TD 8

Exercice 1.
Soit $\Sigma = \{0, 1\}$ un alphabet et soit x un mot de Σ^*. Construire des machines de Turing telles que :

1. lisant x la machine écrit x^R (x écrit à l'envers)
2. la machine accepte x ssi x s'écrit $y \cdot y^R$ pour un certain $y \in \Sigma^*$.

Exercice 2.

1. Montrer qu'un langage $\mathcal{L}$ est décidable si et seulemnt s'il est récursivement énumerable et co-récursivement énumerable (c'est à dire que $\overline{\mathcal{L}}$ est r.e.).

Exercice 3.
Notons A_{TM} le langage $\{\langle M, w\rangle \mid M \text{ accepte } w\}$. Il a été vu en cours que ce langage est indécidable.

1. Montrez alors que le langage $Stop_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ s'arrête sur } w\}$ est indécidable

On va maintenant introduire une méthode courante pour montrer de façon générale ce type de question. On dit qu'une fonction $\Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ est *calculable* s'il existe une machine de Turing qui calcule cette fonction (sur une entrée w, elle s'arrête avec $f(w)$ écrit sur sa bande).
On dit maintenant qu'un langage A *se réduit* au langage B s'il existe une fonction calculable f telle que pour tout mot w,

$$w \in A \text{ si et seulement si } f(w) \in B$$

2. Montrez que, si A se réduit en B alors :
   - † Si B est décidable, alors A est décidable.
   - † Si A est indécidable, alors B est indécidable.
3. Prouvez maintenant que $Stop_{TM}$ est indécidable grâce à une réduction et l'indécidabilité de A_{TM}
4. Prouvez maintenant, de la même manière que la première question que le langage

$$Vide_{TM} = \{\langle M\rangle \mid L(M) = \varnothing\}$$

   est indécidable. Peut on faire une preuve direct par réduction ?

Exercice 4.

1. Montrez que n'importe quel langage algébrique peut être reconnu par une machine de Turing.
2. Construisez une machine de Turing qui reconnaît le langage $\{a^n b^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 5.
On définit un nouveau modèle de machine de Turing fonctionnant avec un ruban infini *des deux côtés*, c'est à dire qu'à l'état initial l'entrée est écrite quelque part sur le ruban, et il n'y a que des blancs partout ailleurs sur le ruban infini. (Formellement, on peut dire que les cases du ruban sont indexées par $\mathbb{Z}$ au lieu d'être indexées par $\mathbb{N}$ pour un ruban classique, infini à droite).

✎ Donner l'intuition de la preuve qu'une telle machine de Turing avec ruban infini des deux côtés peut être simulée par une machine de Turing avec ruban infini à droite, et vice versa.