TD 2

Exercice 1. *Stabilité*

Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ. Montrer que les langages suivants sont rationnels.

1. $\mathrm{CYCLE}(L) = \{x_1 \cdot x_2 \mid x_1, x_2 \in \Sigma^* \wedge x_2 \cdot x_1 \in L\}$
2. $\mathrm{MAX}(L) = \{x \in L \mid \forall y \neq \varepsilon \quad x\,y \notin L\}$
3. $\mathrm{MIN}(L) = \{x \in L \mid$ aucun préfixe propre de x n'est dans $L\}$
4. $\mathrm{INIT}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \quad x\,y \in L\}$
5. $\dfrac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \quad x\,y \in L \wedge |y| = |x|\}$
6. $\mathrm{SQRT}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \quad x\,y \in L \wedge |y| = |x|^2\}$
7. $\mathrm{LOG}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \quad x\,y \in L \wedge |y| = 2^{|x|}\}$
8. $\mathrm{SWAP}(L) = \{a_2\,a_1\,a_4\,a_3 \cdots a_{2n}\,a_{2n-1} \mid a_1, \cdots, a_{2n} \in \Sigma \wedge a_1\,a_2 \cdots a_{2n} \in L\}$
9. $\mathrm{ERASE}(L) = \{a_1\,a_3 \cdots a_{2n-1} \mid a_1, \cdots, a_{2n} \in \Sigma \wedge \; a_1\,a_2 \cdots a_{2n} \in L\}$

Exercice 2. *Semi-Linéarité*

Un ensemble d'entiers est linéaire s'il est de la forme $\{c + ip, i \in \mathbb{N}\}$. Un ensemble est semi-linéaire s'il est réunion finie d'ensembles linéaires. Soit $L \subseteq a^*$ un langage rationnel, montrer que $\{i, a^i \in L\}$ est semi-linéaire.

En déduire que pour tout langage L rationnel, l'ensemble $\lambda(L) = \{|w|, w \in L\}$ est semi-linéaire.

Exercice 3. *Décisions*

1. Écrire un algorithme décidant si le langage d'un automate est infini.
2. Écrire un algorithme décidant si le langage d'un automate est vide.

Exercice 4. *Monoïdes*

On appelle monoïde tout ensemble muni d'une loi de composition interne associative qui possède un élément neutre noté 1_M. L'ensemble des mots A^* avec la concaténation comme composition et le mot vide comme neutre est un monoïde (c'est le monoïde *libre* généré par A). Un morphisme de monoïde est une fonction $f : M \to N$ vérifiant $f(xy) = f(x)f(y)$ et $f(1_M) = 1_N$.

On dit q'un langage $L \subseteq A^*$ est reconnu par un morphisme $\mu : A^* \to M$ s'il existe une partie $P \subseteq M$ telle que $L = \mu^{-1}(P)$. Par extension, un monoïde M reconnaît le langage L s'il existe un morphisme $\mu : A^* \to M$ qui reconnait L.

1. On considère le morphisme $\mu : A^* \to \mathbb{Z}^2$ tel que $\mu(w) = |w|_a \mod 2$. Quels sont les langages reconnus par μ ?
2. Montrer que si $L \subseteq A^*$ est reconnu par un monoïde fini, alors L est rationnel.
3. On définit la loi de composition interne sur les relations binaires de E par :

$$\tau \cdot \tau' = \{(x,z) \in E^2 : \exists y \in E, (x,y) \in \tau, (y,z) \in \tau'\}$$

   On note $\mathcal{R}_E$ le monoïde des relations binaires sur l'ensemble E muni de cette loi. Montrer que si L est rationnel, alors L est reconnu par un monoïde fini.
4. En utilisant les monoïdes, redémontrer que les langages réguliers sont clos par complémentaire, union, et intersection.
5. Montrer que si $f : A^* \to B^*$ est un morphisme et $L \subseteq B^*$ est rationnel, alors $f^{-1}(L)$ est rationnel.
6. On appelle substitution de A^* de B^* une fonction σ de A^* dans $\mathcal{P}(B^*)$ tel que $\sigma(uv) = \sigma(u) \cdot \sigma(v)$, le $\cdot$ dénotant la concaténation de langage de B^*. Soit $K \subseteq B^*$ un langage rationnel et σ une substitution de A^* de B^*. Montrer que les langages $\{w|\sigma(w) \cap K \neq \varnothing\}$ et $\{w|\sigma(w) \subseteq K\}$ sont rationnels.
7. Montrer que si $f : A^* \to B^*$ est un morphisme et $L \subseteq A^*$ est rationnel, alors $f(L)$ est rationnel.

   Indication. *Ici, utiliser des monoïdes n'est pas forcément le plus simple.*