.6 Interprétations avec le polygone de Newton (Moro, Burke et Overton [45])

Ce paragraphe reprend exclusivement l'interprétation de la théorie de Lidskii avec le polygone de Newton introduite par Moro, Burke et Overton dans [45]. Par rapport à l'analyse en termes de polygone de Newton des perturbations selon les valuations faite au paragraphe 3.8 il s'agit, très schématiquement, d'échanger les abscisses et les ordonnées.

Une forme de Jordan nilpotente $J = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q}$ arbitraire étant donnée, le but est d'identifier parmi tous les polygones de Newton possibles pour une perturbation de J dans $\mathsf{F}^{n\times n}$ celui qui est le plus bas. On fixe cette fois une ordonnée y, c'est-à-dire une puissance de ϵ, et on cherche l'abscisse $x(y)$ maximale, c'est-à-dire la plus petite puissance de λ du polynôme caractéristique à laquelle ϵ^y puisse être associé. Le théorème 3.1 de [45] que nous rappelons ci-dessous précise $x(y)$ ainsi que le coefficient $\hat{a}_{x(y)}$ du polynôme caractéristique. Comme partout ailleurs dans ce chapitre $r'_j = \sum_{i=1}^{j} r_i$ et $r^*_j = \sum_{i=1}^{j} r_i n_i$.

Théorème 4.5 *[45] Soient $j \in \{1, \dots, q\}$ et $0 < k \leq r_j$. Si $y = r'_{j-1} + k$ alors $x(y) = r^*_{j-1} + kn_j$ et le coefficient $\hat{a}_{x(y)}$ de ϵ^y dans $a_{x(y)}(\epsilon)$ est égal à $(-1)^y$ fois la somme de tous les mineurs principaux de L_j d'ordre $r'_{j-1} + k$ qui contiennent L_{j-1}. En particulier, $\hat{a}_{r^*_j} = (-1)^{r'_j} \det L_j$.*

Par conséquent, l'enveloppe inférieure de tous les polygones de Newton possibles ne dépend que de la structure de la forme de Jordan nilpotente J donnée au départ.

Définition 4.6 *[45] Soit $A(\epsilon) = J + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de la forme de Jordan nilpotente $J = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q}$. Soient les points du plan $\mathcal{Q}_0 = (0,0)$ et $\mathcal{Q}_j^k = (r^*_{j-1} + kn_j, r'_{j-1} + k)$ pour $j = 1, \dots, q$ et $k = 1, \dots, r_j$. On note $\mathcal{Q}_j = \mathcal{Q}_j^{r_j}$ et on appelle* **enveloppe de Newton** *associée à la forme de Jordan dominante de $A(\epsilon)$ l'enveloppe convexe inférieure $\mathcal{E}_J$ de l'ensemble $\{\mathcal{Q}_j\}_{0\leq j\leq q}$.*

Cette seconde enveloppe - après celle du chapitre 3 - est formée uniquement de segments dont la pente est l'inverse d'un entier positif et dont la longueur - et non plus la hauteur - est le produit d'une dimension de bloc de J et de la multiplicité de ce bloc dans J.

Remarque 4.2 Moro, Burke et Overton déduisent du théorème 4.5 une autre preuve du théorème 4.1 (théorème de Lidskii) que nous ne rappelons pas ici (voir [45, page 808]).

En notant encore Δ_j^k la somme de tous les mineurs principaux de L_j d'ordre $r'_{j-1} + k$ qui contiennent L_{j-1} dans leur "coin supérieur gauche", on a de plus les caractérisations suivantes pour, respectivement, les conditions de Lidskii (intermédiaires), les perturbations de Lidskii et les formes J-réduites.

Corollaire 4.4 *Soient* $A(\epsilon) = J + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ *une perturbation de la forme de Jordan nilpotente* $J = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q}$ *et* $\mathcal{N}$ *son polygone de Newton. Soient* $j \in \{1, \dots, q\}$ *et* $k \in \{1, \dots, r_j\}$*. Alors* $\mathcal{Q}_j^k \in \mathcal{N}$ *si et seulement si* $\Delta_j^k \neq 0$*.*

Corollaire 4.5 *Une perturbation d'une forme de Jordan nilpotente est une perturbation de Lidskii si et seulement si son polygone de Newton et l'enveloppe de Newton associée à sa forme de Jordan dominante coïncident.*

Corollaire 4.6 *Une perturbation de matrice* $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ *d'une forme de Jordan nilpotente est* J*-réduite si et seulement si l'enveloppe de Newton associée à sa forme de Jordan dominante est "la plus haute possible" dans* $\mathcal{O}(A(\epsilon))$*.*

L'enveloppe de Newton définie par une forme J-réduite d'une perturbation d'une forme de Jordan nilpotente est donc la meilleure approximation du polygone de Newton à l'aide de segments de pente l'inverse d'un entier positif uniquement. Une interprétation graphique des propriétés 4.2(c) et 4.2(d) est donnée par la figure 4.1.

Exemple 4.6 Le premier dessin de la figure 4.2 ci-dessous représente le polygone de Newton $\mathcal{N}$ associé aux trois matrices $A(\epsilon)$, $\hat{A}(\epsilon)$ et $\tilde{A}(\epsilon)$ des exemples 4.2, 4.3 et 4.4 et défini à partir de leur polynôme caractéristique commun

$$p(\lambda, \epsilon) = \lambda^8 - \epsilon\lambda^7 - \epsilon^2\lambda^5 + \left(-\epsilon + \epsilon^3\right)\lambda^4 + \epsilon^2\lambda^3 + \epsilon^3\lambda - \epsilon^4.$$

Les trois autres dessins superposent $\mathcal{N}$ et, successivement, l'enveloppe de Newton définie par $J = 0^5 0^2 0$, $\hat{J} = 0^5(0)^3$ et $\tilde{J} = 0^4 0^2 (0)^2$. On voit donc que $\tilde{A}(\epsilon)$ est J-réduite sans être une perturbation de Lidskii car sa deuxième condition de Lidskii n'est pas satisfaite. Cependant, le fait que $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_3^1$ soient sur $\mathcal{N}$ indique que $A(\epsilon)$ admet trois valeurs propres de valuations strictement comprises entre 1/2 et 1 et de numérateur au moins 2. La seule possibilité est une valuation commune, égale à 2/3. Ce constat simple permettant de déceler des valeurs propres de valuation différente de l'inverse d'un entier positif a été étendu par Moro, Burke et Overton [45, corollaire 3.3] à un sous-ensemble de l'ensemble des perturbations d'une forme de Jordan nilpotente qui ne sont pas des perturbations de Lidskii. La situation n'étant pas toujours aussi simple que sur cet exemple, de nombreux cas "non génériques"demeurent non traités. $\diamond$

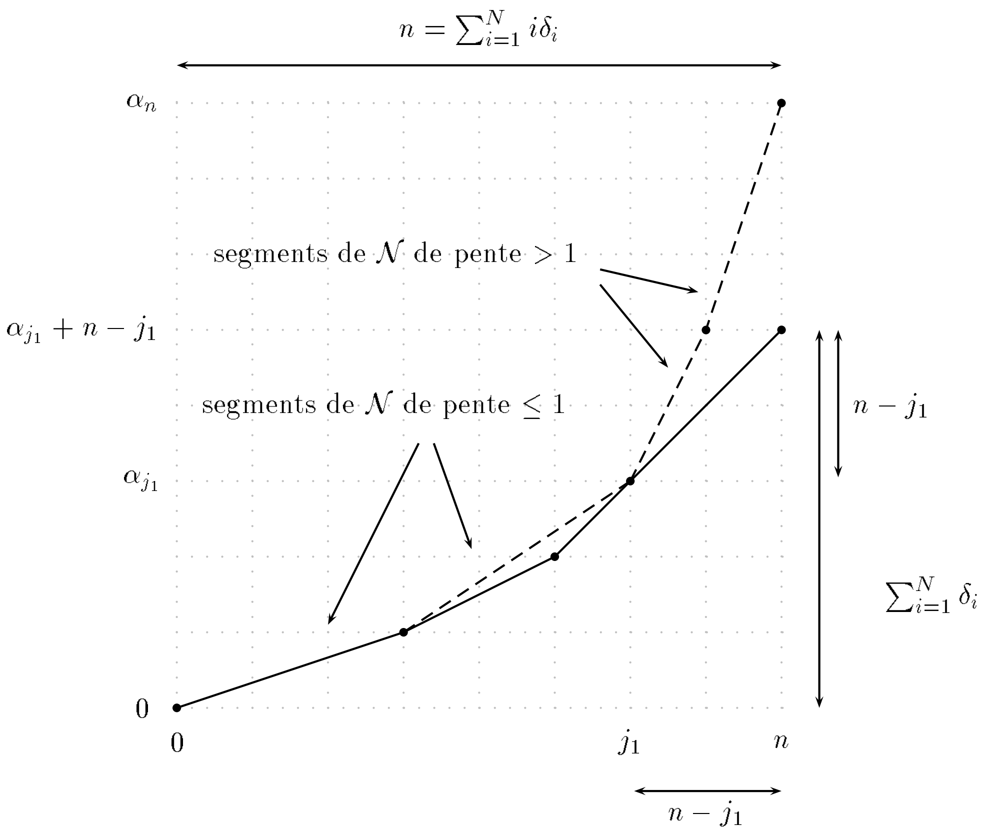


FIG. 4.1 – *Polygone de Newton $\mathcal{N}$ (pointillés) et enveloppe de Newton $\mathcal{E}_J$ (traits pleins) associés à une perturbation d'une forme de Jordan nilpotente $A(\epsilon) = J + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ supposée J-réduite. On note j_1 le nombre des valeurs propres de $A(\epsilon)$ de valuation inférieure ou égale à* 1*. La partie de l'enveloppe dont les points ont une abscisse comprise entre* 0 *et j_1 est la meilleure approximation de la partie correspondante de $\mathcal{N}$ à l'aide de pentes β avec $1/\beta \in \mathbb{N}^*$. Puisqu'un bloc de Jordan est de dimension au moins* 1*, ce qui reste de $\mathcal{N}$ est nécessairement approché au mieux par un segment de pente* 1 *et de longueur $n - j_1$. On en déduit que la longueur de $\mathcal{E}_J$ est $\sum_{i=1}^{N} i\delta_i = n$ (propriété 4.2(c)) et que sa hauteur est $\sum_{i=1}^{N} \delta_i = n - j_1 + \alpha_{j_1}$ (propriété 4.2(d)). On remarquera que dans le cas particulier où $j_1 = n$ les deux extrémités de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{E}_J$ coïncident. (Voir par exemple les deux derniers dessins sur la figure 4.2.)*

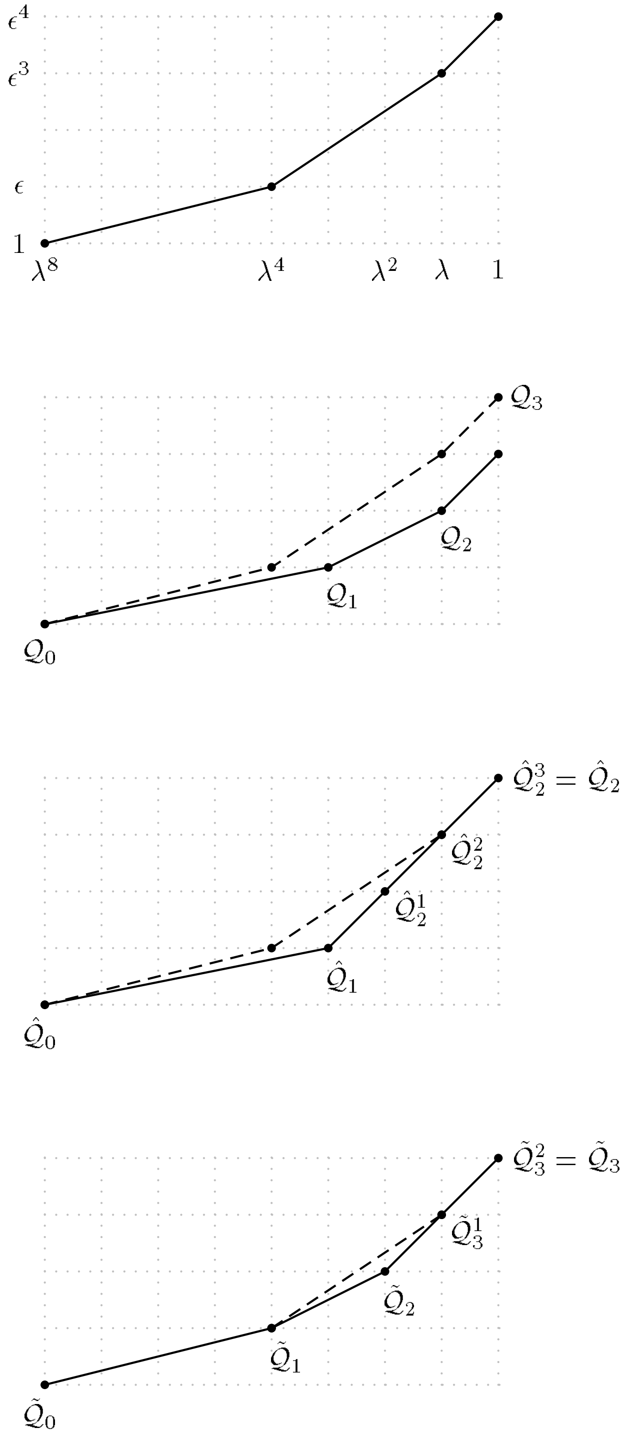


FIG. 4.2 – *Polygone $\mathcal{N}$ et enveloppes $\mathcal{E}_J$, $\mathcal{E}_{\hat{J}}$ et $\mathcal{E}_{\tilde{J}}$ de Newton associés aux trois perturbations de matrices $A(\epsilon)$, $\hat{A}(\epsilon)$ et $\tilde{A}(\epsilon)$ semblables des exemples 4.2, 4.3 et 4.4. La meilleure approximation de $\mathcal{N}$ à l'aide de pentes égales à l'inverse d'un entier positif uniquement est $\mathcal{E}_{\tilde{J}}$ (quatrième dessin): c'est l'enveloppe "la plus haute possible" dans $\mathcal{O}(A(\epsilon))$. On pourra comparer avec la figure 3.1.*

Enfin, on retrouve les analogues de la propriété 3.5 et du corollaire 3.11 du chapitre 3.

Propriété 4.4 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une forme J-réduite. Si $A(\epsilon)$ n'a que des valeurs propres de valuation l'inverse d'un entier positif alors $\mathcal{E}_J$ coïncide avec $\mathcal{N}$. Sinon, tout segment de $\mathcal{N}$ de pente $0 < \beta < 1$ telle que $1/\beta \notin \mathbb{N}^*$ est approché par deux segments de $\mathcal{E}_J$ de pentes $1/\lceil \beta^{-1} \rceil$ et $1/(\lceil \beta^{-1} \rceil - 1)$.*

Corollaire 4.7 *Toute perturbation d'une forme de Jordan nilpotente qui est J-réduite et qui n'a que des valeurs propres de valuation l'inverse d'un entier est une perturbation de Lidskii.*

4.7 Calcul d'une forme J-réduite par similitude polynomiale

Considérons une perturbation d'une forme de Jordan nilpotente $A(\epsilon) = J + \mathrm{O} \in \mathsf{F}^{n\times n}$. D'après le lemme 4.1 et si "$\Delta_j \neq 0$" est la première condition de Lidskii non satisfaite, on cherche à faire décroître le nombre de blocs d'ordre n_j de J sans modifier les nombres de ses blocs d'ordre supérieur. Nous utilisons pour cela les conditions de Lidskii intermédiaires "$\Delta_j^k \neq 0$" du paragraphe précédent afin de définir un critère d'arrêt.

On commence par une interprétation d'une forme de Jordan dominante minimale à rang dominant fixé à l'aide du diagramme de Ferrer associé à une forme de Jordan nilpotente. On indique ensuite un algorithme de minimisation d'une forme de Jordan nilpotente qui peut être vu comme une version duale de la maximisation du profil de valuations du chapitre 3.

4.7.1 Minimisation du rang dominant d'une perturbation d'une forme de Jordan nilpotente et diagramme de Ferrer

Comme on cherche à minimiser la forme de Jordan dominante de $A(\epsilon)$ dans son orbite (théorème 4.3) et comme une condition nécessaire pour que lJ $A(\epsilon)$ soit minimal est que le rang dominant lr $A(\epsilon)$ le soit également (remarque 4.1), on peut commencer par minimiser lr $A(\epsilon)$ avec l'algorithme 2.2 (`MLRF`) du chapitre 2. On connaît alors la longueur $n - j_1$ du segment de pente 1 qui approche au mieux les pentes du polygone de Newton de $A(\epsilon)$ supérieures à 1 (voir la figure 4.1): c'est la multiplicité de la racine nulle du polynôme quasi-Newton $\theta_1(\lambda)$.

Ensuite, il reste à "équilibrer" ou "stabiliser" la forme de Jordan de la matrice ainsi obtenue dans l'ensemble des perturbations d'une forme de Jordan nilpotente de même rang dominant, égal à ce minimum. La notion de forme de Jordan nilpotente "stable" est à relier à la possibilité de la représenter par un diagramme de Ferrer [21] (ou tableau d'Young [23]). Le **diagramme de Ferrer** $\mathcal{F}_J$ associé à $J = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q}$ représente chaque bloc de Jordan 0^{n_j} comme une pile de n_j pièces. (La terminologie "coins" est due à Edelman, Elmroth et Kagstrom [21].) Ces piles sont rangées par ordre de hauteurs décroissantes, de la gauche vers la droite. En déplaçant des pièces d'une pile vers une autre, il est toujours possible d'obtenir un diagramme de Ferrer dont les différences de hauteurs de piles sont, en valeur absolue, soit 0 soit 1. Dans ce cas, le diagramme de Ferrer sera dit stable. (On retrouve alors la propriété 4.4.) Un diagramme de Ferrer $\mathcal{F}_J$ stable correspond à une enveloppe de Newton $\mathcal{E}_J$ la plus haute possible et donc à une forme de Jordan nilpotente J minimale parmi toutes les formes de Jordan nilpotentes de même rang. Les figures 4.3 et 4.4 illustrent cette dualité. La lecture de la minimalité de J nous paraît plus directe sur $\mathcal{F}_J$ que sur $\mathcal{E}_J$.

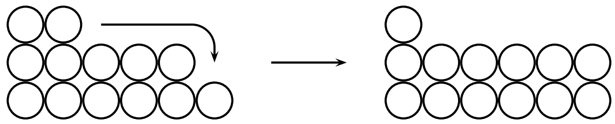


FIG. 4.3 – *Diagrammes de Ferrer $\mathcal{F}_J$ et $\mathcal{F}_{\tilde{J}}$ associés à $J = (0^3)^2(0^2)^3 0$ et $\tilde{J} = 0^3(0^2)^5$. La différence de hauteur entre la première et la dernière pile de $\mathcal{F}_J$ est 2 en valeur absolue et $\mathcal{F}_J$ n'est pas stable. Une seule chute de pièce suffit ici à obtenir un diagramme stable.*

La stabilisation de J est bien sûr conditionnée par la satisfaction des conditions de Lidskii. Par exemple, si $J = 0^3 0$ et si $A(\epsilon) = J + \mathrm{O}(\epsilon)$ est une perturbation de Lidskii alors on sait d'après le corollaire 4.3 que $A(\epsilon)$ J-réduite. Pourtant le diagramme de Ferrer associé à J n'est pas stable.

4.7.2 Minimisation d'une forme de Jordan nilpotente

Préliminaires

Les lemmes 4.3, 4.4 et 4.5 indiquent comment simplifier par similitude des matrices de la forme $J + B$ avec J une forme de Jordan nilpotente et B une matrice constante. Nous nous en servirons pour les démonstrations ultérieures. Quant aux lemmes 4.6 et 4.7 ils permettent d'exploiter la non inversibilité de la j-ième sous-matrice de Lidskii.

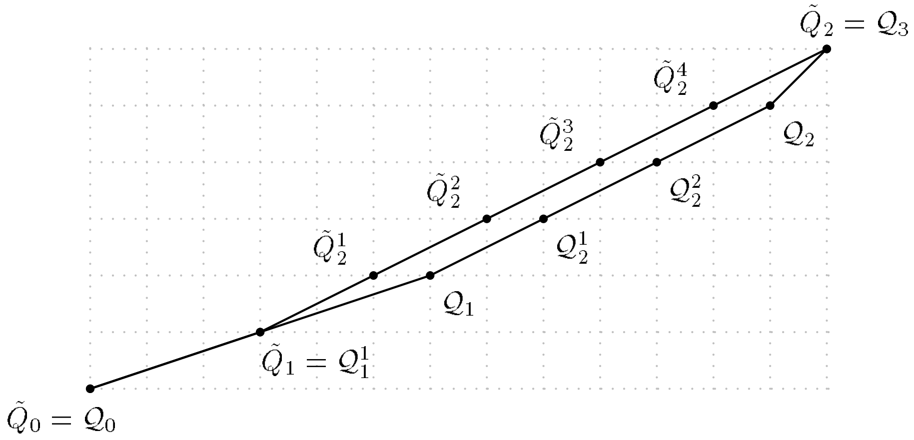


FIG. 4.4 – *Enveloppes de Newton $\mathcal{E}_J$ et $\mathcal{E}_{\tilde{J}}$ associées à $J = (0^3)^2(0^2)^3 0$ et $\tilde{J} = 0^3(0^2)^5$. L'enveloppe $\mathcal{E}_{\tilde{J}}$ est la plus haute possible et correspond au diagramme de Ferrer $\mathcal{F}_{\tilde{J}}$ stable de la figure 4.3 précédente.*

Lemme 4.3 *Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathsf{K}^n$. Il existe une similitude constante d'ordre $n+1$ qui transforme*

$$M = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 0 \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n & 0 \end{array}\right] \quad en \quad \tilde{M} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 0 \\ \hline \tilde{\alpha}_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

avec $\tilde{\alpha}_1 \in \mathsf{K}$.

Preuve. La dernière colonne C_{n+1} de M est identiquement nulle et on applique à M les transformations élémentaires

$$R_{n+1} \leftarrow R_{n+1} - \alpha_{i+1} R_i\,, \quad C_i \leftarrow C_i + \alpha_{i+1} C_{n+1}$$

pour $i = 1, \ldots, n-1$. $\square$

Lemme 4.4 *Soient* $\alpha \in \mathsf{K}\backslash\{0\}$ *et*

$$M_{ij}(\alpha) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \alpha & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ \hline & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{array}\right] \in \mathsf{K}^{(m+n)\times(m+n)}$$

avec $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, $j \in \{m+2, \ldots, m+n\}$, $m \geq n$ *et où* α *est l'élément de* $M_{ij}(\alpha)$ *en position* (i,j). *Alors il existe une similitude constante d'ordre* $m+n$ *qui transforme* $M_{ij}(\alpha)$ *en* $M_{ij}(0) = 0^m 0^n$.

Preuve. On applique à $M_{ij}(\alpha)$ les opérations élémentaires

$$C_j \leftarrow C_j - \alpha C_{i+1}\,, \quad R_{i+1} \leftarrow R_{i+1} + \alpha R_j$$

de façon à transformer $M_{ij}(\alpha)$ en $M_{i+1,j+1}(\alpha)$. En répétant le procédé jusqu'à $j = m+n$ on obtient finalement $R_{m+n} = 0$. $\square$

Lemme 4.5 *Soit*

$$M = \left[\begin{array}{c|c} 0 & u \\ \hline 0 & \\ \vdots & J \\ 0 & \end{array}\right] \in \mathsf{K}^{(n+1)\times(n+1)}$$

avec $J = 0^{n_1} \ldots 0^{n_q} \in \mathsf{K}^{n\times n}$, $n_1 \geq \ldots \geq n_q$ *et* $u \in \mathsf{K}^n$. *Supposons que* $u = [\,u_1, \ldots, u_q\,] \neq 0$ *où, pour* $j = 1, \ldots, q$, $u_j = [\,*, 0, \ldots, 0\,] \in \mathsf{K}^{n_j}$. *Si* j *est le plus petit indice tel que la première composante* $*$ *de* u_j *est non nulle alors la forme de Jordan de* M *est*

$$0^{n_1} \ldots 0^{n_{j-1}} 0^{n_j+1} 0^{n_{j+1}} \ldots 0^{n_q}$$

à l'ordre des blocs près.

Preuve. On élimine d'abord tous les autres éléments $*$ à l'aide de la première composante de u_j et en appliquant le lemme 4.4 à chaque étape. On peut ensuite permuter les blocs diagonaux de la matrice obtenue de façon à avoir $0^{n_1} \dots 0^{n_{j-1}} \tilde{M}\, 0^{n_{j+1}} \dots 0^{n_q}$ avec

$$\tilde{M} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & 0^{n_j} & & \\ 0 & & & & \end{array}\right] \in \mathsf{K}^{(n_j+1)\times(n_j+1)}.$$

Puisque $* \neq 0$ la forme de Jordan de $\tilde{M}$ est bien 0^{n_j+1}. □

Lemme 4.6 *Soit j le plus petit indice tel que $\Delta_j = 0$. Il existe une similitude constante d'ordre n qui ne modifie pas J mais qui annule la dernière ligne de la sous-matrice de Lidskii L_j.*

Preuve. Puisque $\Delta_{j-1} \neq 0$ et $\Delta_j = 0$ il existe $r'_{j-1} < k \leq r'_{j-1}$ tel que la k-ième ligne de L_j soit une combinaison linéaire des autres lignes. A partir d'un vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ du noyau à gauche de L_j, on a $L_{j-1}[k,.] = \sum_{l=1, l\neq k}^{r'_{j-1}} \alpha_l L_{j-1}[l,.]$. Soit alors $i_k = r'_{j-1} + kn_j$. La k-ième ligne de L_j est formée d'éléments de la i_k-ième ligne de A_1. En appliquant à $A(\epsilon)$ les opérations élémentaires de lignes

$$R_{i_k} \leftarrow R_{i_k} - \alpha_l R_{i_l} \tag{4.19}$$

pour $l = 1, \dots, r'_j, l \neq k$ on annule en particulier la k-ième ligne de L_j. De plus, elles ne modifient pas J car ses lignes d'indice i_l sont nulles. Pour définir une transformation de similitude, on applique après chaque opération (4.19) l'opération de colonnes

$$C_{i_l} \leftarrow C_{i_l} + \alpha_l C_{i_k}. \tag{4.20}$$

Examinons l'effet de (4.20) sur L_j et J. La combinaison linéaire $\boldsymbol{\alpha}$ entre les lignes n'est pas modifiée et donc on annule bien la k-ième ligne de L_j par similitude. En revanche, chaque opération (4.20) pour l donné modifie J en ajoutant $-\alpha_l$ à son élément (i_k, i_l+1) (initialement nul). Soit $\tilde{J}_l$ matrice ainsi obtenue. D'après le lemme 4.4 les 1 du bloc de $\tilde{J}_l$ qui contient l'élément diagonal (i_l+1, i_l+1) permettent de retrouver J. De plus, les opérations élémentaires nécessaires ici ne modifient pas la sous-matrice de Lidskii L_j car ses éléments proviennent de lignes et de colonnes non utilisées lors de telles opérations. Par conséquent, en appliquant (4.19), (4.20) et le lemme 4.4 pour $l = 1, \dots, r'_j$ avec $l \leq k$, on annule la k-ième colonne de L_j sans modifier J. Une permutation des blocs de J d'ordre n_j permet de conclure. □

Lemme 4.7 *Soit j le plus petit indice tel que $\Delta_j = 0$. Si de plus $\Delta_{j+1}^k = 0$ pour $k = 1, \dots, r_{j+1}$ alors il existe une similitude constante P d'ordre n qui ne modifie pas J mais qui transforme A_1 en $\tilde{A}_1 = P^{-1} A_1 P$ telle que*

$$\tilde{L}_{j+1} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_j & * \\ O & \tilde{X} \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

avec $\tilde{X}$ triangulaire supérieure stricte et où la dernière ligne de $\tilde{L}_j$ est nulle.

Preuve. Comme $\Delta_{j+1} = 0$ on peut annuler la dernière ligne de L_{j+1} (lemme 4.6). Soient $L_{j+1}^{(1)}$ la nouvelle $j+1$-ième sous-matrice de Lidskii et $M_{j+1}^{(1)}$ la sous-matrice principale de $L_{j+1}^{(1)}$ d'ordre $r_{j+1} - 1$. Alors $\Delta_{j+1}^{r_{j+1}-1}$ se réduit à un unique déterminant, $\det M_{j+1}^{(1)}$, qui est nul par hypothèse. On peut alors annuler sa dernière colonne et ainsi réduire $\Delta_{j+1}^{r_{j+1}-2}$ à un unique déterminant. En continuant avec $M_{j+1}^{(2)}, \dots, M_{j+1}^{(r_{j+1}-1)}$ on obtient la matrice $\tilde{X}$. On conclut en annulant la dernière ligne de L_j. $\square$

Décroissance stricte du nombre de blocs d'ordre n_j et critère de minimalité

Pour la décroissance stricte du nombre r_j de blocs de Jordan de dimension n_j on peut distinguer deux cas selon que la différence $n_j - n_{j+1}$ est supérieure à 1 (lemme 4.8) ou égale à 1. Dans ce dernier cas, on a soit une condition suffisante sur les valeurs Δ_j^k pour que r_j soit minimal (lemme 4.9), soit une condition suffisante pour que r_j diminue strictement par similitude polynomiale (lemme 4.10).

$\boxed{n_{j+1} < n_j - 1}$

Lemme 4.8 *Si $n_{j+1} < n_j - 1$ et si la dernière ligne de L_j est nulle alors la similitude $P(\epsilon) = \mathrm{Diag}\,[I_{r_j^*-1}, \epsilon, I_{n-r_j^*}]$ transforme $A(\epsilon)$ en $\tilde{A}(\epsilon) = P^{-1}(\epsilon) A(\epsilon) P(\epsilon)$ semblable à un élément de $\mathcal{O}_{n_j+1}(A(\epsilon))$ et telle que la forme de Jordan de $\tilde{A}_0$ vérifie $\tilde{r}_j = r_j - 1$.*

Preuve. On a $\mathrm{val}\, \tilde{A}(\epsilon) \geq 0$ et

$$\tilde{A}_0 = \left[\begin{array}{c|c|c} & 0 & \\ \tilde{J} & \vdots & 0 \\ & 0 & \\ \hline \tilde{u} & 0 & \tilde{v} \\ \hline & 0 & \\ 0 & \vdots & \tilde{K} \\ & 0 & \end{array}\right]$$

avec $\tilde{J} = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_{j-1}})^{r_{j-1}} (0^{n_j})^{r_j - 1} 0^{n_j - 1}$ de dimension $r_j^* - 1$ et $\tilde{K} = (0^{n_j})^{r_j} \dots (0^{n_q})^{r_q}$ de dimension $n - r_j^*$. De plus, la r_j^*-ième ligne $[\tilde{u}, 0, \tilde{v}]$ de $\tilde{A}_0$ est égale à la r_j^*-ième ligne de A_1 sauf pour son r_j^*-ième élément, égal à zéro. Par conséquent

$$\tilde{u} = [\, \tilde{u}_1^1, \dots, \tilde{u}_1^{r_1}, \dots, \tilde{u}_{j-1}^1, \dots, \tilde{u}_{j-1}^{r_{j-1}}, \tilde{u}_j^1, \dots, \tilde{u}_j^{r_j - 1}, \tilde{u}' \,]$$

avec pour $j_1 = 1, \dots, j$

$$\tilde{u}_{j_1}^{j_2} = [\, 0, \underbrace{*, \dots, *}_{n_{j_1} - 1}], \quad \text{et} \quad \tilde{u}' = [\, 0, \underbrace{*, \dots, *}_{n_j - 2}]$$

pour $j_2 = 1, \dots, r_j$ si $j_1 < j$ et $j_2 = 1, \dots, r_j - 1$ si $j_1 = j$. Les $*$ désignent des éléments de A_1 de même position et les zéros en première composante proviennent de la dernière ligne de L_j. Comme la r_j^*-ième colonne de $\tilde{A}_0$ est nulle, on applique le lemme 4.3 pour annuler tous les éléments de $[\tilde{u}, 0, \tilde{v}]$ situés sur une colonne de $\tilde{A}_0$ contenant un 1 d'un des blocs des formes de Jordan $\tilde{J}$ et $\tilde{K}$. La matrice $\bar{A}_0$ qu'on obtient ainsi a la même structure que $\tilde{A}_0$. Plus précisément $\bar{J} = \tilde{J}$, $\bar{K} = \tilde{K}$ et $\bar{u} = 0$. Examinons maintenant le vecteur $\bar{v}$. S'il est nul on a clairement ce qu'on veut. Sinon sa structure est

$$\bar{v} = [\, \bar{v}_{j+1}^1, \dots, \bar{v}_{j+1}^{r_{j+1}}, \dots, \bar{v}_q^1, \dots, \bar{v}_q^{r_q} \,] \neq 0 \tag{4.22}$$

ou, pour $j_1 = j + 1, \dots, q$ et $j_2 = 1, \dots, r_j$,

$$\bar{v}_{j_1}^{j_2} = [\, *, \underbrace{0, \dots, 0}_{n_{j_1} - 1}].$$

D'après le lemme 4.5 la forme de Jordan de la sous-matrice

$$\left[\begin{array}{c|c} 0 & \bar{v} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \tilde{K} \\ 0 & \end{array}\right]$$

de $\bar{A}_0$ a des blocs de dimension au plus $n_j + 1$. □

Ce premier cas est illustré avec le diagramme de Ferrer sur la figure 4.5.

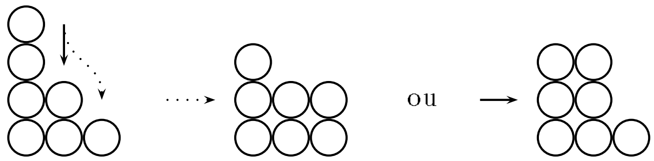


FIG. 4.5 – *Chutes de pièces indiquant, à partir de $0^4 0^2 0$, l'obtention de $0^3 (0^2)^2$ ou $(0^3)^2 0$.*

On pourra remarquer que la matrice $P(\epsilon)$ du lemme 4.8 ne définit pas a priori une chute plutôt qu'une autre.

$\boxed{n_{j+1} = n_j - 1}$

Lemme 4.9 *S'il existe $k \in \{1, \dots, r_{j+1}\}$ tel que $\Delta_{j+1}^k \neq 0$ alors le nombre de blocs de J de dimension n_j est minimal dans $\mathcal{O}_{n_j+1}(A(\epsilon))$.*

Preuve. Si k' désigne le plus petit indice compris entre 1 et r_j tel que $\Delta_j^{r_j - k} \neq 0$ alors les points $\mathcal{P}_j^{r_j - k'}$ et $\mathcal{P}_{j+1}^k$ appartiennent au polygone de Newton. Le diagramme de Ferrer associé à la portion du polygone de Newton qu'ils délimitent est stable car il n'y a que des blocs 0^{n_j} et $0^{n_j - 1}$. $\square$

Reste le cas où $\Delta_{j+1}^1 = \ldots = \Delta_{j+1}^{r_{j+1}} = 0$. Le résultat ci-dessous montre comment exploiter la structure particulière que l'on peut ici supposer pour L_{j+1} (lemme 4.7).

Lemme 4.10 *Si $n_{j+1} = n_j - 1$ et si L_{j+1} a la structure triangulaire décrite par (4.21) alors la similitude*

$$P(\epsilon) = \mathrm{Diag}\,[I_{r_j^* - 1}, \epsilon, \underbrace{I_{n_{j+1}-1}, \epsilon, \ldots, I_{n_{j+1}-1}, \epsilon}_{r_{j+1} n_{j+1}}, I_{n - r_{j+1}^*}]$$

transforme $A(\epsilon)$ en $\tilde{A}(\epsilon) = P^{-1}(\epsilon) A(\epsilon) P(\epsilon) \in \mathcal{O}_{n_j+1}(A(\epsilon))$ telle que la forme de Jordan de $\tilde{A}_0$ vérifie $\tilde{r}_j = r_j - 1$.

Preuve. En appliquant les lemmes 4.3 et 4.5 comme dans la preuve du lemme 4.8 on obtient pour la nouvelle matrice non perturbée

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} \bar{A}_0^{11} & \bar{A}_0^{12} & \bar{A}_0^{13} \\ 0 & \bar{A}_0^{22} & \bar{A}_0^{23} \\ 0 & 0 & \bar{A}_0^{33} \end{bmatrix}.$$

Ici

$$\bar{A}_0^{11} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \tilde{J} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

est la même qu'avant. De plus, tous les éléments de $[\,\bar{A}_0^{12}\bar{A}_0^{13}\,]$ sont nuls sauf ceux de la dernière ligne qui ont la même structure que $\bar{v}$ dans (4.22). La matrice $[\,\bar{A}_0^{22}\bar{A}_0^{23}\,]$ est définie de façon analogue mais $\bar{A}_0^{22}$ est de plus triangulaire supérieure stricte. Enfin,

$$\bar{A}_0^{33} = (0^{n_{j+2}})^{r_{j+2}} \cdots (0^{n_q})^{r_q}.$$

On déduit de cette forme que seule $\tilde{J}$ contient des blocs d'ordre supérieur ou égal à n_j et que le nombre de blocs 0^{n_j} est désormais $r_j - 1$. $\square$

Les diagrammes de Ferrer correspondant à cette situation sont ceux de la figure 4.3.

Finalement, les lemmes 4.8, 4.9 et 4.10 conduisent à l'algorithme 4.1 (`LJD`) de décroissance du nombre de blocs 0^{n_j} dans $\mathcal{O}_{n_j+1}(A(\epsilon))$ décrit ci-dessous. D'où l'algorithme 4.2 (`JRF`) de minimisation de lJ $A(\epsilon)$ dans $\mathcal{O}(A(\epsilon))$.

Corollaire 4.8 *L'algorithme 4.1 (*`LJD`*) calcule au moyen d'une matrice polynomiale $P(\epsilon)$ inversible une matrice $\tilde{A}(\epsilon) \in \mathcal{O}_{n_j+1}(A(\epsilon))$ telle que $\tilde{r}_j \leq r_j$.*

Corollaire 4.9 *L'algorithme 4.2 (*`JRF`*) calcule au moyen d'une matrice polynomiale $P(\epsilon)$ inversible une forme J-réduite $\tilde{A}(\epsilon)$ semblable à $A(\epsilon)$.*

4.8 Valeurs propres de valuation l'inverse d'un entier

On utilise ici la seconde caractérisation d'une forme J-réduite pour voir ce qu'elle révèle en termes de valeurs propres. La propriété ci-dessous est l'analogue de la propriété 3.4 et indique où chercher les polynômes quasi-Newton d'ordre l'inverse d'un entier.

Algorithme `LJD [Leading Jordan Decrease]`

Entrée: - une perturbation de matrice $A(\epsilon) = (0^{n_1})^{r_1} \ldots (0^{n_q})^{r_q} + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n \times n}$.
- le plus petit entier $j \in \{1, \ldots, q\}$ tel que $\Delta_j = 0$.

Sortie: - une perturbation de matrice $\tilde{A}(\epsilon) \in \mathcal{O}_{n_j+1}(A(\epsilon))$ telle que $\tilde{r}_j = \tilde{\eta}_{n_j} \leq r_j$.
- les entiers r_j et $\tilde{r}_j$.
- éventuellement, une matrice de passage $P(\epsilon)$ polynomiale (et son inverse).

(1) [Initialisations]
$x \leftarrow r_j$.
si $n_{j+1} < n_j - 1$
(2) [Décroissance stricte de r_j]
$A(\epsilon) \leftarrow P_1^{-1} A(\epsilon) P_1$ où P_1 annule la dernière ligne de L_j sans modifier $A(0)$.
$P_2(\epsilon) = \mathrm{Diag}\,[I_{r_j^*-1}, \epsilon, I_{n-r_j^*}]$.
$A(\epsilon) \leftarrow P_2^{-1}(\epsilon) A(\epsilon) P_2(\epsilon)$.
sinon
si $\Delta_{j+1}^1 = \ldots = \Delta_{j+1}^{r_{j+1}} = 0$
(3) [Décroissance stricte de r_j]
$A(\epsilon) \leftarrow P_3^{-1} A(\epsilon) P_3$ où P_3 triangularise L_{j+1} sans changer $A(0)$.
$P_4(\epsilon) = \mathrm{Diag}\,[I_{r_j^*-1}, \epsilon, \underbrace{I_{n_{j+1}-1}, \epsilon, \ldots, I_{n_{j+1}-1}, \epsilon}_{r_{j+1} n_{j+1}}, I_{n-r_{j+1}^*}]$.
$A(\epsilon) \leftarrow P_4^{-1}(\epsilon) A(\epsilon) P_4(\epsilon)$.
(4) [Retourner le résultat]
$\tilde{A}(\epsilon) \leftarrow P_5^{-1} A(\epsilon) P_5$ avec $P_5^{-1} A_0 P_5$ sous forme de Jordan.
retourner la matrice $\tilde{A}(\epsilon)$ et les entiers x et $\tilde{r}_j$.

Algorithme 4.1: Décroissance de la forme de Jordan dominante

Algorithme `JRF [J-Reduced Form]`

Entrée: - une perturbation de matrice $A(\epsilon) = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q} + \mathrm{O}(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$.

Sortie: - une forme J-réduite $\tilde{A}(\epsilon)$ semblable à $A(\epsilon)$.

- la liste $\mathcal{I}$ des indices minimaux en dimension de $A(\epsilon)$.
- éventuellement, une matrice de passage $P(\epsilon)$ polynomiale (et son inverse).

(1) [Initialisations]
 $\mathcal{I} \leftarrow \emptyset$, $\sigma \leftarrow 0$, $j \leftarrow 1$.

(2) [Minimisation du rang dominant]
 $A(\epsilon) \leftarrow P^{-1}\tilde{A}(\epsilon)P$ où $P^{-1}\tilde{A}(0)P$ est une forme de Jordan nilpotente.
 $j_1 \leftarrow n -$ multiplicité de la racine nulle de $\theta_1(\lambda)$.

(3) [Minimisation de la forme de Jordan dominante]
 tant que $\sigma \neq j_1$
  (2.1) [Appeler la procédure `LJD` avec $A(\epsilon)$ et j]
  (2.2) si $r_j \neq 0$ et $\tilde{r}_j \neq r_j$
    $A(\epsilon) \leftarrow \tilde{A}(\epsilon)$ et recommencer (2.1).
   $A(\epsilon) \leftarrow \tilde{A}(\epsilon)$.
  (2.3) [Ici $A(\epsilon)$ est telle que r_j est minimal dans $\mathcal{O}_{n_j+1}(A(\epsilon))$ et vaut η_{n_j}]
   si $r_j \neq 0$
    [r_j est le j-ième indice minimal en valuation de $A(\epsilon)$]
    $\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{I} \cup \{r_j\}$.
    [Mise à jour de σ et j]
    $\sigma \leftarrow \sigma + r_j n_j$, $j \leftarrow j+1$.

(3) [Retourner le résultat]
 $\tilde{A}(\epsilon) \leftarrow A(\epsilon)$.
 retourner la matrice $\tilde{A}(\epsilon)$ et la liste $\mathcal{I}$.

Algorithme 4.2: Calcul d'une forme J-réduite par similitude polynomiale

Propriété 4.5 *Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de la forme de Jordan nilpotente $(0^{n_1})^{r_1}\dots(0^{n_q})^{r_q}$. Si $A(\epsilon)$ est J-réduite alors*

(a) le polynôme $\varphi_i(\lambda, 0)$ est non nul;

(b) si $\varphi_i(\lambda, 0)$ n'est pas un monôme alors $i \in \{n_1, n_2, \dots, n_q\}$.

Preuve. Pour (a) on montre que $\operatorname{val}\varphi_i(\lambda, \epsilon) = 0$ grâce à (4.18) et en simplifiant la somme obtenue à l'aide de la propriété 4.2(e). Pour (b) on suppose que $i \notin \{n_1, n_2, \dots, n_q\}$ et on examine la structure de $C_{i0} - \lambda D_{i0}$ pour vérifier que $\varphi_i(\lambda, 0)$ est alors un monôme. En effet, par définition de $L_i(\epsilon)$ et $R_i(\epsilon)$ une colonne de $C_i(\epsilon)$ correspondant à un bloc de dimension $n_j < i$ est de valuation au moins $i - n_j > 0$ et la même colonne dans $D_i(\epsilon)$ est nulle partout sauf en l'élément qui est diagonal dans $D_i(\epsilon)$ et qui vaut 1. Ainsi

$$\varphi_i(\lambda, 0) = \det \left[\begin{array}{c|c} *(\lambda) & O \\ \hline * & -\lambda I \end{array}\right].$$

Les $*$ correspondent aux colonnes associées aux blocs de dimension $n_j < i$ et $*(\lambda)$ désigne en particulier un faisceau de matrices carrées. Son déterminant est nécessairement un monôme en λ. On peut raisonner comme dans la preuve du théorème 4.1 (théorème de Lidskii). En effet on vérifie facilement que les blocs de D_{i0} qui correspondent à une valeur $n_j > i$ sont soit nuls (blocs hors diagonaux) soit de la forme $\operatorname{Diag}[1, O_{n_j - i}, I_{i-1}]$ (blocs diagonaux). Dans C_{i0}, ces mêmes blocs sont nuls partout sauf éventuellement en leur coin inférieur gauche. Les zéros situés sur la diagonale de D_{i0} imposent alors pour le calcul du déterminant de $C_{i0} - \lambda D_{i0}$ de prendre tous les derniers λ de la diagonale puis les coins inférieurs gauches et enfin de compléter avec des 1 surdiagonaux. Cela construit effectivement un monôme en λ. $\square$

Corollaire 4.10 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de la forme de Jordan nilpotente $(0^{n_1})^{r_1}\dots(0^{n_q})^{r_q}$. Si $A(\epsilon)$ est J-réduite alors l'ensemble $\{\varphi_{n_1}(\lambda, 0), \dots, \varphi_{n_q}(\lambda, 0)\}$ contient tous les polynômes quasi-Newton associés à $A(\epsilon)$ dont l'ordre est $\mathrm{O}(\epsilon^{1/un\ entier})$.*

La forme J-réduite est donc bien une forme réduite par rapport à la famille des perturbations de Lidskii, solution du problème 1.5 ($FORME \cdot REDUITE$). Avec l'algorithme 4.2 (`JRF`) on a de plus une solution au problème 1.6 ($REDUCTION$). Enfin, le problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$) est résolu pour toute matrice J-réduite n'ayant que des valeurs propres de valuation l'inverse d'un entier.

4.9 Formes normales rationnelles

On considère ici la possibilité de diagonaliser par blocs une forme J-réduite à l'aide d'une matrice de passage dont les éléments sont des séries formelles. Nous ne passons pas par une diagonalisation préalable de faisceau comme au chapitre 2. En effet, ici on ne factorise pas $A(\epsilon)$ mais $A(\epsilon^i)$ avec $i \in \mathbb{N}^*$ (voir (4.14)). La reconstruction d'une forme diagonale pour $A(\epsilon)$ à partir d'une forme diagonale diag$[C_i^{11}(\epsilon) - \lambda D_i^{11}(\epsilon), C_i^{22}(\epsilon) - \lambda D_i^{22}(\epsilon)]$ du faisceau défini par $A(\epsilon^i) = \epsilon^i C_i(\epsilon) D_i^{-1}(\epsilon)$ nécessiterait de montrer que les éléments des matrices $C_i^{11}(\epsilon^{1/i}) D_i^{11^{-1}}(\epsilon^{1/i})$ et $C_i^{22}(\epsilon^{1/i}) D_i^{22^{-1}}(\epsilon^{1/i})$ sont bien des séries formelles et non des séries de Puiseux formelles. L'alternative que nous proposons utilise les conditions de Lidskii intermédiaires "$\Delta_j^k \neq 0$" que l'interprétation de la forme J-réduite avec le polygone de Newton a fait apparaître (paragraphe 4.6).

En effet, si $A(\epsilon)$ est J-réduite, nous allons voir que grâce aux conditions "$\Delta_j^k \neq 0$" cette matrice est en fait semblable à une forme J-réduite triangulaire par blocs. On en déduit ensuite facilement l'existence d'une forme J-réduite semblable diagonale par blocs.

4.9.1 Mise sous forme triangulaire par blocs d'une forme J-réduite

Proposition 4.1 *Soit $A(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une forme J-réduite avec $A_0 = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q}$. Soient $j \in \{1, \dots, q\}$ et $k \in \{1, \dots, r_j\}$ tels que "$\Delta_j^k \neq 0$" soit la première condition de Lidskii intermédiaire satisfaite. Alors il existe une perturbation de matrice $P(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ unitaire telle que $\tilde{A}(\epsilon) = P^{-1}(\epsilon) A(\epsilon) P(\epsilon)$ soit encore J-réduite et vérifie*

$$\tilde{A}(\epsilon) = \begin{bmatrix} \tilde{A}^{11}(\epsilon) & O \\ \tilde{A}^{21}(\epsilon) & \tilde{A}^{22}(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_0^{11} = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_j})^{k}, \quad \tilde{A}_0^{22} = (0^{n_j})^{r_j - k} \dots (0^{n_q})^{r_k}.$$

Preuve. Comme $A(\epsilon)$ est J-réduite on a soit $(j,k) = (1, r_1)$, soit $j = 1$, $k < r_1$ et $\Delta_1^{k+1} = \dots = \Delta_1^{r_1} = 0$, soit enfin $j = 2$, $k \in \{1, \dots, r_2\}$ et $\Delta_1^1 = \dots = \Delta_1^{r_1} = \Delta_2^1 = \dots = \Delta_2^{k-1} = 0$. Nous ne détaillons que le premier cas ($j = 1$ et $k = r_1$). Pour les deux autres, une simplification de la sous-matrice de Lidskii L_j doit être faite à l'aide du lemme 4.7 afin d'exprimer la condition "$\Delta_j^k \neq 0$" comme un seul déterminant non nul et se ramener ainsi au premier cas.

Soient $m = r_1 n_1$ et $m' = n - m$. Le principe de la preuve consiste à imposer à $P(\epsilon)$ la structure

$$P(\epsilon) = \begin{bmatrix} I_m & X(\epsilon) \\ O & I_{m'} \end{bmatrix}, \quad X(\epsilon) = \sum_{i \geq 0} \epsilon^i X_i, \quad X_i \in \mathsf{K}^{m \times m'}$$

et à montrer qu'on peut choisir $X(\epsilon)$ de façon à ce que $P^{-1}(\epsilon)A(\epsilon)P(\epsilon)$ ait la forme voulue.

Remarquons qu'a priori X_0 n'est pas la matrice nulle. En rappelant que $\tilde{A}^{12}(\epsilon) = 0$, la relation de similitude $P(\epsilon)\tilde{A}(\epsilon) = A(\epsilon)P(\epsilon)$ se réécrit comme

$$\tilde{A}^{21}(\epsilon) = A^{21}(\epsilon) \tag{4.23a}$$

$$\tilde{A}^{11}(\epsilon) = A^{11}(\epsilon) - X(\epsilon)A^{21}(\epsilon) \tag{4.23b}$$

$$\tilde{A}^{22}(\epsilon) = A^{21}(\epsilon)X(\epsilon) + A^{22}(\epsilon) \tag{4.23c}$$

et

$$\tilde{A}^{12}(\epsilon) = A^{11}(\epsilon)X(\epsilon) - X(\epsilon)\tilde{A}^{22}(\epsilon) + A^{12}(\epsilon). \tag{4.23d}$$

On cherche donc une matrice $X(\epsilon) = \sum_{i\geq 0} \epsilon^i X_i$ telle que $\tilde{A}^{12}(\epsilon) = 0$ dans (4.23d). Une fois $X(\epsilon)$ déterminée, on déduit des équations (4.23a), (4.23b) et (4.23c) les trois blocs non nuls de la matrice $\tilde{A}(\epsilon)$. On vérifie de plus que $\tilde{A}_0 = A_0$ et qu'ainsi $\tilde{A}(\epsilon)$ est encore J-réduite.

Déterminons maintenant $X(\epsilon)$ progressivement. On suppose pour $h \geq 1$ que $A^{12}(\epsilon) = \epsilon^h A_h^{12} + \mathrm{o}(\epsilon^h)$ et on cherche à annuler A_h^{12}. Or, pour transformer

$$A(\epsilon) = \left[\begin{array}{c|c} A^{11}(\epsilon) & \epsilon^h A_h^{12} + \mathrm{o}(\epsilon^h) \\ \hline A^{21}(\epsilon) & A^{22}(\epsilon) \end{array}\right] \quad \text{en} \quad \tilde{A}(\epsilon) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}^{11}(\epsilon) & \mathrm{o}(\epsilon^h) \\ \hline \tilde{A}^{21}(\epsilon) & \tilde{A}^{22}(\epsilon) \end{array}\right]$$

une matrice de passage de la forme

$$P_h(\epsilon) = \left[\begin{array}{c|c} I_p & \epsilon^{h-1}T_{h-1} + \epsilon^h U_h \\ \hline O & I_{p'} \end{array}\right]$$

convient. En effet, à l'ordre h l'équation (4.23d) s'écrit alors

$$A^{11}(\epsilon)(\epsilon^{h-1}T_{h-1} + \epsilon^h U_h) - (\epsilon^{h-1}T_{h-1} + \epsilon^h U_h)\tilde{A}^{22}(\epsilon) + \epsilon^h A_h^{12} = \mathrm{o}(\epsilon^h).$$

D'après (4.23c) elle est satisfaite à l'ordre h si et seulement si il existe un couple de matrices (T_{h-1}, U_h) solution du système d'équations matricielles

$$A_0^{11}T_{h-1} - T_{h-1}A_0^{22} = 0 \tag{4.24a}$$

$$A_0^{11}U_h - U_h A_0^{22} + A_1^{11}T_{h-1} - T_{h-1}(A_1^{21}T_0 + A_1^{22}) = -A_h^{12}. \tag{4.24b}$$

Une telle solution existe car $\Delta_1 = \Delta_1^{r_1}$ est non nul.

En effet, A_0^{11} et A_0^{22} étant deux formes de Jordan nilpotentes, l'ensemble des solutions de (4.24a) est décrit par les matrices par blocs $T = [T^{\alpha\beta}]$ partitionnées conformément aux structures par blocs de A_0^{11} et A_0^{22} et où chaque bloc $T^{\alpha\beta} = [t^{\alpha\beta}_{j-i+1}]$ est une matrice Toeplitz triangulaire supérieure. (Voir par exemple le livre de Gantmacher [24, tome 1, pages 221-222].) On cherche donc une solution (T, U) de l'équation matricielle (4.24b) où T a la structure que nous venons de décrire, sachant que $\Delta_1 \neq 0$. Cette équation, que nous étudions ci-dessous, est de la forme

$$JU - UJ' + AT - TBT - TC = D \tag{4.25}$$

avec $A \in \mathsf{K}^{m\times m}$, $B \in \mathsf{K}^{m'\times m}$, $C \in \mathsf{K}^{m'\times m'}$ et $D \in \mathsf{K}^{m\times m'}$ donnés. De plus $J = 0^{m_1}\dots 0^{m_s}$ et $J' = 0^{m'_1}\dots 0^{m'_{s'}}$ avec $\sum_{i=1}^{s} m_i = m$, $\sum_{i=1}^{s'} m'_i = m'$ et

$$m_1 \geq \ldots \geq m_s > m'_1 \geq \ldots \geq m'_{s'}.$$

Partitionnons les matrices A, B, C, D en blocs de dimensions $m_\alpha \times m'_\beta$ et notons $K^{\alpha\beta}$ le bloc (α, β) de JU et $L^{\alpha\beta}$ celui de UJ'. L'équation (4.25) est alors équivalente aux ss' équations de la forme

$$K^{\alpha\beta} - L^{\alpha\beta} + X^{\alpha\beta} - Y^{\alpha\beta} - Z^{\alpha\beta} = D^{\alpha\beta} \tag{4.26}$$

avec

$$X^{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{s} A^{\alpha\gamma}T^{\gamma\beta}, \qquad Y^{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{s'}\sum_{\delta=1}^{s} T^{\alpha\gamma}B^{\gamma\delta}T^{\delta\beta}, \qquad Z^{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{s'} T^{\alpha\gamma}C^{\gamma\beta}. \tag{4.27}$$

Introduisons de plus les notations suivantes. Si $A = [A^{\alpha\beta}] = [a^{\alpha\beta}_{ij}]$ avec $A^{\alpha\beta}$ de dimensions $m_\alpha \times m'_\beta$, on note

$$\bar{a}^{\alpha\beta}_{ij} = a^{\alpha\beta}_{m_\alpha - i+1, j} \quad \text{et} \quad \bar{A}_{ij} = [\bar{a}^{\alpha\beta}_{ij}].$$

Ainsi $\bar{A}_{11}$ est la matrice des coins inférieurs gauches des blocs de A et l'hypothèse "$\Delta_1 \neq 0$" faite pour l'équation (4.24b) s'écrit désormais

$$\det \bar{A}_{11} \neq 0$$

pour l'équation (4.25). On note aussi pour $1 \leq j \leq m'_1$

$$T_j = [t^{\alpha\beta}_j]$$

avec (α, β) décrivant l'ensemble des blocs ayant au moins j colonnes. Les matrices T_j ont donc toutes exactement s lignes. Leurs nombres de colonnes varient en fonction de j et d'après les valeurs $m'_1 \geq \ldots \geq m'_{s'}$. Pour $k \geq j$, la sous-matrice de T_j construite à partir de tous les blocs (α, β) ayant au moins k colonnes sera désignée par $T_j^{(k)}$.

On précise également quelques propriétés élémentaires des matrices apparaissant dans (4.26) qui faciliteront la résolution de (4.25) :

$$k_{ij}^{\alpha\beta} = \begin{cases} u_{i+1,j}^{\alpha\beta} & \text{si } i < m_\alpha \\ 0 & \text{si } i = m_\alpha \quad \text{(dernière ligne nulle).} \end{cases} \tag{4.28a}$$

$$l_{ij}^{\alpha\beta} = \begin{cases} u_{i,j-1}^{\alpha\beta} & \text{si } j > 1 \\ 0 & \text{si } j = 1 \quad \text{(première colonne nulle).} \end{cases} \tag{4.28b}$$

$$x_{ij}^{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{s} \sum_{k=1}^{j} a_{ik}^{\alpha\gamma} t_{j-k+1}^{\gamma\beta} \qquad 1 \le i \le m_\alpha, \quad 1 \le j \le m'_\beta. \tag{4.28c}$$

$$y_{ij}^{\alpha\beta} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\gamma=1}^{s'} \sum_{\delta=1}^{s} \sum_{k=1}^{m'_\gamma} \sum_{l=1}^{m_\delta} t_{ik}^{\alpha\gamma} b_{kl}^{\gamma\delta} t_{lj}^{\delta\beta} & \text{si } 1 \le i \le m'_1 \\ 0 & \text{si } m'_1 < i \le m_\alpha \quad \text{(i-ième ligne nulle).} \end{cases} \tag{4.28d}$$

$$z_{ij}^{\alpha\beta} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\gamma=1}^{s'} \sum_{k=i}^{n_\gamma} t_{k-i+1}^{\alpha\gamma} c_{kj}^{\gamma\beta} & \text{si } 1 \le i \le m'_1 \\ 0 & \text{si } m'_1 < i \le m_\alpha \quad \text{(i-ième ligne nulle).} \end{cases} \tag{4.28e}$$

Nous allons maintenant montrer l'existence d'une solution (T, U) en déterminant successivement $T_1, \ldots, T_{m'_1}$ ainsi que les matrices $\overline{U}_{ij}$ en examinant les éléments des équations (4.26). On commence par les coins inférieurs gauches $(4.26)_{m_\alpha,1}^{\alpha\beta}$. D'après (4.28) on a

$$x_{m_\alpha,1}^{\alpha\beta} = d_{m_\alpha,1}^{\alpha\beta} \quad \forall\, \alpha, \beta.$$

D'après (4.27) cela s'écrit $\bar{A}_{11} T_1 = \overline{D}_{11}$. Puisque par hypothèse $\bar{A}_{11}$ est inversible, on obtient

$$T_1 = \bar{A}_{11}^{-1} \overline{D}_{11}.$$

Soit $i \in \{1, \ldots, m'_1 - 1\}$ avec $m'_1 \ge 2$. Déterminons maintenant $\overline{U}_{i1}$ en supposant $T_1, \ldots, T_i$ connus. D'après (4.28) les éléments $(4.26)_{m_\alpha - i,1}^{\alpha\beta}$ vérifient

$$\bar{u}_{i1}^{\alpha\beta} + x_{m_\alpha-i,1}^{\alpha\beta} - y_{m_\alpha-i,1}^{\alpha\beta} - z_{m_\alpha-i,1}^{\alpha\beta} = d_{m_\alpha-i,1}^{\alpha\beta} \quad \forall\, \alpha, \beta.$$

On vérifie facilement que $x^{\alpha\beta}_{m_\alpha - i,1}$ ne dépend que de T_1 et que $y^{\alpha\beta}_{m_\alpha - i,1}$ et $z^{\alpha\beta}_{m_\alpha - i,1}$ ne dépendent que de $T_1, \ldots, T_i$. Par conséquent, $\overline{U}_{i1}$ est déterminée de façon unique à partir des données A, B, C, D et de $T_1, \ldots, T_i$.

Soit $i \in \{1, \ldots, m'_1 - 1\}$ avec $m'_1 \geq 2$. Soit $j \in \{1, \ldots, i-1\}$. En supposant désormais que $T_1, \ldots, T_i$ et $\overline{U}_{i1}, \ldots, \overline{U}_{i-j+1,j}$ sont connus, déterminons $\overline{U}_{i-j,j+1}$. D'après (4.28) les éléments $(4.26)^{\alpha\beta}_{m_\alpha - i+j,j+1}$ vérifient

$$\bar{u}^{\alpha\beta}_{i-j,j+1} - \bar{u}^{\alpha\beta}_{i-j+1,j} + x^{\alpha\beta}_{m_\alpha - i+j,j+1} - y^{\alpha\beta}_{m_\alpha - i+j,j+1} - z^{\alpha\beta}_{m_\alpha - i+j,j+1} = d^{\alpha\beta}_{m_\alpha - i+j,j+1} \quad \forall\, \alpha, \beta.$$

On peut vérifier que les termes en x ne dépendent que de $T_1, \ldots, T_{j+1}$ et que ceux en y et en z ne dépendent que de $T_1, \ldots, T_i$. Comme $j \leq i-1$, on en déduit que la différence matricielle $\overline{U}_{i-j,j+1} - \overline{U}^{(j+1)}_{i-j+1,j}$ est entièrement définie par A, B, C, D et $T_1, \ldots, T_i$.

On obtient alors T_{i+1} pour tout $i \in \{1, \ldots, m'_1 - 1\}$ en examinant les éléments $(4.26)^{\alpha\beta}_{m_\alpha, i+1}$. D'après (4.28) ils vérifient en effet

$$-u^{\alpha\beta}_{m_\alpha, i} + x^{\alpha\beta}_{m_\alpha, i+1} = d^{\alpha\beta}_{m_\alpha, i+1} \quad \forall\, \alpha, \quad \forall \beta / m'_\beta \geq i+1.$$

D'après (4.27) cela s'écrit matriciellement

$$T_{i+1} = \bar{A}^{-1}_{11} \left(\overline{U}^{(i+1)}_{1i} - \sum_{k=2}^{i+1} \bar{A}_{1k} T^{(i+1)}_{i-k+2} + \overline{D}_{1,i+1} \right), \quad i = 1, \ldots, m'_1 - 1.$$

A ce stade T est donc déterminée complètement et de façon unique. L'équation (4.25) se réduit alors à $JU - UJ' = E$ avec E une matrice connue, et il reste à compléter la connaissance de U.

Commençons par déterminer les matrices $\overline{U}_{i-j,j+1}$ pour $i \in \{m'_1, \ldots, m_1 - 1\}$ et $j \in \{0, \ldots, i-1\}$. Pour $j = 0$, les éléments de $\overline{U}_{i1}$ vérifient $\bar{u}^{\alpha\beta}_{i1} = \bar{e}^{\alpha\beta}_{i1}\ ,\ forall \alpha, \beta$. Pour $j \in \{1, \ldots, i-1\}$, on déduit des éléments de $(4.26)^{\alpha\beta}_{m_\alpha - i+j,j+1}$ que $\overline{U}_{i-j,j+1} - \overline{U}_{i-j+1,j}$ ne dépend que de E. On procède de même pour les matrices $\overline{U}_{ij}$ restantes : des différences successives $(i,j) \to (i-1, j+1)$ permettent de toutes les déterminer sauf la première ligne de chaque bloc $U^{\alpha\beta}$. Pour fixer U, on peut annuler ces premières lignes.

Finalement, on déduit de ce procédé - et donc du fait que $\Delta_1 \neq 0$ - l'existence d'une solution (T_{h-1}, U_h) au système d'équations matricielles (4.24a). Une mise sous forme triangulaire de $A(\epsilon)$ à un ordre σ quelconque peut alors se faire comme suit.

1. $X(\epsilon) \leftarrow O_{m \times m'}$.
2. $h \leftarrow \mathrm{val}\, A^{12}(\epsilon)$. Si $h > \sigma$ alors retourner $A(\epsilon)$ et $X(\epsilon)$.
3. Déterminer l'unique solution (T_{h-1}, U_h) de (4.24a).

4. $\tilde{X}(\epsilon) \leftarrow \epsilon^{h-1}T_{h-1} + \epsilon^h U_h$ et $X(\epsilon) \leftarrow X(\epsilon) + \tilde{X}(\epsilon)$.
5. Calculer les blocs de $\tilde{A}(\epsilon)$ avec (4.23a), (4.23b) et (4.23c).
6. $A(\epsilon) \leftarrow \tilde{A}(\epsilon)$ et retourner à l'étape 2.

On obtient la forme triangulaire annoncée en faisant tendre σ vers l'infini. Les éléments de la matrice de passage $P(\epsilon)$ sont alors des séries formelles. $\square$

4.9.2 Normalisation d'une forme J-réduite

Soit $\tilde{A}(\epsilon)$ la forme triangulaire inférieure obtenue pour la première condition "$\Delta_j^k \neq 0$" satisfaite grâce à la proposition 4.1 précédente. Elle est semblable à sa transposée $\tilde{A}(\epsilon)^T$. Comme il existe une matrice constante inversible P telle que $P^{-1}\tilde{A}(\epsilon)^T P$ soit une perturbation de la forme de Jordan de départ $A(0)$, on met cette forme triangulaire supérieure sous forme diagonale. La matrice obtenue est une perturbation diagonale par blocs (deux blocs) de $A(0)$. En recommençant avec les conditions de Lidskii intermédiaires satisfaites restantes, on finit par transformer $A(\epsilon)$ en une perturbation diagonale par blocs de la même forme de Jordan nilpotente $A(0)$, et donc encore J-réduite.

Le théorème ci-dessous précise la nature des blocs de cette matrice en fonction des indices minimaux en dimension de $A(\epsilon)$. On désigne pour cela par $\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \ldots, \delta_{i_{q'}}$ les indices minimaux en dimension de $A(\epsilon)$ rangés de telle sorte que $i_1 > i_2 > \ldots > i_{q'}$. Soient d_j tel que $A(\epsilon)$ ait $d_j i_j$ valeurs propres de valuation $1/i_j$ et e_j le nombre de ses valeurs propres de valuations strictement comprises entre $1/i_j$ et $1/(i_j - 1)$. Alors, en rappelant que j_1 désigne le nombre de valeurs propres de $A(\epsilon)$ de valuation au plus 1, on a

$$
\begin{aligned}
0 \leq \beta_1 = \ldots = \beta_{d_1 i_1} &= 1/i_1 \\
< \beta_{d_1 i_1 + 1} \leq \cdots &\leq \beta_{d_1 i_1 + e_1} \\
< \beta_{d_1 i_1 + e_1 + 1} = \ldots &= \beta_{d_1 i_1 + e_1 + d_2 i_2} = 1/i_2 \\
&\vdots \\
< \beta_{d_1 i_1 + e_1 + \ldots + d_{q'-1} i_{q'-1} + 1} &\leq \cdots \leq \beta_{d_1 i_1 + e_1 + \ldots + d_{q'-1} i_{q'-1} + e_{q'-1}} \\
< \beta_{d_1 i_1 + e_1 + \ldots + e_{q'-1} + 1} &= \ldots = \beta_{d_1 i_1 + e_1 + \ldots + e_{q'-1} + d_{q'} i_{q'}} = 1/i_{q'}
\end{aligned}
$$

et aussi $\sum_{j=1}^{q'} d_j i_j + \sum_{j=1}^{q'-1} e_j = n - j_1$, certains d_j et e_j pouvant être nuls. D'après la propriété 4.4 on a de plus $i_{j+1} = i_j - 1$ lorsque $e_j \neq 0$. Cela conduit au théorème suivant.

Théorème 4.6 *Toute perturbation dans $\mathsf{F}^{n\times n}$ d'une forme de Jordan nilpotente est semblable à une forme J-réduite $A(\epsilon)$ diagonale par blocs*

$$A(\epsilon) = \left[\begin{array}{cccc|c} A_1(\epsilon) & & & & \\ & A_2(\epsilon) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_l(\epsilon) & \\ \hline & & & & \epsilon A_{l+1}(\epsilon) \end{array}\right]$$

telle que $A_{l+1}(0)$ est nilpotente et telle que pour $k = 1, \dots, l$ il existe $j \in \{1, \dots, q'\}$ tel que l'indice de nilpotence de $A_k(0)$ est i_j et
- soit $A_k(\epsilon)$ est une perturbation de Lidskii de $(0^{i_j})^{d_j}$;
- soit $A_k(\epsilon)$ est une perturbation de dimension e_j d'une forme de Jordan nilpotente n'ayant que des blocs 0^{i_j} et 0^{i_j-1}. Dans ce cas $A_l(\epsilon)$ n'a que des valeurs propres de valuations strictement comprises entre $1/i_j$ et $1/(i_j-1)$.

Remarque 4.3 On a encore l égal au nombre des d_j et e_j non nuls.

Exemple 4.7 Pour les trois matrices de l'exemple 4.2 utilisées depuis le début du chapitre on a $j_1 = n = 8$, $q' = 3$, $i_1 = 4$, $i_2 = 2$ et $i_3 = 1$. De plus,

$$d_1 = 1\,, \quad e_1 = 0\,, \quad d_2 = 0\,, \quad e_2 = 3\,, \quad d_3 = 1$$

et donc $l = 3$. On vérifie que $e_2 \neq 0$ et $i_3 = i_2 - 1$ et la forme normale rationnelle pour cet exemple est une forme J-réduite diagonale par blocs

$$\begin{bmatrix} A_1(\epsilon) & & \\ & A_2(\epsilon) & \\ & & a_3(\epsilon) \end{bmatrix}$$

avec $A_1(\epsilon) = 0^4 + \mathrm{O}(\epsilon)$ et $a_3(\epsilon) = \mathrm{O}(\epsilon)$ deux perturbations de Lidskii et $A_2(\epsilon) = 0^2 0 + \mathrm{O}(\epsilon)$ n'ayant que des valeurs propres de valuations strictement comprises entre $1/2$ et 1. Sur le quatrième dessin de la figure 4.2 cela revient à "découper verticalement" le polygone de Newton aux points $\tilde{Q}_1$ et $\tilde{Q}_3^1$. $\diamond$

La forme décrite par le théorème 4.6 ci-dessus est bien une forme normale solution du problème 1.7 ($FORME\cdot NORMALE$) associée à la famille des perturbations de Lidskii. Enfin, lorsque $A(\epsilon)$ n'a que des valeurs propres de valuation l'inverse d'un entier positif, le lemme ci-dessous permet une normalisation un peu plus fine.

Lemme 4.11 *Soit $n = rm$ avec r et m deux entiers positifs. Pour $A(\epsilon) = (0^m)^r + \epsilon B \in \mathsf{F}^{n\times n}$, désignons par L l'unique sous-matrice de Lidskii associée à $A(\epsilon)$. Si $\tilde{L}$ est une* *matrice semblable à L dans $\mathsf{K}^{r\times r}$ et si U désigne une matrice de passage de L à $\tilde{L}$ alors la matrice inversible d'ordre n définie par $P = U \otimes I_m$ transforme $A(\epsilon)$ en une perturbation de la même forme de Jordan $(0^m)^r$ et de sous-matrice de Lidskii associée $\tilde{L} = U^{-1}LU$.*

Preuve. En notant $U = [u_{i,j}]_{1\leq i,j\leq r}$ la matrice $P = U \otimes I_m$ s'écrit

$$P = U \otimes I_m = \begin{bmatrix} u_{11} & & & & u_{1r} & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & u_{11} & & & & u_{1r} \\ & \vdots & & \cdots & & \vdots & \\ u_{r1} & & & & u_{rr} & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ & & u_{r1} & & & & u_{rr} \end{bmatrix}$$

et peut donc être vue comme une matrice de r^2 blocs diagonaux, donc en particulier Toeplitz supérieurs. Par conséquent, P commute avec J (voir [24, tome 1, §8.2]). Montrons maintenant que la sous-matrice de Lidskii $\tilde{L}$ associée à $\tilde{A}(\epsilon) = P^{-1}A(\epsilon)P = (0^m)^r + \epsilon\tilde{B}$ est $U^{-1}LU$. Pour $1 \leq i,j \leq r$, soient $\alpha = im$ et $\beta = 1 + (j-1)m$. Ces indices définissent les éléments de L comme les coins inférieurs gauches de B partitionnée conformément à $(0^m)^r$. Soit $W = BP = P\tilde{B}$ avec $W = [w_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$, $B = [b_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$, $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$ et $P = [p_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$. On a $w_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{n} b_{\alpha k}p_{k\beta} = \sum_{k=1}^{n} p_{\alpha k}\tilde{b}_{k\beta}$, Comme la β-ième colonne de P est nulle partout sauf en les éléments dont l'indice de ligne est $1+(j-1)m$, $1 \leq j \leq r$, on déduit de $W = BP$ que $w_{\alpha,\beta} = \sum_{k=1}^{r} l_{ik}u_{kj}$. De la même façon, on déduit de la structure des lignes de P et de $W = P\tilde{B}$ que $w_{\alpha,\beta} = \sum_{k=1}^{r} u_{ik}\tilde{l}_{kj}$. D'où $U\tilde{L} = LU$. □

En appliquant ce lemme avec $\tilde{L}$ la forme de Frobenius de L, on obtient comme cas particulier du théorème 4.6 le résultat suivant.

Corollaire 4.11 *Soit une perturbation dans $\mathsf{F}^{n\times n}$ d'une forme de Jordan nilpotente n'ayant que des valeurs propres de valuation l'inverse d'un entier positif. Si l'on désigne par q le nombre des valuations distinctes et, pour $j = 1,\ldots,q$, par r_j et n_j les entiers positifs tels que cette matrice possède r_jn_j valeurs propres de valuation $1/n_j$, alors elle est semblable à une perturbation de Lidskii $A(\epsilon) = (0^{n_1})^{r_1}\ldots(0^{n_q})^{r_q} + \mathrm{O}(\epsilon)$ diagonale par blocs*

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} A_1(\epsilon) & & & \\ & A_2(\epsilon) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_q(\epsilon) \end{bmatrix}$$

telle que pour $j = 1, \ldots, q$,

(i) $A_j(\epsilon) = (0^{n_j})^{r_j} + \mathrm{O}(\epsilon)$,

(ii) *l'unique sous-matrice de Lidskii* $F_j \in \mathsf{K}^{r_j \times r_j}$ *de* $A_j(\epsilon)$ *est sous forme de Frobenius.*

Par conséquent, pour une telle forme, la j-ième sous-matrice de Lidskii est

$$L_j = \mathrm{Diag}\,[F_1, F_2, \ldots, F_j]$$

et le j-ième polynôme de Newton associé est

$$\phi_j(\lambda) = (-1)^{r'_j} \det(\lambda I - F_j) \prod_{i=1}^{j-1} \det F_i.$$

Valuation vs. dimension

Le tableau ci-dessous oppose les perturbations selon les valuations du chapitre 3 aux perturbations d'une forme de Jordan nilpotente du chapitre 4.

chapitre 3	chapitre 4
profil de valuations	**forme de Jordan nilpotente**
$0 \leq v_1 < v_2 < \ldots < v_q$	$n_1 > n_2 > \ldots > n_q \geq 1$
r_j colonnes de valuation v_j	r_j blocs de dimension n_j
$r_1 + \ldots + r_q = n$	$r_1 n_1 + \ldots + r_q n_q = n$
perturbations quasi-génériques à profil de valuations fixé	**perturbations (quasi-génériques) de Lidskii** [40]
j-ième sous-matrice influente	j-ième sous-matrice de Lidskii
j-ième condition de régularité	j-ième condition de Lidskii
indices minimaux en valuation	**indices minimaux en dimension**
$s_i = \operatorname{val} p(\lambda\epsilon^i, \epsilon)\,,\, i \in \mathbb{N}$	$s_i = \operatorname{val} p(\lambda\epsilon, \epsilon^i)\,,\, i \in \mathbb{N}^*$
$\delta_i = 2s_i - s_{i+1} - s_{i-1}\,,\, i \in \mathbb{N}$	$\delta_i = 2s_i - s_{i+1} - s_{i-1}\,,\, i \in \mathbb{N}^*$
$\sum_{i \geq 0} \delta_i = n$	$\sum_{i > 0} i\delta_i = n$
forme v-réduite	**forme J-réduite**
$r_j = \delta_{v_j}\,,\, 1 \leq j \leq q$	$r_j = \delta_{n_j}\,,\, 1 \leq j \leq q$
vp $A(\epsilon)$ maximal dans $\mathcal{O}(A(\epsilon))$	lJ $A(\epsilon)$ minimale dans $\mathcal{O}(A(\epsilon))$
$\varphi_{v_j+1}(\lambda, 0) \neq 0\,,\, 1 \leq j \leq q$	$\varphi_{n_j-1}(\lambda, 0) \neq 0\,,\, 1 \leq j \leq q$
v-réduction	**J-réduction**
minimiser r_j dans $\mathcal{O}_{v_j-1}(A(\epsilon))$	minimiser r_j dans $\mathcal{O}_{n_j+1}(A(\epsilon))$
valeurs propres de valuation $i \in \mathbb{N}$	**valeurs propres de valuation** $1/i\,,\, i \in \mathbb{N}^*$
polynômes quasi-Newton d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^i)$	polynômes quasi-Newton d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{1/i})$
enveloppe $\mathcal{E}_v$	**enveloppe** $\mathcal{E}_J$ [45]
r_j segments de pente v_j	r_j segments de pente $1/n_j$

Chapitre 5

Théorie de Lidskii généralisée

Ce chapitre propose, pour une perturbation d'une forme de Jordan nilpotente $A(\epsilon) = J + \mathrm{O}(\epsilon)$, une extension du théorème 4.1 (théorème de Lidskii) basée sur la prise en compte d'éléments de $A(\epsilon)$ de valuation supérieure à 1, ainsi qu'une troisième forme réduite, plus générale que les formes $v-$ et $J-$réduites. L'objectif que nous poursuivons ici consiste à identifier une famille de perturbations de matrices pour laquelle le problème 1.1 ($TERMES{\cdot}DOMINANTS$) est résolu et telle que *toute* perturbation d'une forme de Jordan nilpotente soit semblable à l'un de ses éléments. Cette seconde contrainte impose de ne pas se restreindre à certains types de valuation de valeurs propres, contrairement aux cas étudiés dans les deux chapitres précédents. Si v/n, avec $\gcd(v, n) = 1$, désigne la valuation d'une valeur propre d'une matrice $A(\epsilon)$ de la famille que nous cherchons à identifier, on remarque que les restrictions au cas $n = 1$ (chapitre 3) et au cas $v = 1$ (chapitre 4) vérifient la "formule"

$$\frac{v}{n} = \frac{\text{valuation d'une colonne de } A(\epsilon) - J}{\text{dimension d'un bloc de Jordan de } J}.$$

Celle-ci reste vraie, comme nous allons le voir, pour tout couple (v, n) d'entiers positifs premiers entre eux. Une première illustration est la matrice $A(\epsilon)$ ci-dessous introduite par Wilkinson dans [61, §22]. (Elle apparaît également dans [16], [21] et [45].) Soient

$$A(\epsilon) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \epsilon & \\ \hline & & & 0 & 1 \\ \epsilon & & & & 0 \end{array}\right] \quad \sim \quad \tilde{A}(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ \epsilon^2 & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$ est clairement $p(\lambda, \epsilon) = \lambda^5 - \epsilon^2$. Par conséquent les cinq valeurs propres de $A(\epsilon)$ sont d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\frac{2}{5}})$ et $A(\epsilon)$ n'est pas une perturbation de Lidskii. On remarque qu'elle est cependant semblable à la matrice $\tilde{A}(\epsilon)$ qui est la perturbation du bloc 0^5 par une matrice de valuation 2. De plus, le coin inférieur gauche de cette matrice suffit à définir les termes dominants des valeurs propres de $A(\epsilon)$. Une extension naturelle de la théorie de Lidskii semble alors être la suivante: si 0^n est un bloc de J, les n colonnes de $A(\epsilon) - J$ qui perturbent ce bloc ne seront plus nécessairement de valuation 1 mais de valuation v. Et on peut en effet vérifier [30] qu'on définit ainsi une famille de perturbations permettant de résoudre le problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$). Cependant toute perturbation d'une forme de Jordan nilpotente n'est pas nécessairement semblable à un élément d'une telle famille. Considérons par exemple la matrice

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \epsilon^2 & \epsilon^2 & \epsilon \end{bmatrix}$$

dont les trois valeurs propres sont d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{\frac{2}{3}})$. Son polynôme caractéristique est $p(\lambda, \epsilon) = \lambda^3 - \epsilon\lambda^2 - \epsilon^2\lambda - \epsilon^2$. A cause du monôme $-\epsilon\lambda^2$ de valuation 1 par rapport à ϵ, il est clair que $A(\epsilon)$ n'est semblable à aucune perturbation $\tilde{A}(\epsilon)$ du bloc 0^3 telle que le profil de valuations de $\tilde{A}(\epsilon) - 0^3$ soit $[2, 2, 2]$. Certaines colonnes - la dernière sur l'exemple précédent - devront donc avoir une valuation inférieure au numérateur v de l'exposant dominant v/n considéré. En fait nous allons montrer qu'une façon de définir ces valuations consiste à les identifier à une discrétisation du segment de pente v/n reliant les points $(0, 0)$ et (n, v).

Après avoir rappelé la notion de discrétisation d'un segment de droite avec contrainte d'unilatéralité au paragraphe 5.1, nous introduisons au paragraphe 5.2 les notions de profils de valuations échelonnés et quasi-échelonnés qui indiquent des valuations possibles pour n colonnes correspondant à un bloc 0^n. Une généralisation du théorème de Lidskii est proposée dans la section 5.3, qui définit une famille $\mathcal{L}^+$ de perturbations de formes de Jordan nilpotentes dites perturbations de Lidskii généralisées, pour laquelle le problème 1.1 ($TERMES \cdot DOMINANTS$) est résolu. Nous terminons ce chapitre en montrant que toute perturbation d'une forme de Jordan nilpotente est semblable à une perturbation de Lidskii généralisée. D'où une troisième solution au 1.4 ($PERT \cdot QUASI \cdot GEN$) ainsi qu'au problème 1.5 ($FORME \cdot REDUITE$).

5.1 Discrétisation d'un segment de droite

Partant d'un couple (v,n) d'entiers positifs, premiers entre eux, on peut définir les n valeurs

$$v^{(k)} = \left\lceil (n-k+1)\frac{v}{n} \right\rceil, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{5.1}$$

Elles forment une séquence décroissante d'entiers positifs, certains pouvant être égaux. Le maximum est $v^{(1)} = v$ et le minimum est $v^{(n)} = \lceil \frac{v}{n} \rceil \geq 1$. De plus, le fait que $\gcd(v,n) = 1$ conduit à l'inégalité stricte suivante, valable pour toutes les valeurs sauf la première,

$$v^{(k)} > (n-k+1)\frac{v}{n}, \quad 2 \leq k \leq n. \tag{5.2}$$

Nous l'utiliserons particulièrement au paragraphe 5.3.3 pour démontrer le théorème 5.1.

Graphiquement, ces valeurs s'interprètent de façon triviale. Le dessin dans le plan des $n+1$ points de l'ensemble $\mathcal{D} = \{(0,0)\} \cup \{(i, v^{(n-i+1)})\}_{1 \leq i \leq n}$ donne une approximation à l'aide de points de $\mathbb{N}^2$ du segment de droite $\mathcal{S}$ de pente v/n et d'extrémités $(0,0)$ et (n,v). L'ensemble $\mathcal{D}$ est couramment appelé **discrétisation du segment de droite $\mathcal{S}$**. Comme $\mathcal{D}$ est constitué des plus proches voisins de $\mathcal{S}$ appartenant à $\mathbb{N}^2$ et situés au-dessus de $\mathcal{S}$, on parle de discrétisation avec contrainte d'unilatéralité. (Voir par exemple le livre de Chassery et Montanvert [17, page 65].) Par définition de la partie entière, une telle discrétisation est la meilleure approximation possible de $\mathcal{S}$ sous cette double contrainte. On déduit de plus de l'inégalité (5.2) que les seuls points communs au segment $\mathcal{S}$ et à sa discrétisation $\mathcal{D}$ sont les extrémités $(0,0)$ et (n,v).

Exemple 5.1 Soit $(v,n) = (3,7)$. Alors $v^{(1)} = v^{(2)} = v^{(3)} = 3$, $v^{(4)} = v^{(5)} = 2$ et $v^{(6)} = v^{(7)} = 1$. Pour $(v,n) = (5,4)$ on a $v^{(1)} = 5$, $v^{(2)} = 4$, $v^{(3)} = 3$ et $v^{(4)} = 2$. Les segments et les discrétisations associées apparaissent sur la figure 5.1 ci-dessous. $\diamond$

Les échelons qui apparaissent en discrétisant un segment de droite (voir le dessin de gauche de la figure 5.1) sont à l'origine des notions que nous introduisons au paragraphe suivant.

5.2 Profils de valuations échelonnés et quasi-échelonnés

Des nombres rationnels positifs et irréductibles étant donnés, nous proposons la définition d'un profil de valuations plus riche que celui introduit au chapitre 3: il s'agit de considérer leurs dénominateurs comme des dimensions de blocs de Jordan nilpotents et leurs numérateurs comme des valuations de colonnes d'une matrice dépendant d'un paramètre.

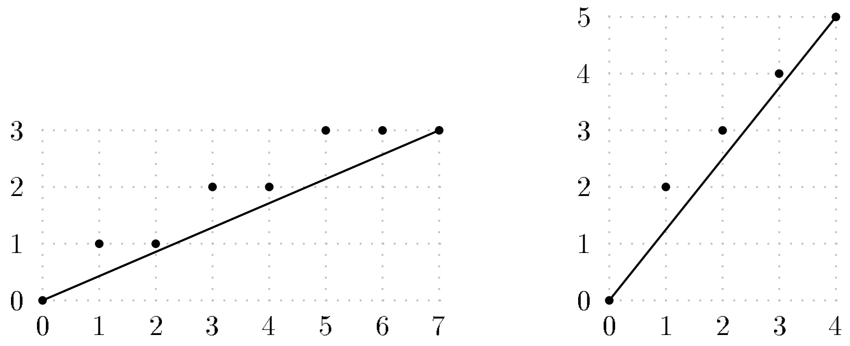


FIG. 5.1 – *Discrétisations avec contrainte d'unilatéralité des segments de droite reliant l'origine aux points $(7,3)$ et $(4,5)$ respectivement. Sur le dessin de gauche, deux points consécutifs de la discrétisation ont des ordonnées dont la différence en valeur absolue vaut soit 0 soit 1 car $3/7 < 1$. A droite, comme $5/4$ est supérieur à 1, il y au moins deux points consécutifs dont les ordonnées diffèrent en valeur absolue d'au moins 2. Dans tous les cas, la primalité entre numérateur et dénominateur assure que seuls les points situés aux extrémités de la discrétisation sont sur le segment de droite.*

Soient $A(\epsilon) = J + B(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ la perturbation d'une forme de Jordan nilpotente $J = (0^{n_1})^{r_1} \ldots (0^{n_q})^{r_q}$. Soient de plus $v_1, \ldots, v_q$ des entiers positifs tels que $\gcd(v_j, n_j) = 1$ pour $1 \leq j \leq n$. Définissons $v_j^{(k)}$ pour $1 \leq k \leq n_j$ comme dans (5.1) et considérons désormais $B(\epsilon)$ comme une matrice $[B^{kl}(\epsilon)]$ par blocs, partitionnée conformément à J. On obtient

$$v_j^{(k)} = \left\lceil (n_j - k + 1)\frac{v_j}{n_j} \right\rceil, \quad 1 \leq k \leq n_j\,,$$

et

$$\operatorname{vp} B(\epsilon) = [\boldsymbol{v}_1^1, \ldots, \boldsymbol{v}_1^{r_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_q^1, \ldots, \boldsymbol{v}_q^{r_q}]$$

avec

$$\boldsymbol{v}_j^1 = \ldots = \boldsymbol{v}_j^{r_j} \in \mathbb{N}^{n_j}\,, \quad j = 1, \ldots, q.$$

Cela conduit à la définition suivante.

Définition 5.1 *Si $\boldsymbol{v}_j = [v_j^{(k)}]_{1\leq k\leq n_j}$ pour $j = 1, \ldots, q$ le profil de valuations de $B(\epsilon)$ est dit* **échelonné**. *Si on a seulement $\boldsymbol{v}_{j1} = v_j^{(1)}$ et $\boldsymbol{v}_{jk} \geq v_j^{(k)}$ pour $k = 2, \ldots, n_j$, le profil de valuations de $B(\epsilon)$ est dit* **quasi-échelonné**.

Exemple 5.2 Considérons la forme de Jordan $0^2 0^3$. On a donc $q = 2$, $r_1 = r_2 = 1$ et $n_1 = 2$ et $n_2 = 3$. Soient de plus $v_1 = 1$ et $v_2 = 2$. Alors $[1, 1, 2, 2, 1]$ définit un profil de valuations échelonné et $[1, 2, 2, 3, 1]$ définit un profil de valuations quasi-échelonné. $\diamond$

Tout profil de valuations échelonné est évidemment quasi-échelonné. Notons aussi que, de même que pour la notion de profil de valuations, il n'est pas nécessaire à ce stade de supposer les valeurs v_j/n_j ordonnées.

En revanche, pour $j \in \{1, \ldots, q\}$, la première colonne de la j-ième colonne de blocs de la matrice $B(\epsilon)$ doit toujours être de valuation exactement v_j, que $\mathrm{vp}\, B(\epsilon)$ soit échelonné ou seulement quasi-échelonné.

Enfin, une façon d'écrire un profil de valuations échelonné est bien sûr

$$\mathrm{vp}\, B(\epsilon) = [(r_j, v_j, v_j^{(2)}, \ldots, v_j^{(n_j)})]_{1 \leq j \leq q}.$$

Et, si pour un entier naturel x on désigne par x^+ un entier supérieur ou égal à x, tout profil de valuations quasi-échelonné peut alors être noté

$$\mathrm{vp}\, B(\epsilon) = [(r_j, v_j, v_j^{(2)+} \ldots, v_j^{(n_j)+})]_{1 \leq j \leq q}.$$

Deux cas particuliers de profils de valuations échelonnés ont déjà été étudiés aux chapitres 3 et 4: si tous les n_j sont égaux à 1 on considère uniquement $v_j^{(1)} = v_j$ et on retrouve le profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1 \leq j \leq q}$ introduit au paragraphe 3.1 en vue d'une analyse locale des valeurs propres de valuation entière; si tous les v_j valent 1 alors $v_j^{(1)} = \ldots = v_j^{(n_j)} = 1$ et, en identifiant le n_j-uplet $(1, \ldots, 1)$ à l'entier n_j, on obtient $[(r_j, n_j)]_{1 \leq j \leq q}$. Cette partition entière de n définit la forme de Jordan nilpotente introduite au paragraphe 4.1 et sur laquelle la théorie de Lidskii s'appuie pour décrire localement le comportement des valeurs propres de valuation l'inverse d'un entier.

Exemple 5.3 On peut réécrire les deux profils de valuations considérés dans l'exemple 5.2 précédent comme $[(1, 1, 1), (1, 2, 2, 1)]$ et $[(1, 1, 1^+), (1, 2, 2^+, 1)]$. $\diamond$

En mettant bout à bout pour $j = 1, \ldots, q$ les segments de droite de pente v_j/n_j et de longueur n_j on construit bien sûr un polygone $\mathcal{N}$ du plan, de la même manière que le polygone de Newton associé à une perturbation de matrice (voir le paragraphe 1.4). Notons qu'ici $\mathcal{N}$ est convexe si et seulement si les v_j/n_j sont ordonnés par valeurs croissantes. Lorsque $\mathrm{vp}\, B(\epsilon)$ est échelonné le dessin dans le plan de l'ensemble

$$\{(0,0)\} \bigcup_{1 \leq j \leq q} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{j-1} r_k n_k + i, \sum_{k=1}^{j-1} r_k v_k + v_j^{(n_j - i + 1)} \right) \right\}_{1 \leq i \leq n_j} \tag{5.3}$$

peut alors être vu comme une discrétisation du polygone $\mathcal{N}$, c'est-à-dire l'union des discrétisations de ses $r_1 + \ldots + r_q$ segments. Une première illustration en est donnée figure 5.2 à partir de l'exemple 5.2. Nous verrons un deuxième exemple au paragraphe 5.3.2.

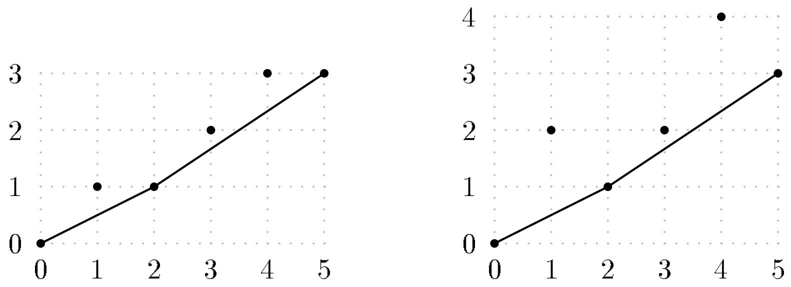


FIG. 5.2 – *Dessins des ensembles de points définis par (5.3) pour les profils de valuations* $[v_1, v_1^{(2)}, v_2, v_2^{(2)}, v_2^{(3)}] = [1, 1, 2, 2, 1]$ *et* $[v_1, v_1^{(2)+}, v_2, v_2^{(2)+}, v_2^{(3)}] = [1, 2, 2, 3, 1]$ *de l'exemple 5.2, ainsi que du polygone* $\mathcal{N}$ *défini par les triplets* $(r_1, v_1, n_1) = (1, 1, 2)$ *et* $(r_2, v_2, n_2) = (1, 2, 3)$. *Comme* $v_1/n_1 < v_2/n_2$, *ce polygone est l'enveloppe convexe de chacun des deux ensembles de points considérés: celui de gauche correspondant à un profil de valuations échelonné, c'est une discrétisation de* $\mathcal{N}$*; ce n'est pas le cas de celui de droite car le profil de valuations associé* $[1, 2, 2, 3, 1]$ *n'est que quasi-échelonné.*

5.3 Perturbations de Lidskii généralisées

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et supposons donnés q triplets (r_j, v_j, n_j) d'entiers positifs tels que

$$\gcd(v_j, n_j) = 1\,, \quad j = 1, \dots, q\,, \tag{5.4a}$$

et

$$0 < \frac{v_1}{n_1} < \frac{v_2}{n_2} < \dots < \frac{v_q}{n_q} \tag{5.4b}$$

à partir desquels on définit la forme de Jordan nilpotente

$$J = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q} \in \mathsf{K}^{n \times n} \tag{5.4c}$$

et, pour une perturbation de matrice $B(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n \times n}$, son profil de valuations échelonné

$$\operatorname{vp} B(\epsilon) = [(r_1, v_1, v_1^{(2)}, \dots, v_1^{(n_1)}), \dots, (r_q, v_q, v_q^{(2)}, \dots, v_q^{(n_q)})] \tag{5.5}$$

ou quasi-échelonné

$$\operatorname{vp} B(\epsilon) = [(r_1, v_1, v_1^{(2)+}, \dots, v_1^{(n_1)+}), \dots, (r_q, v_q, v_q^{(2)+}, \dots, v_q^{(n_q)+})]. \tag{5.6}$$

Notons que dans ce dernier cas, $\operatorname{vp} B(\epsilon)$ n'est pas défini complètement. Seules les deux premières composantes de chaque $(n_j + 1)$-uplet sont fixées; pour les suivantes, on connaît une borne inférieure.

Définition 5.2 *Soient* $A(\epsilon) = J + B(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n \times n}$ *une perturbation de matrice définie par (5.4) et (5.6), et* $r' = \sum_{i=1}^{q} r_i$. *Soit* $B = [B^{kl}]$ *la matrice de tête des valuations de* $B(\epsilon)$

*partitionnée en r'^2 blocs conformément à la structure de J, et b_{kl} le coin inférieur gauche du bloc B^{kl}. Pour $j = 1, \ldots, q$ on appelle j-***ième sous-matrice de Lidskii généralisée** *associée à $A(\epsilon)$ la matrice constante $L_j = [b_{kl}]_{1 \leq k,l \leq r'_j}$ d'ordre $r'_j = \sum_{i=1}^{j} r_i$. On appelle j-***ième condition de Lidskii généralisée** *associée à $A(\epsilon)$ la condition "$\Delta_j \neq 0$" où $\Delta_j = \det L_j$.*

Ces conditions de régularité permettent de généraliser le théorème 4.1 (théorème de Lidskii) en considérant non seulement la structure de Jordan de la matrice non perturbée A_0 de $A(\epsilon)$ mais aussi les valuations des colonnes de la partie perturbative $A(\epsilon) - A_0$.

C'est ce qu'exprime le résultat de la section suivante. Nous le démontrerons au paragraphe 5.3.3 après avoir examiné un exemple.

5.3.1 Théorème

La généralisation du théorème de Lidskii proposée ci-dessous décrit le comportement au voisinage de $\epsilon = 0$ des valeurs propres d'une perturbation $A(\epsilon) = J + B(\epsilon)$ d'une forme de Jordan nilpotente J par une matrice $B(\epsilon)$ de profil de valuations échelonné donné. Il s'avère que lorsque les conditions de Lidskii généralisées sont satisfaites, les termes dominants des valeurs propres de $A(\epsilon)$ dépendent uniquement de la structure par blocs de J, du profil de valuations de $B(\epsilon)$ et des sous-matrices de Lidskii généralisées.

Théorème 5.1 *Soit $A(\epsilon) = J + B(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ une perturbation de matrice définie par (5.4) et (5.5). Soient $j \in \{1, \ldots, q\}$ et $E_j = \mathrm{Diag}\,[O_{r'_{j-1}}, I_{r_j}]$. Supposons que $\Delta_j \neq 0$. Supposons de plus que $\Delta_{j-1} \neq 0$ lorsque $j \geq 2$. Alors la matrice $A(\epsilon)$ possède $r_j n_j$ valeurs propres de la forme*

$$\lambda_j^{kl}(\epsilon) = (\mu_j^k)^{1/n_j} \omega_{n_j}^l \epsilon^{v_j/n_j} + \mathrm{o}(\epsilon^{v_j/n_j}), \quad l = 0, \ldots, n_j - 1, \quad k = 1, \ldots, r_j,$$

où les μ_j^k sont les r_j racines du polynôme $\det(L_j - \lambda E_j)$.

On retrouve le théorème 4.1 (théorème de Lidskii) lorsque tous les v_j sont égaux à 1. Par ailleurs, comme les conditions de Lidskii généralisées ne dépendent que d'éléments de la matrice $B = [B^{kl}]$ situés dans les premières colonnes de ses blocs B^{kl}, le théorème 5.1 ci-dessus reste valide pour un profil de valuations quasi-échelonné (5.6). Cela permet de définir une famille de pertubations plus générale que les perturbations de Lidskii.

Définition 5.3 *Une perturbation de matrice $A(\epsilon) = J + B(\epsilon) \in \mathsf{F}^{n\times n}$ définie par (5.4) et (5.6) est appelée* **perturbation de Lidskii généralisée** *lorsque toutes les conditions de Lidskii généralisées définies à partir de J et de $\mathrm{vp}\,B(\epsilon)$ sont satisfaites. L'ensemble de ces matrices sera désigné par $\mathfrak{L}^+$.*

On a bien sûr $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}^+$. De plus, l'intérêt a priori de cette famille de perturbations de matrices est de n'exclure aucun type exposant, contrairement aux perturbations de Lidskii qui elles ne conduisent qu'à des exposants dominants égaux à l'inverse d'un entier positif. La généralité de cette famille sera démontrée au paragraphe 5.4.

Comme pour les perturbations de Lidskii, la famille des perturbations de Lidskii généralisées est un sous-ensemble de l'ensemble des perturbations génériques de formes de Jordan nilpotentes. Par ailleurs, d'après l'inclusion $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}^+$ on déduit encore du contre-exemple (4.2) du chapitre 4 que les dénominateurs des exposants dominants des valeurs propres d'une perturbation de Lidskii généralisée ne coïncident pas nécessairement avec leurs indices de ramification. C'est en revanche le cas dès que les r_j racines de chacun des polynômes $\det(L_j - E_j)$ du théorème 5.1 sont deux à deux distinctes, et donc en particulier dès que $B(\epsilon)$ est générique, à profil de valuations échelonné fixé.

Enfin, pour toute matrice de $\mathfrak{L}^+$, les deux problèmes 1.2 ($POLY \cdot NEWTON$) et 1.3 ($MON \cdot INFLUENTS$) admettent les solutions suivantes.

Corollaire 5.1 *Le polygone de Newton associé à une perturbation de Lidskii généralisée définie par (5.4) et (5.6) est formé de r_j segments de pente v_j/n_j, $j = 1, \ldots, q$. Le j-ième polynôme de Newton est $\phi_j(\lambda) = (-1)^{r'_j} \det(L_j - \lambda E_j)$.*

Corollaire 5.2 *Les monômes influents du polynôme caractéristique d'une perturbation de Lidskii généralisée définie par (5.4) et (5.6) sont les monômes non nuls de la forme*

$$(-1)^{r'_j} c_{jk} \epsilon^{\sum_{i=1}^{j-1} r_i v_i + k v_j} \lambda^{n - \sum_{i=1}^{j-1} r_i n_i - k n_j}, \quad k = 0, \ldots, r_j, \quad j = 1, \ldots, q,$$

avec $\det(L_j - \lambda E_j) = \sum_{k=0}^{r_j} c_{jk} \lambda^{r_j - k}$.

5.3.2 Exemple

Considérons les quatre fractions irréductibles v_j/n_j

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{4}{3}$$

et leurs "multiplicités" r_j respectives

$$1, 1, 2, 1.$$

Les quatre triplets (r_j, v_j, n_j) sont alors $(1,1,3), (1,2,5), (2,1,2), (1,4,3)$ et permettent de définir la forme de Jordan nilpotente $J = 0^3 0^5 (0^2)^2 0^3$ et, pour une matrice $B(\epsilon)$ 15×15 d'éléments de $\mathbb{Q}((\epsilon))$, le profil de valuations échelonné

$$\begin{aligned} \mathrm{vp}\, B(\epsilon) &= [1,1,1,2,2,2,1,1,1,1,1,1,4,3,2] \\ &= [(1,1,1,1),(1,2,2,2,1,1),(2,1,1),(1,4,3,2)]. \end{aligned}$$

Soit $A(\epsilon) = J + B(\epsilon)$. On a donc $q = 4$ et $r' = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 5$. En partitionnant B la matrice de tête des valuations de $B(\epsilon)$ conformément à J en $r'^2 = 25$ blocs B^{kl} on obtient

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccccc|cc|cc|ccc}
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\clubsuit & \times & \times & \heartsuit & \times & \times & \times & \times & \spadesuit & \times & \spadesuit & \times & \diamondsuit & \times & \times \\
\hline
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\heartsuit & \times & \times & \heartsuit & \times & \times & \times & \times & \spadesuit & \times & \spadesuit & \times & \diamondsuit & \times & \times \\
\hline
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\spadesuit & \times & \times & \spadesuit & \times & \times & \times & \times & \spadesuit & \times & \spadesuit & \times & \diamondsuit & \times & \times \\
\hline
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\spadesuit & \times & \times & \spadesuit & \times & \times & \times & \times & \spadesuit & \times & \spadesuit & \times & \diamondsuit & \times & \times \\
\hline
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\diamondsuit & \times & \times & \diamondsuit & \times & \times & \times & \times & \diamondsuit & \times & \diamondsuit & \times & \diamondsuit & \times & \times
\end{array}\right].$$

Les quatres sous-matrices de Lidskii généralisées et leurs matrices diagonales associées sont donc

$$L_1 = \clubsuit, \quad E_1 = 1,$$

$$L_2 = \left[\begin{array}{c|c} \clubsuit & \heartsuit \\ \hline \heartsuit & \heartsuit \end{array}\right], \quad E_2 = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}\right],$$

$$L_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} \clubsuit & \heartsuit & \spadesuit & \spadesuit \\ \heartsuit & \heartsuit & \spadesuit & \spadesuit \\ \hline \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit \\ \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit \end{array}\right], \quad E_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & & & \\ & 0 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right],$$

$$L_4 = \left[\begin{array}{cccc|c} \clubsuit & \heartsuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\ \heartsuit & \heartsuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\ \heartsuit & \heartsuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\ \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\ \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \diamondsuit \\ \hline \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit \end{array}\right], \quad E_4 = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right].$$

D'après le théorème de Lidskii généralisé 5.1 les termes dominants des 15 valeurs propres de $A(\epsilon) \in \mathcal{L}^+$ ne dépendent que des éléments de la matrice de tête des valuations de $B(\epsilon)$ désignés par $\clubsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$, $\diamondsuit$ et non de ceux désignés par $\times$, ni d'aucun autre élément. En supposant L_1, L_2, L_3 et L_4 inversibles on conclut que $A(\epsilon)$ possède trois valeurs propres de valuation $\frac{1}{3}$, cinq de valuation $\frac{2}{5}$, quatre de valuation $\frac{1}{2}$ et trois de valuation $\frac{4}{3}$. On retrouve cette répartition des valeurs propres sur le polygone de Newton de la figure 5.3 ci-dessous.

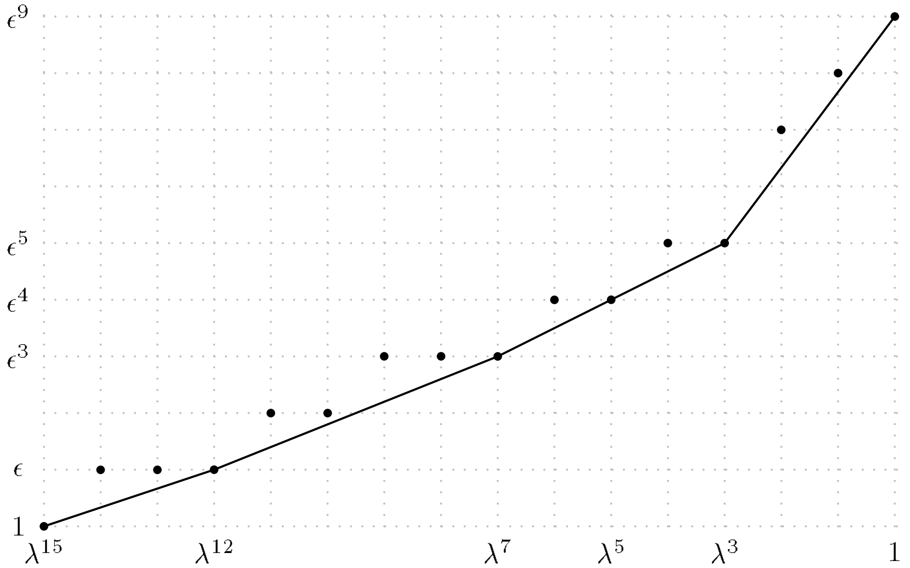


FIG. 5.3 – *Discrétisation du polygone de Newton associé à la matrice $A(\epsilon) = J + B(\epsilon)$ de l'exemple du paragraphe 5.3.2. Comme $A(\epsilon) \in \mathcal{L}^+$ la structure de J et les valuations v_j des premières colonnes de chaque colonne de $B(\epsilon)$ partitionnée conformément à J définissent le polygone de Newton associé à $A(\epsilon)$. Par ailleurs, les valeurs échelonnées $v_j^{(k)}$ des valuations de l'ensemble des colonnes de $B(\epsilon)$ définissent la discrétisation de ce polygone.*

Si de plus pour $j \in \{1,2,3,4\}$ on note $\mu_j^1, \ldots, \mu_j^{r_j}$ les r_j racines dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ du polynôme $\det(L_j - \lambda E_j)$ alors les valeurs propres de $A(\epsilon)$ vérifient

$$\lambda_1^{1l}(\epsilon) = \clubsuit^{1/3} e^{\frac{2i\pi l}{3}} \epsilon^{1/3} + \mathrm{o}(\epsilon^{1/3}), \quad l \in \{0,1,2\},$$

$$\lambda_2^{1l}(\epsilon) = (\mu_2^1)^{1/5} e^{\frac{2i\pi l}{5}} \epsilon^{2/5} + \mathrm{o}(\epsilon^{2/5}), \quad l \in \{0,1,2,3,4\},$$

$$\lambda_3^{1l}(\epsilon) = (\mu_3^1)^{1/2} e^{i\pi l} \epsilon^{1/2} + \mathrm{o}(\epsilon^{1/2}), \quad \lambda_3^{2l}(\epsilon) = (\mu_3^2)^{1/2} e^{i\pi l} \epsilon^{1/2} + \mathrm{o}(\epsilon^{1/2}), \quad l \in \{0,1\},$$

$$\lambda_4^{1l}(\epsilon) = (\mu_4^1)^{1/3} e^{\frac{2i\pi l}{3}} \epsilon^{4/3} + \mathrm{o}(\epsilon^{4/3}), \quad l \in \{0,1,2\}.$$

La "bonne" façon d'ordonner les blocs de Jordan de J est dictée par l'ordre des v_j/n_j. Ici les deux blocs 0^3 sont séparés car ils correspondent à des v_j/n_j différents, 1/3 et 4/3. En revanche les deux blocs 0^2 restent groupés car tous deux sont associés à 1/2.

5.3.3 Démonstration du théorème

On utilise une technique analogue à celle employée pour démontrer le théorème 4.1 de Lidskii au chapitre précédent. Pour $j \in \{1, \ldots, q\}$ fixé et en posant $z = \epsilon^{1/n_j}$ on cherche à expliciter les termes dominants des valeurs propres d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{v_j})$ de $A(z^{n_j})$ en fonction des sous-matrices de Lidskii généralisées définies à partir de J et de $\mathrm{vp}\, B(\epsilon)$. Pour cela nous procédons encore par similitude et la factorisation utilisée, d'ordre $\mathrm{O}(\epsilon^{v_j})$ cette fois, est celle définie au chapitre 3 par (3.1).

Dans [30] nous démontrons le cas particulier - déjà évoqué en introduction de ce chapitre - du théorème 5.1 uniquement à l'aide du polygone de Newton et du polynôme caractéristique: lorsque tous les $v_j^{(k)}$ sont supposés égaux à v_j, nous obtenons ainsi une extension du théorème 4.5 de Moro, Burke et Overton [45, théorème 3.1 page 807] et donc du théorème de Lidskii. Mais dans le cas plus général considéré ici, nous ne savons pas comment exploiter leur technique et nous procédons par similitude.

Preuve du théorème 5.1. Soit

$$P(z) = \mathrm{Diag}\,[P_1^1(z), \ldots, P_1^{r_1}(z), \ldots, P_q^1(z), \ldots, P_q^{r_q}(z)]$$

où, pour $1 \leq i \leq q$ et en utilisant des notations compatibles avec (5.1),

$$P_i^1(z) = \ldots = P_i^{r_i}(z) = \begin{cases} \mathrm{diag}\ [z^{u_i^{(g)}}]_{1 \leq g \leq n_i}\,, \quad u_i^{(g)} = -v_j - \left\lfloor n_j(n_i - g)\frac{v_i}{n_i} \right\rfloor & \text{si } i < j\,, \\ z^{-n_i v_j} \mathrm{diag}\ [1, z^{v_j}, z^{2v_j}, \ldots, z^{(n_i-1)v_j}] & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

En rappelant que l'on note $r_j' = \sum_{i=1}^{j} r_i$ nous allons montrer que $\tilde{A}(z) = P(z)^{-1}A(z^{n_j})P(z)$ est encore une perturbation d'une forme de Jordan nilpotente et que sa factorisation d'ordre $\mathrm{O}(z^{v_j})$ $\tilde{A}(z) = z^{v_j}C_{v_j}(z)D_{v_j}^{-1}(z)$ définie par (3.1) est telle que $\det(C_{v_j0} - \lambda D_{v_j0}) = (-1)^{n-r_j'}\lambda^{n-\sum_{i=1}^{j} r_i n_i}\det(L_j - \lambda^{n_j}E_j)$. On aura ainsi obtenu pour $\tilde{A}(z)$ un polynôme quasi-Newton d'ordre $\mathrm{O}(z^{v_j})$ et donc une représentation des termes dominants de toutes les valeurs propres de $A(z^{n_j})$ de valuation v_j (lemme 1.2).

Notons encore V et $\tilde{V}$ les matrices des valuations de $A(z)$ et $\tilde{A}(z)$ partitionnées conformément à la structure par blocs de la forme de Jordan J. Pour $1 \leq k, l \leq q$ nous désignons cette fois par V^{kl} tout bloc de V correspondant aux mêmes lignes (resp.

colonnes) dans J qu'un bloc de Jordan associé à v_k/n_k (resp. v_l/n_l). On définit de la même façon les blocs de $\tilde{V}$. D'après la structure de J et le profil de valuations de $B(z^{n_j})$, l'élément d'un bloc V^{kl} de position (g,h) dans ce bloc vérifie alors

$$v_{gh}^{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } (k,h) = (l, g+1)\,, \\ n_j v_l^{(h)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les quatre cas de figure qui se présentent pour les blocs $\tilde{V}^{kl}$ sont

$$\text{Si } k,l < j, \qquad \tilde{v}_{gh}^{kl} = \begin{cases} u_k^{(g+1)} - u_k^{(g)} & \text{si } (k,h) = (l, g+1)\,, \\ n_j v_l^{(h)} + u_l^{(h)} - u_k^{(g)} & \text{sinon}\,, \end{cases} \tag{5.7a}$$

$$\text{si } k \geq j > l, \qquad \tilde{v}_{gh}^{kl} = n_j v_l^{(h)} + (n_k - g + 1) v_j + u_l^{(h)}\,, \tag{5.7b}$$

$$\text{si } k < j \leq l, \qquad \tilde{v}_{gh}^{kl} = n_j v_l^{(h)} - (n_l - h + 1) v_j - u_k^{(g)}\,, \tag{5.7c}$$

$$\text{si } k,l \geq j, \qquad \tilde{v}_{gh}^{kl} = \begin{cases} v_j & \text{si } (k,h) = (l, g+1)\,, \\ n_j v_l^{(h)} + (n_k - n_l + h - g) v_j & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.7d}$$

L'étude de ces différentes situations repose sur les propriétés élémentaires suivantes

$$a \geq \lfloor a \rfloor \geq 0 \quad \text{pour } a \geq 0\,, \tag{5.8a}$$

$$\frac{v_h}{n_h} < \frac{v_{h'}}{n_{h'}} \quad \text{pour } h < h'\,, \tag{5.8b}$$

$$v_l^{(h)} > (n_l - h + 1)\frac{v_l}{n_l} \quad \text{pour } 2 \leq h \leq n_l\,, \tag{5.8c}$$

$$u_l^{(h)} \leq u_l^{(h')} \quad \text{pour } h \leq h'. \tag{5.8d}$$

Pour chacun des quatre cas de (5.7) on commence par étudier le coin inférieur gauche du bloc $\tilde{V}^{kl}$, puis les autres composantes de sa première colonne et enfin les colonnes restantes.

$\boxed{k,l < j}$ D'après (5.7a) le coin inférieur gauche de $\tilde{V}^{kl}$ est

$$\tilde{v}_{n_k,1}^{kl} = n_j v_l - \left\lfloor n_j (n_l - 1) \frac{v_l}{n_l} \right\rfloor. \tag{5.9a}$$

Comme il est indépendant de k tous les blocs $\tilde{V}^{kl}$ ont le même coin inférieur gauche pour $1 \leq k < j$. Les autres composantes de la première colonne sont supérieures ou égales à cette valeur. En effet, on déduit de (5.7a), (5.9a) et (5.8d) que

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{g1}^{kl} &= \tilde{v}_{n_k,1}^{kl} + u_k^{(n_k)} - u_k^{(g)} \\ &\geq \tilde{v}_{n_k,1}^{kl}\,, \quad 1 \leq g < n_k. \end{aligned} \tag{5.9b}$$

Enfin, les éléments $\tilde{v}^{kl}_{gh}$ des autres colonnes de $\tilde{V}^{kl}$ sont supérieurs à l'élément surdiagonal correspondant $\tilde{v}^{ll}_{h-1,h}$ de $\tilde{V}^{ll}$. D'après (5.7a)

$$\tilde{v}^{kl}_{gh} = \tilde{v}^{ll}_{h-1,h} + n_j v_l^{(h)} + \left\lfloor n_j(n_k - g)\frac{v_k}{n_k}\right\rfloor - \left\lfloor n_j(n_l - h + 1)\frac{v_l}{n_l}\right\rfloor .$$

Avec (5.8c) et (5.8a) cela conduit à

$$\tilde{v}^{kl}_{gh} > \tilde{v}^{ll}_{h-1,h}\,, \quad 1 \le g \le n_k\,, 2 \le h \le n_l\,, h \ne g+1. \tag{5.9c}$$

$\boxed{k \ge j > l}$ On déduit de (5.7b) que le coin inférieur gauche de $\tilde{V}^{kl}$ vérifie

$$\tilde{v}^{kl}_{n_k,1} = n_j v_l + v_j + u_l^{(1)}. \tag{5.9d}$$

C'est la valeur trouvée en (5.9a). (Remarquons qu'ainsi les blocs de *toutes* les colonnes de blocs $\tilde{V}^{\cdot,l}$ avec $1 \le l < j$ ont le même coin inférieur gauche.) De plus, les autres composantes de la première colonne de $\tilde{V}^{kl}$ sont supérieures ou égales à cette valeur. En effet,

$$\begin{aligned}\tilde{v}^{kl}_{g1} &= \tilde{v}^{kl}_{n_k,1} + (n_k - g)v_j \\ &> \tilde{v}^{kl}_{n_k,1}\,, \quad 1 \le g < n_k.\end{aligned} \tag{5.9e}$$

d'après (5.7b) et (5.9d). Pour les mêmes raisons que dans le premier cas, les éléments $\tilde{v}^{kl}_{gh}$ des colonnes de $\tilde{V}^{kl}$ autres que la première sont tous supérieurs à l'élément surdiagonal $\tilde{v}^{ll}_{h-1,h}$ de $\tilde{V}^{ll}$. En effet, d'après (5.7b) et (5.7a),

$$\begin{aligned}\tilde{v}^{kl}_{gh} &= \tilde{v}^{ll}_{h-1,h} + n_j v_l^{(h)} + u_l^{(h-1)} + (n_k - g + 1)v_j \\ &= \tilde{v}^{ll}_{h-1,h} + n_j v l^{(h)} - \left\lfloor n_j(n_l - h + 1)\frac{v_l}{n_l}\right\rfloor + (n_k - g)v_j \\ &> \tilde{v}^{ll}_{h-1,h}\,, \quad 1 \le g \le n_k\,, 2 \le h \le n_l\,, h \ne g+1.\end{aligned} \tag{5.9f}$$

Rappelons que $v_l/n_l > v_j/n_j$ dès que $l > j$. (Voir (5.8b).) C'est l'argument principal pour traiter les deux cas restants.

$\boxed{k < j \le l}$ D'après (5.7c) et (5.8b)

$$\tilde{v}^{kl}_{n_k,1} = v_j + n_j v_l - n_l v_j \begin{cases} = v_j & \text{si } l = j\,, \\ > v_j & \text{si } l > j. \end{cases} \tag{5.10a}$$

Pour les autres composantes de la première colonne de $\tilde{V}^{kl}$ on déduit de (5.7c), (5.10a) et (5.8d) que

$$\begin{aligned}\tilde{v}^{kl}_{g1} &= \tilde{v}^{kl}_{n_k,1} + u_k^{(n_k)} - u_k^{(g)} \\ &\ge \tilde{v}^{kl}_{n_k,1}\,, \quad 1 \le g < n_k.\end{aligned} \tag{5.10b}$$

Par conséquent, les $n_k - 1$ premières composantes de la première colonne de $\tilde{V}^{kj}$ sont supérieures ou égales au coin inférieur gauche v_j de ce bloc, alors que tous les blocs $\tilde{V}^{kl}$ où $l > j$ n'ont que des éléments supérieurs à v_j dans leur première colonne. Enfin, les composantes des autres colonnes sont toutes supérieures à v_j. En effet, les éléments surdiagonaux correspondants étant $\tilde{v}^{ll}_{h-1,h} = v_j$ on déduit de (5.7c), (5.8a), (5.8b), (5.8c) que

$$\begin{aligned}
\tilde{v}^{kl}_{gh} &= \tilde{v}^{ll}_{h-1,h} + n_j v_l^{(h)} - (n_l - h + 1)v_j + \left\lfloor n_j(n_k - g)\frac{v_k}{n_k}\right\rfloor \\
&> \tilde{v}^{ll}_{h-1,h} + (n_l - h + 1)(n_j \frac{v_l}{n_l} - v_j) + \left\lfloor n_j(n_k - g)\frac{v_k}{n_k}\right\rfloor \\
&> \tilde{v}^{ll}_{h-1,h} = v_j\,, \quad 1 \le g \le n_k\,, 2 \le h \le n_l\,, h \ne g+1.
\end{aligned} \tag{5.10c}$$

$\boxed{k, l \ge j}$ Partant de (5.7d) on obtient pour le coin inférieur gauche $\tilde{v}^{kl}_{n_k,1}$ de $\tilde{V}^{kl}$ la même expression qu'en (5.10a). Les autres composantes de la première colonne sont toutes supérieures à cette valeur. En effet,

$$\begin{aligned}
\tilde{v}^{kl}_{g1} &= \tilde{v}^{kl}_{n_k,1} + (n_k - g)v_j \\
&> \tilde{v}^{kl}_{n_k,1}\,, \quad 1 \le g < n_k.
\end{aligned} \tag{5.10d}$$

Enfin, les éléments des colonnes restantes sont tous supérieurs à v_j et donc supérieurs à l'élément surdiagonal qui est $\tilde{v}^{ll}_{h-1,h} = v_j$ par définition de $P(z)$. Plus précisément, (5.7d) et (5.8c) conduisent à

$$\begin{aligned}
\tilde{v}^{kl}_{gh} &> n_j(n_l - h + 1)\frac{v_l}{n_l} + (n_k - n_l + h - g)v_j \\
&> v_j + (n_k - g)v_j \quad \text{d'après (5.8b)}\,, \\
&> \tilde{v}^{ll}_{h-1,h} = v_j\,, \quad 1 \le g \le n_k\,, 2 \le h \le n_l\,, h \ne g+1.
\end{aligned} \tag{5.10e}$$

L'étude des éléments de la matrice $\tilde{V}$ selon les quatre cas annoncés est terminée. Comme $\tilde{V}$ n'a aucun élément négatif, $\tilde{A}(z)$ est encore une perturbation de matrice. Considérons le faisceau non perturbé $C_{v_j0} - \lambda D_{v_j0}$ de sa factorisation d'ordre $\mathrm{O}(z^{v_j})$ définie par (3.1). Pour $l > j$, on déduit des équations (5.10) que $\tilde{V}^{kl}$ n'a aucun élément inférieur à v_j. En notant $r_j^* = \sum_{i=1}^{j} r_i n_i$ et en rappelant qu'un élément diagonal de $D_{v_j}(z)$ vaut z^{v_j} (resp. 1) si la valuation de la colonne correspondante de $\tilde{A}(z)$ est inférieure à v_j (resp. supérieure ou égale à v_j), on obtient alors $D(z) = \mathrm{Diag}\,[D^{11}(z), I_{n-r_j^*}]$. D'autre part, puisque d'après (5.10a-b-c) tous les éléments de V^{kl} sont supérieurs à v_j lorsque $k < j < l$, la matrice

$C_{v_j 0}$ est en fait trianglaire inférieure:

$$C_0 = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} C_0^{11} & 0 \\ C_0^{21} & C_0^{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} r_j^* \\ n-r_j^* \end{array} \\ \begin{array}{cc} r_j^* & n-r_j^* \end{array} & \end{array} \quad , \quad D_0 = \begin{bmatrix} D_0^{11} & 0 \\ 0 & I_{n-r_j^*} \end{bmatrix} \ , \quad r_j^* = \sum_{i=1}^{j} r_i n_i \ ,$$

avec $C_0^{22} = (0^{n_{j+1}})^{r_{j+1}} \ldots (0^{n_q})^{r_q}$. Et donc

$$\det(C_0 - \lambda D_0) = (-\lambda)^{n-r_j^*} \det(C_0^{11} - \lambda D_0^{11}). \tag{5.11}$$

Explicitons maintenant $C_0^{11} - \lambda D_0^{11}$ à l'aide des équations (5.10) avec $l = j$ et des équations (5.9). Désormais $1 \leq k, l \leq j$. Les blocs non diagonaux sont des blocs $n_k \times n_l$ de la forme

$$\begin{bmatrix} \times & & & \\ \vdots & & & \\ \times & & & \\ * & & & \end{bmatrix} \quad \text{si } k < j \, , \qquad \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ * & & & \end{bmatrix} \quad \text{si } k = j \, ,$$

et les blocs diagonaux, dont la dimension est n_l, sont de la forme

$$\begin{bmatrix} \times(-\lambda) & 1 & & & \\ \times & (-\lambda) & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \times & & & (-\lambda) & 1 \\ * & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{si } l < j \, , \qquad \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & & & \\ & -\lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & 1 \\ * & & & & -\lambda \end{bmatrix} \quad \text{si } l = j .$$

Les $*$ représentent des éléments de la matrice de tête des valuations de $A(z^{n_j})$, les $\times$ sont soit de tels éléments soit des zéros, et $(-\lambda)$ signifie ici $-\delta\lambda$, $\delta \in \{0, 1\}$. D'après (5.10) on a $\tilde{v}_{ll} = v_j$ pour $l = j$. Les $-\lambda$ sur la diagonale des blocs d'ordre n_j viennent du fait que toutes les colonnes de $\tilde{A}(z)$ correspondant à des blocs ayant n_j colonnes sont de valuation v_j d'après (5.10). Pour les blocs diagonaux d'ordre n_l avec $l < j$, on remarque que les $n_l - 1$ premières colonnes de $\tilde{A}(z)$ correspondantes sont de valuation inférieure ou égale à v_j, alors que les autres colonnes ont une valuation inférieure à v_j. Cela explique les $n_l - 1$ $(-\lambda)$ diagonaux et le zéro en position (n_l, n_l). En effet, d'après (5.9a) la valuation d'une première colonne vérifie $\tilde{v}_{n_l,1}^{ll} \leq n_j \frac{v_l}{n_l} + 1$. Elle est donc inférieure à $v_j + 1$ à cause de (5.8b) et donc, puisque c'est un entier, inférieure ou égale à v_j. Le même argument est valable pour les valuations $\tilde{v}_{h-1,h}^{ll}$ des autres colonnes, c'est-à-dire lorsque $2 \leq h \leq n_l$. On a de plus pour la dernière colonne $h = n_l$ et $\tilde{v}_{n_l-1,n_l}^{ll} \leq n_j \frac{v_l}{n_l} < v_j$.

On peut désormais expliciter le déterminant du faisceau $C_{v_j0} - \lambda D_{v_j0}$ d'ordre r_j^*. L'exemple avec $r'_{j-1} = 2$ et $r_j = 2$ ci-dessous illustre comment simplifier le calcul de ce déterminant en exploitant la structure très particulière de $C_{v_j0} - \lambda D_{v_j0}$.

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc||cccc|cccc}
\times(-\lambda) & 1 & & & \times & & & & \times & & & & \times & & & \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
\times & & (-\lambda) & 1 & \times & & & & \times & & & & \times & & & \\
* & & & 0 & * & & & & * & & & & * & & & \\
\hline
\times & & & & \times(-\lambda) & 1 & & & \times & & & & \times & & & \\
\vdots & & & & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
\times & & & & \times & & (-\lambda) & 1 & \times & & & & \times & & & \\
* & & & & * & & & 0 & * & & & & * & & & \\
\hline\hline
 & & & & & & & & -\lambda & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & & & & & -\lambda & 1 & & & & \\
* & & & & * & & & & * & & & -\lambda & * & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & -\lambda & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & & & & & -\lambda & 1 \\
* & & & & * & & & & * & & & & * & & & -\lambda
\end{array}\right]
$$

A l'aide de la deuxième colonne, on commence par annuler tous les éléments de la première ligne sauf le 1 en position $(1,2)$. Ces opérations laissent bien sûr le déterminant du faisceau inchangé. En supprimant la première ligne et la seconde colonne, on obtient un faisceau d'ordre $r_j^* - 1$ dont le déterminant est $-\det(C_0^{11} - \lambda D_0^{11})$. On recommence avec tous les autres 1 du premier bloc diagonal et en remarquant que les $*$ ne sont pas modifiés (car ce sont les seuls éléments non nuls de la ligne qui les contient) on obtient finalement un faisceau d'ordre $n_j^* - n_1 + 1$ et de déterminant $(-1)^{n_1-1}\det(C_0^{11} - \lambda D_0^{11})$. Comme $\sum_{i=1}^{j-1} = r_i(n_i-1) = r_{j-1}^* - r'_{j-1}$ la répétition de ce procédé pour tous les blocs correspondant à

v_i/n_i avec $i < j$ conduit à

$$\det(C_0^{11} - \lambda D_0^{11}) = (-1)^{r^*_{j-1} - r'_{j-1}} \det \left[\begin{array}{cc||cccc|cccc}
* & * & * & & & & * & & & \\
* & * & * & & & & * & & & \\ \hline\hline
 & & -\lambda & 1 & & & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & & & -\lambda & 1 & & & & \\
* & * & * & & & -\lambda & * & & & \\ \hline
 & & & & & & -\lambda & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & & & -\lambda & 1 \\
* & * & * & & & & * & & & -\lambda
\end{array}\right],$$

où les $*$ sont les mêmes que dans le faisceau de départ $C_0^{11} - \lambda D_0^{11}$. On simplifie enfin les blocs diagonaux restants comme suit. Le $-\lambda$ en position $(1,1)$ dans un tel bloc est éliminé en ajoutant λ fois la deuxième colonne à la première, ce qui fait apparaître $-\lambda^2$ en position $(2,1)$. On supprime alors la première ligne et la deuxième colonne, ce qui a pour seul effet sur le déterminant du faisceau de changer son signe. En répétant ce procédé jusqu'à l'avant dernier $-\lambda$ du bloc on obtient

$$\det(C_0^{11} - \lambda D_0^{11}) = (-1)^{r^*_{j-1} - r'_{j-1} + n_j - 1} \det \left[\begin{array}{cc||c|cccc}
* & * & * & * & & & \\
* & * & * & * & & & \\ \hline\hline
* & * & * - \lambda^{n_j} & * & & & \\ \hline
 & & & -\lambda & 1 & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & -\lambda & 1 \\
* & * & * & * & & & -\lambda
\end{array}\right].$$

Comme il y a $(n_j - 1)$ 1 diagonaux et comme $r^*_{j-1} - r'_{j-1} + r_j(n_j - 1) = r^*_j - r'_j$, on trouve en répétant le procédé pour le deuxième bloc diagonal d'ordre n_j

$$\det(C_0^{11} - \lambda D_0^{11}) = (-1)^{r^*_j - r'_j} \det \left[\begin{array}{c|c} L_{j-1} & L_j^{12} \\ \hline L_j^{21} & L_j^{22} - \lambda^{n_j} I_{r_j} \end{array}\right] = (-1)^{r^*_j - r'_j} \det(L_j - \lambda^{n_j} E_j).$$

Finalement, on déduit de (5.11) que $\det(C_0 - \lambda D_0) = (-1)^{n - r'_j} \lambda^{n - r^*_j} \det(L_j - \lambda^{n_j} E_j)$. Comme déjà vu dans la preuve du théorème 4.1, les hypothèses $\Delta_j \neq 0$ et, si $j \geq 2$ $\Delta_{j-1} \neq 0$, assurent que $\det(L_j - \lambda^{n_j} E_j)$ possède $r_j n_j$ racines non nulles dans $\overline{\mathsf{K}}$. On conclut en appliquant à $\tilde{A}(z)$ le lemme 1.2 avec $a = v_j$, $b = 1$ et $L(z) = I$. $\Box$

5.4 Réduction à une perturbation de Lidskii généralisée

Théorème 5.2 *Toute perturbation d'une forme de Jordan nilpotente est semblable à une perturbation de Lidskii généralisée.*

Preuve. Soit $A(\epsilon)$ la perturbation de matrice en question. Soit q le nombre de segments du polygone de Newton associé à $A(\epsilon)$. Pour $j \in \{1, \ldots, q\}$ la pente du j-ième segment est notée v_j/n_j et sa longueur $r_j n_j$.

Soient $F(\epsilon) = \mathrm{Diag}\,[C_{f_1}(\epsilon), \ldots, C_{f_l}(\epsilon)]$ la forme de Frobenius de $A(\epsilon)$ et, pour $1 \leq k \leq l$, $r_j^{(k)} n_j$ le nombre de valeurs propres de $C_{f_k}(\epsilon)$ de valuation v_j/n_j. On a alors $r_j^{(k)} \geq 0$ et $r_j^{(1)} + \ldots + r_j^{(q)} = r_j$. Supposons que chaque $C_{f_k}(\epsilon)$ est semblable à une perturbation de Lidskii généralisée notée $\tilde{A}_k(\epsilon)$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, q\}$ la forme de Jordan $\tilde{A}_k(0)$ contient donc $r_j^{(k)}$ blocs 0^{n_j}. Il est clair que $A(\epsilon)$ est semblable à $\tilde{A}(\epsilon) = \mathrm{Diag}\,[\tilde{A}_k(\epsilon)]$. Réordonnons les blocs de Jordan des matrices $\tilde{A}_1(0), \ldots, \tilde{A}_l(0)$ de façon à ce que toutes les occurrences des couples (v_j, n_j) correspondent à des blocs consécutifs. On obtient une matrice $\hat{A}(\epsilon)$ semblable à $A(\epsilon)$ dont la matrice non perturbée vérifie (5.4) et dont la partie perturbative $\hat{A}(\epsilon) - \hat{A}(0)$ a un profil de valuations quasi-échelonné (5.6). De plus chacune des sous-matrices de Lidskii généralisées $\hat{L}_j$ de $\hat{A}(\epsilon)$ est inversible car échanger deux blocs de $\tilde{A}(0)$ a pour effet d'échanger certaines lignes et colonnes de $\tilde{L}_j$: la matrice $\hat{L}_j$ ainsi obtenue est semblable, à une matrice de permutation près, à $\tilde{L}_j = \mathrm{Diag}\,[\tilde{L}_j^{(k)}]$ qui est inversible par hypothèse.

Nous supposons donc désormais que la forme de Frobenius de $A(\epsilon)$ se réduit à l'unique bloc $C_p(\epsilon)$ où $p(\lambda, \epsilon) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\epsilon)\lambda^{n-k}$ est le polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$. La transposée de $F(\epsilon)$, semblable à $F(\epsilon)$, est alors la perturbation du bloc de Jordan 0^n

$$F(\epsilon)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_n(\epsilon) & \ldots & a_2(\epsilon) & a_1(\epsilon) \end{bmatrix}.$$

Ce qui suit a pour but de réduire $F(\epsilon)^T$ explicitement par similitude à une perturbation de Lidskii généralisée. En partitionnant le vecteur $\boldsymbol{a}(\epsilon) = [a_n(\epsilon), \ldots, a_1(\epsilon)]$ des n coefficients de $p(\lambda, \epsilon)$ conformément à $(0^{n_q})^{r_q} \ldots (0^{n_1})^{r_1}$ on a

$$\boldsymbol{a}(\epsilon) = [\,\boldsymbol{a}_q^{r_q}(\epsilon), \ldots, \boldsymbol{a}_q^1(\epsilon), \ldots, \boldsymbol{a}_1^{r_1}(\epsilon), \ldots, \boldsymbol{a}_1^1(\epsilon)\,],$$

où, pour $1 \leq j \leq q$ et $1 \leq k \leq r_j$,

$$\boldsymbol{a}_j^k(\epsilon) = [\,a_{jn_j}^k(\epsilon), \ldots, a_{j2}^k(\epsilon), a_{j1}^k(\epsilon)\,].$$

De plus, d'après l'hypothèse faite sur le nombre de valeurs propres de $A(\epsilon)$ d'une valuation donnée,

$$\operatorname{val} a^k_{jn_j}(\epsilon) = \sum_{i=1}^{j-1} r_i v_i + k v_j \,, \tag{5.12a}$$

$$\operatorname{val} a^k_{j,n_j-l+1}(\epsilon) \geq \sum_{i=1}^{j-1} r_i v_i + (k-1) v_j + v_j^{(l)} \,, \quad 2 \leq l \leq n_j . \tag{5.12b}$$

En posant

$$\alpha_j^k = \operatorname{val} a^k_{jn_j}(\epsilon) - v_j \,,$$

on déduit de (5.12a) que $\alpha_1^1 = 0$ et que

$$\begin{aligned} \alpha_j^{k+1} - \alpha_j^k &= v_j \quad \text{si } 1 \leq k < r_j \,, \\ \alpha_{j+1}^1 - \alpha_j^{r_j} &= v_j \quad \text{si } k = r_j . \end{aligned}$$

Par conséquent la similitude

$$P(\epsilon) = \operatorname{Diag}\,[P_q^{r_q}, \dots, P_q^1, \dots, P_1^{r_1}, \dots, P_1^1]$$

définie à partir de $P_j^k(\epsilon) = \epsilon^{\alpha_j^k} I_{n_j}$ transforme $F(\epsilon)^T$ en une matrice de la forme $\tilde{A}(\epsilon) = P(\epsilon)^{-1} F(\epsilon)^T P(\epsilon) = (0^{n_q})^{r_q} \dots (0^{n_1})^{r_1} + \tilde{B}(\epsilon)$. Plus précisément,

$$\tilde{B}(\epsilon) = \begin{bmatrix} & \tilde{B}^{12}(\epsilon) & & & \\ & & \tilde{B}^{23}(\epsilon) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \tilde{B}^{t-1,t}(\epsilon) \\ \tilde{B}^{t1}(\epsilon) & \tilde{B}^{t2}(\epsilon) & \tilde{B}^{t3}(\epsilon) & \dots & \tilde{B}^{tt}(\epsilon) \end{bmatrix}$$

est une matrice par blocs partitionnée conformément à la structure de $(0^{n_q})^{r_q} \dots (0^{n_1})^{r_1}$. On a donc $t = \sum_{i=1}^q r_i$. De plus, pour $j \in \{1, \dots, q\}$ et $l \in \{\sum_{i=j+1}^q r_i + 1, \dots, \sum_{i=j}^q r_i\}$, tous les éléments du bloc $\tilde{B}^{l-1,l}(\epsilon)$ $(l > 1)$ sont nuls sauf le coin inférieur gauche, égal à ϵ^{v_j}. Quant au bloc $\tilde{B}^{tl}(\epsilon)$, toutes ses lignes sont nulles sauf la dernière, qui vaut $\epsilon^{\alpha_j^k} \boldsymbol{a}_j^k(\epsilon)$ car $\alpha_1^1 = 0$.

Permutons les blocs de $(0^{n_q})^{r_q} \dots (0^{n_1})^{r_1}$ au moyen d'une similitude constante S de façon à retrouver $J = (0^{n_1})^{r_1} \dots (0^{n_q})^{r_q}$ définie en (5.4). On obtient alors la matrice

$S^{-1}\tilde{A}(\epsilon)S = J + B(\epsilon)$ avec $B(\epsilon)$ de la forme

$$B(\epsilon) = \begin{bmatrix} B^{11}(\epsilon) & B^{12}(\epsilon) & \dots & B^{1,t-1}(\epsilon) & B^{1t}(\epsilon) \\ B^{21}(\epsilon) & & & & \\ & B^{32}(\epsilon) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & B^{t,t-1}(\epsilon) & \end{bmatrix}.$$

Pour $l \in \{\sum_{i=1}^{j-1} r_i + 1, \dots, \sum_{i=1}^{j} r_i\}$ le bloc $B^{i+1,i}(\epsilon)$ $(i < t)$ a tous ses éléments nuls sauf son coin inférieur gauche, égal à ϵ^{v_j}, et le bloc $B^{1i}(\epsilon)$ a toutes ses lignes nulles sauf la dernière, égale à $\epsilon^{\alpha_j^k}\boldsymbol{a}_j^k(\epsilon)$. On déduit de (5.12) que la première colonne de la j-ième colonne de blocs de $B(\epsilon)$ est de valuation v_j alors que les $n_j - 1$ colonnes restantes ont une valuation au moins $v_j^{(l)}$. Par conséquent, le profil de valuations de $B(\epsilon)$ est quasi-échelonné. En rappelant que le coefficient $a_k(\epsilon)$ associé à λ^{n-k} dans le polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$ est noté $a_k(\epsilon) = \hat{a}_k\epsilon^{\alpha_k} + \mathrm{o}(\epsilon^{\alpha_k})$ on déduit de la structure que nous venons de décrire que

$$L_j = \left[\begin{array}{cccc|c|cccc} \hat{a}_{1n_1}^1 & \dots & \hat{a}_{1n_1}^{r_1} & & \dots & \hat{a}_{jn_j}^1 & \dots & \hat{a}_{j,n_j-1}^{r_j} & \hat{a}_{jn_j}^{r_j} \\ 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 & \end{array}\right], \quad j = 1, \dots, q.$$

D'où $\det L_j = -\hat{a}_{j,n_j}^{r_j}$ et $\hat{a}_{j,n_j}^{r_j} = \hat{a}_{r_1n_1+\ldots+r_jn_j}$ est non nul par définition du polygone de Newton associé à $A(\epsilon)$. Toutes les conditions de Lidskii généralisées sont donc satisfaites et la matrice $S^{-1}\tilde{A}(\epsilon)S$ est une perturbation de Lidskii généralisée semblable à $A(\epsilon)$. $\square$

Remarque 5.1 Il est important d'observer que la réduction par similitude d'une perturbation d'une forme de Jordan nilpotente à une perturbation de la forme $J + B(\epsilon)$ avec $\mathrm{vp}\, B(\epsilon)$ échelonné - et pas seulement quasi-échelonné comme dans l'énoncé du théorème 5.2 - est parfois impossible. Considérons par exemple la perturbation du bloc 0^3

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \epsilon^2 & \epsilon^2 & \epsilon^2 \end{bmatrix}.$$

On a $q = 1$, $n_1 = 3$, $v_1 = 2$. Or, le profil de valuations échelonné défini par $(v_1, n_1) = (2, 3)$ est $[2, 2, 1]$. Pour réduire $A(\epsilon)$ par similitude à une perturbation de matrice $\tilde{A}(\epsilon) = 0^3 + \tilde{B}(\epsilon)$ telle que la troisième colonne de $B(\epsilon)$ soit de valuation 1, il est nécessaire d'appliquer à $A(\epsilon)$ une opération élémentaire de lignes de la forme $R_3 \leftarrow R_3 + \mathrm{O}(\epsilon) R_2$. L'opération de colonnes associée $C_2 \leftarrow C_2 - \mathrm{O}(\epsilon) C_3$ fait alors chuter la valuation de la deuxième colonne de $A(\epsilon)$ et empêche d'avoir $\mathrm{vp}\, \tilde{B}(\epsilon) = [2, 2, 1]$.

Chapitre 6

Procédures Maple pour les perturbations de matrices

Ce dernier chapitre présente quelques programmes écrits dans le langage de calcul formel Maple[1] et implantant pour les matrices polynomiales l'essentiel des techniques et des algorithmes des chapitres précédents. La "boîte à outils" qu'ils constituent permet une première approche expérimentale des perturbations de matrices. Elle demande à être améliorée par des implantations plus efficaces et enrichie de nouvelles fonctionnalités.

Les différentes procédures disponibles sont regroupées dans le paquetage `MPs` et peuvent être utilisées, après avoir chargé la librairie d'algèbre linéaire `linalg`, en tapant

```
> with(MPs);
```

[*Berkowitz*, *Jfact*, *Jrf*, *Jsortf*, *Newtondiag*, *Segre2jcf*, *Val*, *dmind*, *eiglc*, *isJred*, *isVP*, *isred*, *isvred*, *jcf2Segre*, *lj*, *mlrf*, *mplot2*, *msort*, *pmrand*, *rcef*, *val*, *vfact*, *vmind*, *vp*, *vrf*, *vsortf*]

6.1 Génération aléatoire de perturbations de matrices

La procédure `pmrand` permet de créer des perturbations de matrices polynomiales de profil de valuations donné. Les polynômes formant les éléments de la matrice sont choisis à l'aide la fonction `randpoly` de Maple. On choisit la dimension, la variable, le corps des coefficients (ici $\mathbb{Z}_2$), le degré des polynômes derrière la valuation, et le profil de valuations en colonnes.

1. Maple 5, Release 5

```
> A:=pmrand(4,x,field=2,deg=1,colvp=[0,1,1,3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -x & -x^2 & x & -x^4 - x^3 \\ x+1 & 0 & x^2+x & -x^4 - x^3 \\ x & -x^2 & x^2 & x^4 - x^3 \\ 1 & x & x^2 - x & x^4 + x^3 \end{bmatrix}$$

Cette matrice n'est pas une perturbation quasi-générique à profil de valuations fixé car son élément $(1,1)$n'est pas de valuation nulle.

6.2 Opérations élémentaires sur les perturbations de matrices

Il s'agit des procédures

`val`	valuation
`vp`	profil de valuations
`Val`	matrice des valuations
`lj`	forme de Jordan dominante
`vfact`	factorisation d'ordre entier
`Jfact`	factorisation d'ordre l'inverse d'un entier
`vsortf`	colonnes triées par valuations croissantes
`Jsortf`	dimensions de blocs triées par valeurs décroissantes

En reprenant l'exemple précédent, on obtient

```
> val(A,x);
```

$$0$$

```
> vp(A,x);
```

$$[0,\ 1,\ 1,\ 3]$$

```
> Val(A,x);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \infty & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

6.3 A partir du polynôme caractéristique

Tous les calculs de polynôme caractéristique sont faits avec l'implantation de l'algorithme de Berkowitz proposée par Abdeljaoued [2, 1]. La procédure `Berkowitz` est plus rapide que la procédure `[linalg]charpoly` de Maple. En supposant le polynôme caractéristique connu ou calculable en un temps raisonnable, on peut utiliser les procédures évoquées dans les sections ci-dessous.

6.3.1 Termes dominants

La procédure `eiglc` ne fait qu'appliquer la procédure `puiseux` de la `share library` au polynôme caractéristique de la perturbation de matrice considérée. Elle est particulièrement utile pour connaître les termes dominants d'une petite perturbation de matrice. Sur l'exemple précédent cela donne, en développant jusqu'à l'ordre 3,

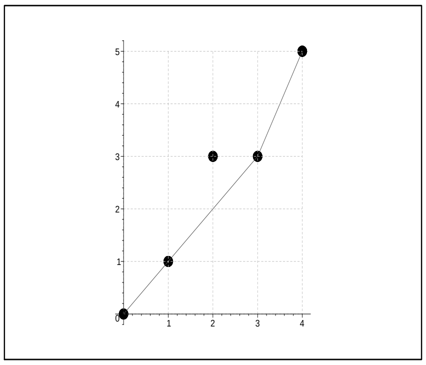
```
> eiglc(A,x,3);
```

$$\{-x^2, (\frac{51}{31}\,\mathrm{RootOf}(1+\_Z^3+\_Z^2)+\frac{29}{31}\,\mathrm{RootOf}(1+\_Z^3+\_Z^2)^2+\frac{28}{31})\,x^2 \\ +\,x\,\mathrm{RootOf}(1+\_Z^3+\_Z^2)\}$$

6.3.2 Polygone de Newton

La procédure `Newtondiag` trace le polygone de Newton associé à une perturbation de matrice donnée et calcule à partir du polynôme caractéristique de $A(\epsilon)$ ses polynômes de Newton. L'option `cp = true` indique qu'il s'agit d'une perturbation de matrice $A(\epsilon)$ et que le polygone de Newton est défini par $\det(\lambda I - A(\epsilon))$ et non d'une perturbation de polynôme $A(\lambda, \epsilon)$ où l'on prendrait $\det A(\lambda, \epsilon)$.

```
> with(plottools):
> Newtondiag(A,x,u,cp=true);
```



$$[[2,\ 1,\ 3,\ u\,(u^3+u^2+1)],\ [1,\ 2,\ 1,\ u+1]]$$

Ici, on a 2 segments de même pente 1, de longueur totale 3, et un segment de pente 2 et de longueur 1.

6.3.3 Indices minimaux

Les procédures `vmind` et `dmind` calculent δ_i avec la définition correspondante du chapitre 3 ou 4. On en déduit les indices minimaux en valuation et en dimension. Toujours sur le même exemple, cela donne

```
> seq(vmind(A,x,u,i), i=0..5);
```

$$0,\ 3,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0$$

```
> seq(dmind(A,x,u,i), i=1..5);
```

$$4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0$$

6.4 Tests

Les procédures suivantes permettent de décider si une perturbation de matrice appartient à l'une des familles de perturbations quasi-génériques $\mathcal{VP}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^+$ ou si elle est v-réduite ou J-réduite à l'aide des caractérisations en termes de polynômes quasi-Newton des chapitres 3 et 4.

`isvred`	test par rapport à la forme v-réduite
`isJred`	test par rapport à la forme J-réduite
`isred`	test par rapport à la forme réduite
`isVP`	test par rapport à $\mathcal{VP}$
`isLidskii`	test par rapport à $\mathcal{L}$

L'exemple précédent n'est pas une forme v-réduite. En choisissant une perturbation de matrice de profil de valuations $[(r_j, v_j)]_{1\leq j\leq q} = [0, 1, 1, 3]$, on trouve cette fois une forme v-réduite. Les polynômes donnés en sortie sont les $\varphi_{v_j+1}(\lambda)$ pour $j = 1, \ldots, q$.

```
> isvred(A,x);
```

$$[\mathit{false},\ []]$$

```
> A:=pmrand(4,x,field=2,deg=1,colvp=[0,1,1,3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & x^2 & -x^2 & -x^4 \\ -x & x^2 & -x^2 - x & -x^4 \\ 0 & -x & -x^2 & -x^4 \\ -x-1 & -x & x^2 - x & 0 \end{bmatrix}$$

```
> isvred(A,x);
```

$$[\mathit{true},\ [[0,\ (-1+\lambda)\,\lambda^3],\ [1,\ -\lambda^3+\lambda],\ [4,\ -1+\lambda]]]$$

6.5 Réductions

Il s'agit des procédures implantant les formes matricielles des chapitres 2, 3 et 4.

`mlrf`	forme semblable de rang dominant minimal
`vrf`	forme v-réduite
`Jrf`	forme J-réduite

Ces versions ne sont pas complètement optimisées et fonctionnent correctement pour de petits exemples ($n < 10$). Considérons l'exemple ci-dessous. Le point de départ est une perturbation du bloc 0^5 de rang 4. Ce rang n'est pas minimal et peut être diminué jusqu'à 3. On trouve ensuite $0^3 0^2$ comme forme de Jordan dominante minimale. On remarquera la croissance à la fois du degré et des coefficients qui apparaissent dans la forme J-réduite C. Cela devient vite rédhibitoire, et des versions paresseuses sont à envisager. Les matrices `P` et `invP` lors de l'appel à `mlrf` sont bien sûr des matrices de passage polynomiales telles que `B = invP A P`.

```
> A:=matrix([[x, 1+x, 0, 0, x], [x, x, 1, 0, x], [x, 0, 0, 1, 0], [0, x,
x, x, 1], [0, 0, x, 0, 0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} x & 1+x & 0 & 0 & x \\ x & x & 1 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & x & x & 1 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> B:=mlrf(A,x,'r','P','invP');
```

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 1 & x^2 & x+x^2 & x \\ x & x & 1+x^2 & 2\,x+x^2 & -x \\ x & 0 & 0 & 0 & -x \\ 1 & 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & x+x^2 & x \end{bmatrix}$$

```
> r;
```

$$3$$

```
> issimilar(A,B);
```

$$true$$

```
> C:=Jrf(B,x);
```

$$C := \begin{bmatrix} x+x^2 & 1-x^2 & 0 & -x^2 & 0 \\ x+2\,x^2+x^3 & -x^2-x^3 & 1+x & -x^2-x^3 & x \\ 3\,x+x^3 & -x^3+x^2 & 0 & -x-x^3+x^2 & -x \\ -x^2-x^3+x & x^3-x & -x & x^3-x & 1-x \\ -2\,x+3\,x^2 & -x-3\,x^2 & 2\,x & x-3\,x^2 & 3\,x \end{bmatrix}$$

```
> issimilar(C,A);
```

$$true$$

```
>  jcf2Segre(subs(x=0,evalm(C)));
```

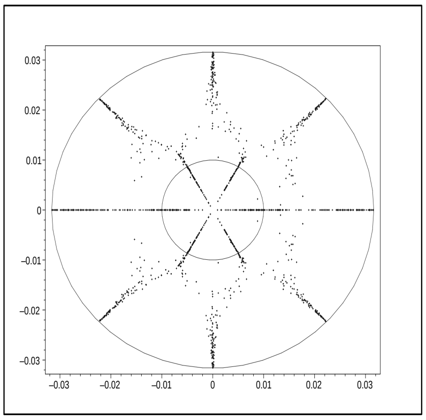
$$[5, 2, 2, [[1, 3], [1, 2]]]$$

6.6 Perturbations numériques (Matlab / Maple)

La procédure `eigplot` trace dans le champ complexe les valeurs numériques des valeurs propres de perturbations aléatoires d'une forme de Jordan nilpotente ou de perturbations polynomiales aléatoires d'une forme de Smith locale. Les valeurs propres numériques sont calculées par Matlab, appelé depuis Maple. L'exemple ci-dessous correspond à 200 perturbations aléatoires d'ordre $\epsilon = 10^{-6}$ de la forme de Smith locale décrite sous la commande Maple. Le but est d'observer les comportements numériques des familles de perturbations quasi-génériques (Lidskii par exemple) et éventuellement d'en exhiber d'autres. La répartition ci-dessous a été annoncée par Langer et Najman dans [38, 39] où ils généralisent la théorie de Lidskii aux perturbations de fonctions matricielles.

```
>  eigplot([3,[4,0],[3,0]],var=x,eps=10.^(-6),trial=200);
```

$$\begin{bmatrix} x^4 & 0 & 0 \\ 0 & x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Conclusion

L'étude de la mise sous forme normale rationnelle d'une perturbation de matrice que nous venons de faire appelle des développements d'ordres pratique, algorithmique et théorique.

Tout d'abord, le traitement des perturbations analytiques de matrices demande de pouvoir évaluer ces objets de façon paresseuse, c'est-à-dire coefficient par coefficient en fonction des besoins. On peut penser à une évaluation paresseuse sur le modèle de celles implantées par van Hoeij [56] et Pflügel [50].

Au niveau algorithmique, outre l'écriture de versions paresseuses des algorithmes de calcul d'une forme v-réduite et d'une forme J-réduite - importantes lorsqu'on ne demande pas une matrice semblable à celle de départ mais seulement les indices minimaux -, il reste à concevoir un algorithme de réduction d'une perturbation d'une forme de Jordan nilpotente à une perturbation de Lidskii généralisée. Le problème 1.6 ($REDUCTION$) serait alors complètement résolu. Cependant la principale difficulté vient du fait qu'ici l'enveloppe recherchée est exactement le polygone de Newton et non un polygone pouvant être décrit avec une seule dimension, comme les partitions entières des chapitres 3 et 4.

Enfin, sur le plan théorique, il reste à montrer que l'on peut diagonaliser par blocs une perturbation de Lidskii généralisée à l'aide d'une matrice de passage à coefficients séries formelles. Cela achèverait de résoudre le problème 1.7 ($FORME \cdot NORMALE$).

Par ailleurs, l'étude des perturbations de matrices polynomiales et en particulier des perturbations de faisceaux de matrices semble prometteuse pour au moins trois raisons: les problèmes du chapitre 1 se posent dans les mêmes termes, le fait d'opérer par équivalence plutôt que par similitude semble moins contraignant, et enfin une façon plus immédiate d'aboutir aux résultats du chapitre 4 pourrait passer par le remplacement de la forme de Jordan J par la forme de Smith du faisceau $\lambda I - J$. Un point d'entrée évident semble être les travaux de Langer et Najman [38, 39] généralisant la théorie de Lidskii au cas des perturbations de fonctions matricielles.

Bibliographie

[1] J. Abdeljaoued. *Algorithmes rapides pour le calcul du polynôme caractéristique*. PhD thesis, Besançon, France, 1997.

[2] J. Abdeljaoued. The Berkowitz algorithm, Maple and computing the characteristic polynomial in an arbitrary commutative ring. *MapleTech*, 4(3):21–32, 1997.

[3] V.I. Arnold. On matrices depending on parameters. *Russian Math. Surveys*, 26:29–43, 1971.

[4] M. A. Barkatou and G. Chen. Some formal invariants of linear difference systems and their computattions. *Pub. IRMA*, 44(II), 1997. soumis.

[5] M. A. Barkatou and G. Chen. Computing the exponential part of a formal fundamental matrix solution of a linear difference system. *J. Difference Eq. Appl.*, 5:117–142, 1999.

[6] M.A. Barkatou. *Contribution à l'étude des équations différentielles et aux différences dans le champ complexe*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, 1988.

[7] M.A. Barkatou. Characterization of regular singular linear systems of difference equations. *Numerical Algorithms*, 1:139–154, 1991.

[8] M.A. Barkatou. On rational solutions of linear differential systems. *J. Symbolic Computation*, 28(4-5):547–567, 1999.

[9] M.A. Barkatou and E. Pflügel. An algorithm computing the regular singular formal solutions of a linear differential system. *J. Symbolic Computation*, 28(4-5):568–587, 1999.

[10] H. Baumgärtel. *Analytic perturbation theory for matrices and operators*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1985.

[11] F. Béringer and F. Jung. Solving multivariate algebraic equations. draft, juillet 2000.

[12] F. Béringer and F. Jung. Solving "generalized algebraic equations". In O. Gloor, editor, *Proceedings of ISSAC 1998*, pages 222–227, Rostock, Germany, 1998. ACM Press.

[13] V.N. Bogaevski and A. Povzner. *Algebraic methods in nonlinear perturbation theory.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[14] E. Brieskorn and H. Knörrer. *Plane algebraic curves.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[15] J.V. Burke and M.L. Overton. Stable perturbations of nonsymmetric matrices. *Linear Algebra Appl.*, 171:249–273, 1992.

[16] F. Chaitin-Chatelin and V. Frayssé. *Lectures on finite precision computations.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996.

[17] J.-M. Chassery and A. Montanvert. *Géométrie discrète en analyse d'images.* Hermès, Paris, 1991.

[18] G. Chen. *Solutions formelles de systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires homogènes.* PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1990.

[19] D. Duval. Diverses questions relatives au calcul formel avec nombres algébriques. Thèse d'Etat, Faculté des Sciences de Grenoble, 1987.

[20] B.C. Eaves, U.G. Rothblum, and H. Schneider. Perron-Frobenius theory over real closed fields and fractional power series expansions. *Linear Algebra Appl.*, 220:123–150, 1995.

[21] A. Edelman, E. Elmroth, and B. Kågström. A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils: Part II: Stratifications. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 20(3):667–699, 1999.

[22] G. Fishman. Quasi-cube et würtzite: application au gan. École thématique du CNRS, Montpellier, 1997.

[23] E. Gansner. Acyclic digraphs, Young tableaux and nilpotent matrices. *SIAM J. Alg. Disc. Meth.*, 2:429–440, 1981.

[24] F.R. Gantmacher. *Théorie des matrices.* Editions Jacques Gabay, 1990.

[25] M. Giesbrecht. *Nearly optimal algorithms for canonical matrix forms.* PhD thesis, Department of Computer Science, University of Toronto, 1993.

[26] G.H. Golub and C. Van Loan. *Matrix computations.* Johns Hopkins University Press, 1989.

[27] A. Hilali and A. Wazner. Calcul des invariants de Malgrange et de Gérard et Levelt d'un système différentiel linéaire en un point singulier irrégulier. *Jour. Diff. Equ.*, 69, 1987.

[28] A. Hilali and A. Wazner. Formes super–irréductibles des systèmes différentiels linéaires. *Numer. Math.*, 50:429–449, 1987.

[29] A. Ilahi. *Validation du calcul sur ordinateur: application de la théorie des singularités.* PhD thesis, Université des Sciences Sociales, Toulouse I, 1998.

[30] C.-P. Jeannerod. On some nongeneric perturbations of an arbitrary Jordan structure. Soumis à Linear Algebra Appl., 1999.

[31] C.-P. Jeannerod. An algorithm for the eigenvalue perturbation problem: reduction of a κ-matrix to a lidskii matrix. In C. Traverso, editor, *Proceedings of ISSAC 2000*, pages 184–191, St Andrews, Scotland, 2000. ACM Press.

[32] C.-P. Jeannerod and E. Pflügel. A reduction algorithm for matrices depending on a parameter. In S. Dooley, editor, *Proceedings of ISSAC 1999*, pages 121–128, Vancouver, Canada, 1999. ACM Press.

[33] C.P. Jeannerod and N. Maillard. Using computer algebra to diagonalize some Kane matrices. *J. of Physics A: Mathematical and General*, 33(14):2857–2870, 2000.

[34] F. Jung and J. Della Dora. About the Newton polygon algorithm for non linear ordinary differential equations. In W. Küchlin, editor, *Proceedings of ISSAC 1997*, Maui, Hawaii, USA, 1997. ACM Press.

[35] T. Kailath. *Linear Systems.* Prentice Hall, 1980.

[36] E.O. Kane. *The kp method (semiconductors and semimetals).* Academic Press, 1967.

[37] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer, Berlin, 1980.

[38] H. Langer and B. Najman. Remarks on the perturbation theory of analytic matrix functions II. *Integral Equations Operator Theory*, 12:392–407, 1989.

[39] H. Langer and B. Najman. Leading coefficients of the eigenvalues of perturbed analytic matrix functions. *Integral Equations Operator Theory*, 16:600–604, 1993.

[40] V.B. Lidskii. Perturbation theory of non-conjugate operators. *U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.*, 1:73–85, 1965.

[41] P.O. Löwdin. A note on the quantum-mechanical perturbation theory. *Journal of Chemical Physics*, 19(11):1396–1401, 1951.

[42] Y. Ma. *Studies in matrix perturbation theory and robust statistics.* PhD thesis, MIT, Boston, 1999.

[43] Y. Ma and A. Edelman. Nongeneric perturbations of Jordan blocks. *Linear Algebra Appl.*, 273:45–63, 1998.

[44] Y.-O. Macutan. Formal solutions of scalar singularly-perturbed linear differential equations. In S. Dooley, editor, *Proceedings of ISSAC 1999*, pages 113–120, Vancouver, Canada, 1999. ACM Press.

[45] J. Moro, J.V. Burke, and M.L. Overton. On the Lidskii-Vishik-Lyusternik perturbation theory for eigenvalues of matrices with arbitrary Jordan structure. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 18:793–817, 1997.

[46] J. Moser. The order of a singularity in Fuchs' theory. *Math. Zeitschr.*, 72:379–398, 1960.

[47] J. Murdock. A book by James Murdock, tentatively titled Local Dynamical Systems. Currently scheduled to be published by Springer-Verlag in 2002.

[48] B. Najman. The asymptotic behavior of the eigenvalues of a singularly perturbed linear pencil. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 20(2):420–427, 1998.

[49] P. Ozello. *Calcul exact des formes de Jordan et de Frobenius d'une matrice.* PhD thesis, Université Scientifique Technologique et Médicale de Grenoble, 1987.

[50] E. Pflügel. *Résolution symbolique des systèmes différentiels linéaires.* PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1998.

[51] E. Pflügel. Effective formal reduction of linear differential systems. *Appl. Alg. in Eng., Com. and Comp.*, 2, 2000.

[52] M.-P. Quéré-Stuchlik. *Théorie des faisceaux linéaires de matrices, Application à la théorie des systèmes linéaires et à la résolution d'équations algébro-différentielles.* PhD thesis, Université de Paris VI, 1997.

[53] L. Rebillard. *Etude théorique et algorithmique des séries de Chebyshev solutions d'équations différentielles holonomes.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, 1998.

[54] M.M. Vainberg and V. A. Trenogin. *Theory of branching of solutions of non-linear equations.* Noordhoff, Leyden, 1974.

[55] P. Van Dooren. Canonical form of a singular pencil. *Linear Algebra Appl.*, 27:103–140, 1979.

[56] M. van Hoeij. Formal solutions and factorization of differential operators with power series coefficients. *J. Symbolic Computation*, 24:1–30, 1997.

[57] M.I. Vishik and L.A. Lyusternik. The solution of some perturbation problems for matrices and selfadjoint or non-selfadjoint differential equations I. *Russian Math. Surveys*, 15:1–74, 1960.

[58] R.J. Walker. *Algebraic curves.* Dover, 1962.

[59] B. Wall. *Symbolic computation with algebraic sets.* PhD thesis, Johannes Kepler Universität, Linz, 1993.

[60] W. Wasow. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations.* Wiley, New York, 1965.

[61] J.H. Wilkinson. *The algebraic eigenvalue problem.* Oxford, 1965.

[62] W. Wolovich. *Linear Multivariable Systems.* Springer-Verlag, New York, 1974.

[63] K. Yokoyama and T. Takeshima. On Hensel construction of eigenvalues and eigenvectors of matrices with polynomial entries. In M. Bronstein, editor, *Proceedings of ISSAC 1993*, pages 218–224, Kiev, Ukraine, 1993. ACM Press.

Titre: Formes normales de perturbations de matrices: étude et calcul exact.

Résumé: Cette thèse étudie les formes normales rationnelles de perturbations de matrices en vue de la résolution du problème de perturbations pour les valeurs propres : le comportement asymptotique des valeurs propres d'une perturbation de matrice pouvant être entièrement décrit à partir de seulement quelques monômes du polynôme caractéristique, il s'agit essentiellement d'arriver à "lire" ces invariants matriciels directement sur la matrice de départ (perturbations quasi-génériques) ou, à défaut, sur une perturbation qui lui soit semblable (forme réduite). Partant des travaux de Moser et de Lidskii, on propose deux premières formes réduites, chacune étant associée à une famille de perturbations quasi-génériques. Des algorithmes de réduction par similitude polynomiale ainsi que les formes normales correspondantes sont également présentés. Enfin, une généralisation d'un théorème de Lidskii indique une troisième forme réduite, pour laquelle le problème de départ est complètement résolu. L'ensemble de ces résultats trouve une interprétation simple avec le polygone de Newton et l'implantation en Maple des algorithmes proposés a permis de développer une première "boîte à outils" pour les perturbations de matrices.

Mots-clés : valeurs propres de perturbations de matrices, algèbre linéaire exacte, formes normales matricielles, polynôme caractéristique, perturbations de Lidskii, séries de Puiseux, polygone de Newton.

Title: Studies in matrix perturbations: algebraic computation of normal forms.

Abstract: This thesis deals with rational normal forms of matrix perturbations and the eigenvalue perturbation problem: the asymptotic behavior of perturbed eigenvalues only depends on a few monomials of the characteristic polynomial and the goal is thus to be able to "recover" these monomials directly from the initial matrix (quasi-generic perturbations) or at least from a similar matrix perturbation (reduced form). Following Moser and Lidskii, we define two reduced forms that are associated with two different families of quasi-generic matrix perturbations. We also extend Lidskii's perturbation theorem in order to give a third reduced form and to provide a complete solution to the problem. Additionally, a Newton diagram interpretation is detailed for each of these results and some Maple functionalities for handling matrix perturbations are described.

Keywords : eigenvalues of matrix perturbations, symbolic linear algebra, normal matrix forms, characteristic polynomial, Lidskii perturbations, Puiseux series, Newton diagram.