TD 12

Exercice 1.

1. Soit $I = \lambda x.x$ et $F = \lambda yx.y(yI)$. Réduire $F(II)$.
2. Réduire $\Omega = (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$, et $(\lambda x.y)\Omega$.
3. Proposer un λ-terme dont la taille augmente à l'infini au fil des réductions.
4. Soit $\Theta = (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))$. Réduire Θf.
   Le terme Θ est appellé combinateur de point fixe de Turing.

Exercice 2.
On rappelle que le codage d'un entier de Church est le suivant : $\langle n \rangle = \lambda fx.(f^n x)$ et que le codage des booléens est : $\top \equiv \lambda xy.x, \bot \equiv \lambda xy.y$.

1. Donner un lambda-terme qui encode le "if b then x else y".
2. Donner des lambda-termes représentant and, or et not.
3. Proposer un codage des paires et des fonctions fst et snd associées.
4. A l'aide des paires, donner un codage des listes chaînées, ainsi que des fonctions head,tail, et isempty associées.
5. En remarquant qu'un entier peut être vu comme une imbrication de paires, donner une λ-représentation des entiers, différente de celle de Church.

Exercice 3.

1. Montrer que la fonction prédécesseur est λ-représentable.
2. Donner des λ-termes représentant eq_0 (fonction de test en 0), la multiplication et l'exponentiation.
3. Montrer que les projections et la fonction nulle sont λ-représentables.
4. Montrer que l'ensemble des fonctions λ-représentables est clos par composition.
5. On s'intéresse maintenant au cas de la récurrence primitive. Pour simplifier les notations, on suppose que f n'a qu'un seul argument, ie que f est définie par :

$$f(0) = g$$
$$f(n+1) = h(n, f(n))$$

   On suppose que par hypothèse d'induction, il existe un codage $\langle h \rangle$ de h, ie pour tout n, m, on a $\langle h \rangle \langle n \rangle \langle m \rangle \to_\beta^* \langle h(n,m) \rangle$.

Exercice 4.

Définition. On dit que la relation binaire $R \subseteq E \times E$ est **confluente à un pas** si pour tous $t_0, t_1, t_2 \in E$ tels que $t_0 R t_1$ et $t_0 R t_2$, il existe $t_3 \in E$ tel que $t_1 R t_3$ et $t_2 R t_3$.

1. Soit R une relation binaire réflexive. Montrer que si R est confluente à un pas, alors elle est confluente (*i.e.* sa cloture transitive est confluente à un pas).

Définition. On définit la relation R comme la plus petite relation binaire sur Λ telle que pour tous $t, t', u, u' \in \Lambda$:

† tRt

† Si tRt' et uRu' alors $\lambda x.t \ R \ \lambda x.t'$ et $t \ u \ R \ t' \ u'$.

† Si tRt' et uRu' alors $(\lambda x.t)u \ R \ t'[u'/x]$.

Note : les deux premiers points correspondent à dire que R passe au contexte.

2. Montrer que la clôture transitive de R est la clôture réflexive et transitive de la β-réduction.

Lemme 1. *Si uRu' et vRv', alors $u[v/x]Ru'[v'/x]$.*

3. En admettant ce lemme, montrer que la β-réduction est confluente.
4. Prouver le lemme.